

Exercício - teste 7

a) Faça o estudo da função $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x}$, determinando o seu domínio máximo de definição, assíntotas, caso existam, intervalos de crescimento e decrescimento (critério da primeira derivada) e intervalos de convexidade (critério da segunda derivada). Esboce o gráfico de f .

Resolução:

Domínio. $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} : x+3 > 0 \text{ e } x \neq 0\} =]-3, +\infty[\setminus \{0\}$. Note-se que $f(-2) = 0$.

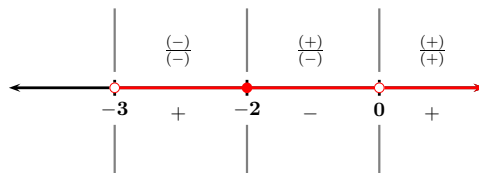


Figura 1: Análise de sinais de $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x}$.

Assíntotas.

Verticais.

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\ln(x+3)}{x} = \frac{-\infty}{-3} = +\infty$$

$$\therefore \boxed{x = -3 \text{ é A.V.}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(x+3)}{x} = \frac{\ln(3)}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+3)}{x} = \frac{\ln(3)}{0^+} = +\infty$$

$$\therefore \boxed{x = 0 \text{ é A.V.}}$$

Horizontais.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+3)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+3}}{1} = 0$$

indet. $\frac{\infty}{\infty}$

$$\therefore \boxed{y = 0 \text{ é A.H.}}$$

Oblíquas. Dado que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, conclui-se que f não tem assíntotas oblíquas.

Análise de crescimento.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+3} \cdot x - \ln(x+3)}{x^2}.$$

O sinal de $f'(x)$ vai depender unicamente de $\frac{1}{x+3} \cdot x - \ln(x+3)$, uma vez que x^2 é sempre positivo para qualquer $x \in \text{Dom } f$.

Note-se que $\forall x > 0$, $e < x+3$. Dado que a função $\ln$ é crescente, temos que $1 = \ln e < \ln(x+3)$. Logo, $1 - \ln(x+3) < 0$ e portanto

$$\frac{x}{x+3} - \ln(x+3) = \frac{x+3}{x+3} - \frac{3}{x+3} - \ln(x+3) = 1 - \frac{3}{x+3} - \ln(x+3) < 0.$$

Se $-2 < x < 0$, então $1 < x+3 < 3$ e portanto $0 = \ln 1 < \ln(x+3)$, donde $-\ln(x+3) < 0$. Claramente, segue-se também que $\frac{x}{x+3} < 0$. Logo,

$$\frac{x}{x+3} - \ln(x+3) < 0.$$

Por último, analisar se $\frac{x}{x+3} - \ln(x+3) < 0$ ou > 0 ou $= 0$ quando $-3 < x < -2$, não é assim tão directo. Neste caso usaremos o teorema do valor médio (Lagrange) para determinar o tipo de desigualdade.

Definamos $g(x) = \frac{x}{x+3} - \ln(x+3)$ com $-3 < x < -2$ e sejam $a = x$ e $b = -2$. Verifica-se imediatamente que g é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Logo, pelo teorema do valor médio, existe $c \in]x, -2[$ tal que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{g(-2) - g(x)}{-2 - x} = \frac{-2 - \frac{x}{x+3} + \ln(x+3)}{-2 - x}.$$

Dado que

$$g'(x) = \frac{x+3-x}{(x+3)^2} - \frac{1}{x+3} = -\frac{x}{(x+3)^2},$$

então para $c \in]x, -2[$ tem-se que $g'(c) > 0$. Logo,

$$\frac{-2 - \frac{x}{x+3} + \ln(x+3)}{-2 - x} > 0 \iff \frac{\frac{x}{x+3} - \ln(x+3) + 2}{x+2} > 0 \iff \frac{x}{x+3} - \ln(x+3) + 2 < 0,$$

visto que $x+2 < 0$. Portanto, conclui-se que

$$\frac{x}{x+3} - \ln(x+3) < 0 \quad \text{para qualquer} \quad -3 < x < -2.$$

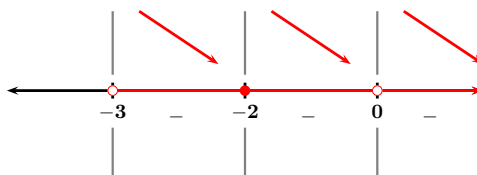


Figura 2: Análise de sinais de $f'(x)$.

Resumimos a análise de sinais de $f'(x)$ na Figura 2.

Análise de convexidade.

$$f''(x) = \frac{2\ln(x+3)}{x^3} - \frac{3(x+2)}{x^2(x+3)^2}.$$

Vê-se imediatamente que $f''(-2) = 0$. Portanto $x = -2$ é um possível ponto de inflexão. A pergunta é, existem outras soluções da equação $f''(x) = 0$? Não é directo encontrar essas soluções, pelo que mudamos de estratégia e analisamos se $f''(x)$ é positivo ou negativo nos intervalos $] -3, -2[$, $] -2, 0[$ e $] 0, +\infty[$, tal como fizemos na análise de sinais da primeira derivada.

Se $-3 < x < -2$, segue-se que $x^2 > 0$, $x^3 < 0$, $x+2 < 0$, $0 < x+3 < 1$, $0 < (x+3)^2$ e $\ln(x+3) < 0$. Logo,

$$\frac{2\ln(x+3)}{x^3} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{3(x+2)}{x^2(x+3)^2} < 0. \quad \text{Portanto} \quad \frac{2\ln(x+3)}{x^3} - \frac{3(x+2)}{x^2(x+3)^2} > 0.$$

Se $-2 < x < 0$, segue-se que $x^2 > 0$, $x^3 < 0$, $0 < x+2$, $1 < x+3 < 3$, $1 < (x+3)^2$ e $0 < \ln(x+3)$. Logo,

$$\frac{2\ln(x+3)}{x^3} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{3(x+2)}{x^2(x+3)^2} > 0. \quad \text{Portanto} \quad \frac{2\ln(x+3)}{x^3} - \frac{3(x+2)}{x^2(x+3)^2} < 0.$$

Finalmente, se $0 < x$, claramente

$$\frac{2\ln(x+3)}{x^3} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{3(x+2)}{x^2(x+3)^2} > 0,$$

mas quem é maior? Dado que não conseguimos estabelecer isto em forma directa, recurrimos mais uma vez ao teorema do valor médio. Notemos que podemos escrever

$$f''(x) = \frac{2(x+3)^2 \ln(x+3) - 3x(x+2)}{x^3(x+3)^2}.$$

O sinal de $f''(x)$ vai depender do numerador do quociente acima indicado. Portanto, seja

$$g(x) = 2(x+3)^2 \ln(x+3) - 3x(x+2).$$

Depois de simplificar, a derivada de g é

$$g'(x) = 4x[\ln(x+3) - 1] + 12\ln(x+3).$$

Para $0 < x$, segue-se que $e < 3 < x+3$ e portanto $0 < \ln(x+3) - 1$. Isto mostra que $g'(x) > 0$ para qualquer $x > 0$.

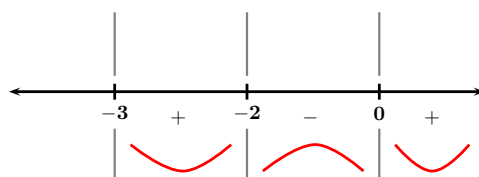


Figura 3: Análise de sinais de $f''(x)$.

Note-se ainda que g é contínua e diferenciável em $] - 3, +\infty[$. Se fazermos $a = 0$ e $b = x$, com $x > 0$, em particular temos que g é contínua no intervalo fechado $[0, x]$ e diferenciável no intervalo aberto $]0, x[$. Logo, pelo teorema do valor médio, existe $c \in]0, x[$ tal que

$$g'(c) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{2(x+3)^2 \ln(x+3) - 3x(x+2) - 18 \ln(3)}{x}.$$

Dado que $g'(c) > 0$ e $x > 0$, conclui-se imediatamente que

$$2(x+3)^2 \ln(x+3) - 3x(x+2) > 18 \ln(3) > 0.$$

Portanto, $f''(x) > 0$ para qualquer $x > 0$. Juntamos esta informação toda na Figura 3. Deduzimos que $x = -2$ é verdadeiramente um ponto de inflexão.

Estamos prestes para dar o esboço da gráfica de f (ver Fig 4).

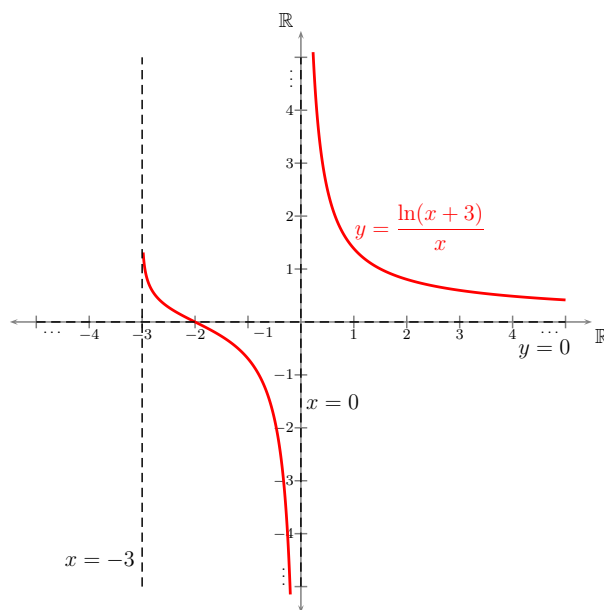


Figura 4: Esboço da gráfica de f .

b) Qual é o polinómio de grau 3 que melhor aproxima a função $f(x) = \sin x$ na vizinhança da origem. E o polinómio de grau n ?

Resolução: O polinómio de grau 3 que melhor aproxima a função $f(x) = \sin x$ na vizinhança da origem é o seu polinómio de Taylor de grau 3 ao redor do 0,

$$P_f^3(x) = f(0) + \sum_{k=1}^3 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k = x - \frac{1}{6}x^3,$$

uma vez que para $f(x) = \sin x$ temos $f^{(1)}(x) = \cos x$, $f^{(2)}(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, etc., e portanto $f(0) = 0$, $f^{(1)}(0) = 1$, $f^{(2)}(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, etc.

Se repararmos bem, há um padrão no cálculo das derivadas de ordem superior da função f avaliadas em 0. Note-se que

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & k \equiv 1 \pmod{4} \\ 0 & k \equiv 0, 2 \pmod{4} \\ -1 & k \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

O polinómio de grau n que melhor aproxima $\sin x$ na vizinhança de zero é

$$P_f^n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k .$$