Faculdade de Ciências da
Universidade de Lisboa
Departamento de Matemática

Matemática II
2º Semestre de 2009/2010

Exercício - teste 3

Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{5}{3n}\right)^{2n}$

Resolução:

a) Multiplicamos numerador e denominador por $\frac{1}{n}$ e simplificamos. Temos então que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^3+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}\sqrt{n^2-3}}{\frac{1}{n}\sqrt[3]{n^3+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{3}{n^2}}}{\sqrt[3]{\frac{n^3}{n^3}+\frac{1}{n^3}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}} = 1\ .$$

b) Manipulando convenientemente o termo geral da sucessão $a_n = \left(1+\frac{5}{3n}\right)^{2n}$ obtem-se

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{5}{3n}\right)^{2n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{5}{3n}\right)^{3n}\right]^{\frac{2\cancel{n}}{3\cancel{n}}} = \left[\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{5}{3n}\right)^{3n}\right]^{2/3}$$

$$= \left(e^5\right)^{2/3} = e^{10/3}\ .$$

No último exercício usamos a seguinte propriedade

$$\text{Se} \quad \lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty \quad \text{então} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{k}{u_n}\right)^{u_n} = e^k \quad , \quad \forall\ k \in \mathbb{R}\,.$$