Exercício - teste 5

a) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Analisar a continuidade da seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , \text{ se } \quad x \neq 2 \\ \\ \alpha & , \text{ se } \quad x = 2 \end{cases} .$$

Resolução: Note-se primeiro que a função f é contínua para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ porquanto é o quociente de duas funções contínuas, onde o denominador é diferente de zero dado que $x \neq 2$. Só resta analisar a continuidade de f em $x = 2$. Temos dois casos a considerar:

Caso I ($\boldsymbol{\alpha = 4}$) Neste caso temos

$$f(2) = \alpha = 4 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}\,(x+2)}{\cancel{x-2}} = 4$$

Logo, conclui-se que f é contínua em $x = 2$ uma vez que $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

Caso II ($\boldsymbol{\alpha \neq 4}$) Neste caso, dado que $f(2) = \alpha \neq \lim_{x\to 2} f(x) = 4$, conclui-se imediatamente que f não é contínua em $x = 2$.

b) Calcule a derivada da seguinte função:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) .$$

Resolução:

$$f'(x) = \frac{1}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \cdot \frac{1\cdot\sqrt{x^2+1} - x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}}}{x} \cdot \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\,\cancel{\sqrt{x^2+1}}} = \frac{1}{x(x^2+1)} .$$