

Exercício - teste 6

a) Calcule a derivada da seguinte função:

$$f(x) = \frac{2}{3} \arctan x + \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{x}{1-x^2} \right).$$

Resolução:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3} \left[\frac{1}{1+x^2} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{1-x^2} \right)^2} \right] \left[\frac{1-x^2 - x(-2x)}{(1-x^2)^2} \right] \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{1}{1+x^2} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{\frac{(1-x^2)^2 + x^2}{(1-x^2)^2}} \right] \cdot \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{1}{1+x^2} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{1+x^2}{1-x^2+x^4} \right] \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{1}{1+x^2} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{1+x^2}{\frac{1+x^6}{1+x^2}} \right] = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{1+x^2} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{(1+x^2)^2}{1+x^6} \right] \\ &= \frac{2(1-x^2+x^4) + (1+x^2)^2}{3(1+x^6)} = \frac{1+x^4}{1+x^6}. \end{aligned}$$

b) Estude o comportamento da seguinte função. Tenha em conta o domínio da função, assíntotas, intervalos de crescimento e decrescimento (critério da primeira derivada), intervalos de convexidade (critério da segunda derivada), etc. Resuma toda esta informação numa tabela. Faça um esboço da gráfica da função.

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Resolução:

Domínio. Note-se primeiro que $\text{Dom } f = \mathbb{R}$. Pode-se pensar que f não está definida em $x = 0$, mas na verdade, dado que $-\frac{1}{0^2} = -\infty$, temos $e^{-\infty} = 0$.

Assíntotas. Podemos ver rapidamente que f não tem assíntotas verticais, uma vez que a função está definida em todo $\mathbb{R}$.

Quanto à existência de assíntotas horizontais, observe-se que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Logo, $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

Finalmente, dado que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0,$$

concluimos que f não tem assíntotas oblíquas.

Análise de crescimento. Calculamos primeiro a derivada de f ,

$$f'(x) = - \left(\frac{-2x}{x^4} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Aparentemente, a derivada não existe em $x = 0$ e portanto é um ponto crítico. Se usarmos a definição da derivada de uma função num ponto, vemos que

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{-2e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2e^{\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

Logo, efectivamente $x = 0$ é um ponto crítico mas $f'(0) = 0$. Da análise de sinais da primeira derivada (ver Fig. 1) conclui-se que $x = 0$ é um mínimo local.

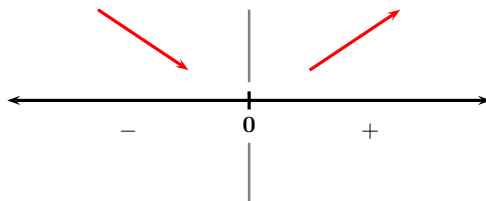


Figura 1: Análise de sinais de $f'(x)$

Análise de convexidade. Calculamos a segunda derivada de f ,

$$f''(x) = \frac{\frac{4}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot x^3 - 2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}(4 - 6x^2)}{x^6}.$$

Logo, os possíveis pontos de inflexão (pontos onde f'' não existe ou é zero) são 0 e $\pm \frac{2}{\sqrt{6}}$. Da análise de sinais da segunda derivada (ver Fig. 2) conclui-se que os pontos $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ e $\frac{2}{\sqrt{6}}$ são pontos de inflexão.

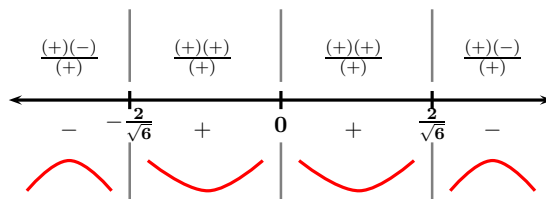


Figura 2: Análise de sinais de $f''(x)$

Juntamos esta informação toda e obtemos o seguinte esboço da gráfica de f .

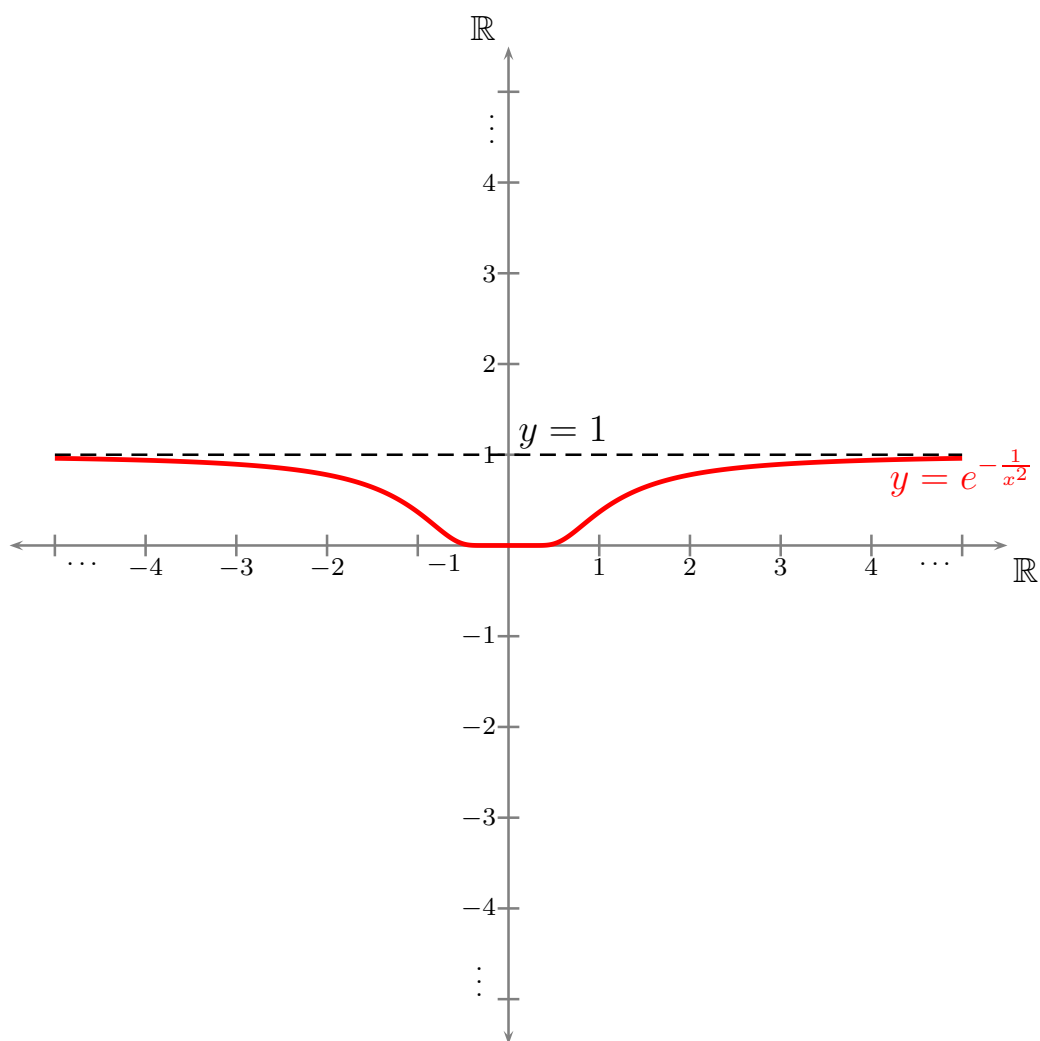


Figura 3: Esboço da gráfica de f