

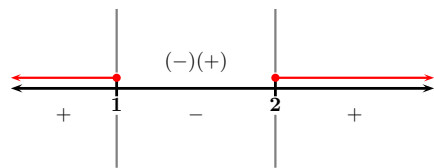
Exercício - teste 2

a) Encontrar o domínio máximo de definição da seguinte função

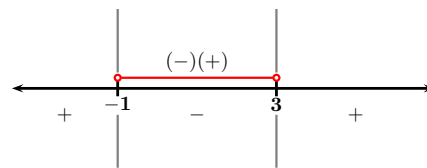
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$$

Resolução: Esta função está definida para $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ e $3 + 2x - x^2 > 0$ (dado que não podemos dividir por zero). Note-se que

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \iff (x-2)(x-1) \geq 0 \quad \text{e} \quad 3 + 2x - x^2 > 0 \iff (x-3)(x+1) < 0$$



$$CS_I =] - \infty, 1] \cup [2, +\infty[$$



$$CS_{II} =] - 1, 3[$$

Logo, temos que

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 \geq 0, 3 + 2x - x^2 > 0\} = CS_I \cap CS_{II} =] - 1, 1] \cup [2, 3[.$$

b) Uma função do tipo

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{com } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

chama-se homográfica.

(b.1) Demonstrar que a função inversa à função homográfica (considerando que $ad - bc \neq 0$) é também homográfica.

(b.2) Para $a = 1, b = -1, c = -3, d = 5$, esboçar a gráfica da função homográfica correspondente. (**Sugestão:** Partir da gráfica da função $y = \frac{1}{x}$).

Resolução:

(b.1) Usando a definição de função inversa, se encontrarmos uma função g tal que

$$f(g(x)) = x \quad \text{e} \quad g(f(x)) = x,$$

nos seus respectivos domínios, diremos que g é a inversa da função f . Por um lado, da equação $f(g(x)) = x$ segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{a g(x) + b}{c g(x) + d} = x &\iff a g(x) + b = c g(x) x + dx \\ &\iff g(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}, \quad \text{com } x \neq \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Isto mostra que a função g é também homográfica. Agora, para ter a certeza que g é a inversa da função f , ainda temos que provar que $g(f(x)) = x$. Efectivamente, tem-se que

$$g(f(x)) = \frac{-d f(x) + b}{c f(x) - a} = \frac{-d \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right) + b}{c \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right) - a} = \frac{-adx - bd + bcx + bd}{cax + bc - acx - ad} = \frac{-(ad - bc)x}{-(ad - bc)} = x.$$

Note-se que a última simplificação faz sentido porque $ad - bc \neq 0$.

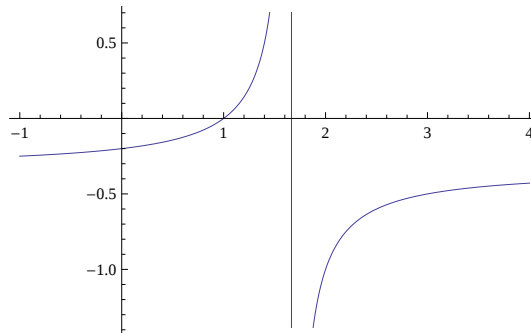
- (b.2) Observe-se que a função homográfica está definida para qualquer $x \in \mathbb{R}$ excepto no caso em que $cx + d = 0$, ou seja, está definida para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$ (obviamente com $c \neq 0$). Podemos escrever

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{\frac{a}{c}(cx + d) - \frac{ad-bc}{c}}{cx + d} = \frac{a}{c} - \frac{\frac{ad-bc}{c}}{cx + d}.$$

Isto indica que a função homográfica pode ser obtida a partir da função $1/x$, por meio de mudança de escalas, translações e reflexões. Logo, para $a = 1, b = -1, c = -3$ e $d = 5$,

$$f(x) = -\frac{1}{3} - \frac{\frac{5-3}{-3}}{-3x+5} = -\frac{1}{3} + \frac{\frac{2}{3}}{-3x+5}$$

e um esboço da gráfica de f é



- c) A função seno hiperbólico designa-se por $\sinh$ e satisfaz a seguinte igualdade

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R}.$$

A função inversa do seno hiperbólico designa-se por $\arg \sinh x$. Deduza

$$\arg \sinh x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

Resolução: Seja $y = \arg \sinh x$. Logo, $\sinh y = \sinh(\arg \sinh x) = x$ e então podemos escrever

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \longleftrightarrow \quad 2x = e^y - e^{-y} \quad \longleftrightarrow \quad 2xe^y = e^{2y} - 1 \quad \longleftrightarrow \quad e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

A última equação é equivalente a

$$(e^y - x)^2 - x^2 - 1 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad (e^y - x)^2 = x^2 + 1 \quad \longleftrightarrow \quad e^y = x + \sqrt{x^2 + 1},$$

uma vez que $e^y = 2x + e^{-y}$ e portanto $e^y > x$. Finalmente, da última equação acima segue-se

$$y = \ln(e^y) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right).$$