Exercício - teste 9

a) Calcular $\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}\, dx$.

Resolução:

$$\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}\, dx = \int \frac{A}{x}\, dx + \int \frac{B}{x+1}\, dx + \int \frac{C}{x+2}\, dx + \int \frac{D}{x+3}\, dx$$

$$= A\ln|x| + B\ln|x+1| + C\ln|x+2| + D\ln|x+3| + K$$

onde K é uma constante arbitrária, e A, B, C e D são constantes que podem ser identificadas ao comparar os seguintes polinómios

$$1 = A(x+1)(x+2)(x+3) + Bx(x+2)(x+3) + Cx(x+1)(x+3) + Dx(x+1)(x+2)\ .$$

Agrupamos termos semelhantes no lado direito da equação acima e escrevemos

$$1 = (A+B+C+D)x^3 + (6A+5B+4C+3D)x^2 + (11A+6B+3C+2D)x + 6A$$

donde conseguimos um sistema de quatro equações lineares com quatro incógnitas

$$\begin{aligned} A+B+C+D &= 0 \\ 6A+5B+4C+3D &= 0 \\ 11A+6B+3C+2D &= 0 \\ 6A &= 1 \end{aligned}$$

Ao resolver este sistema encontramos que $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$ e $D = -\frac{1}{6}$. Portanto

$$\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}\, dx = \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x+2| - \frac{1}{6}\ln|x+3| + K\ .$$

b) Calcular $\int \frac{x}{(x^2+3)(x+1)}\, dx$.

Resolução:

$$\int \frac{x}{(x^2+3)(x+1)}\, dx = \int \frac{Ax+B}{x^2+3}\, dx + \int \frac{C}{x+1}\, dx$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}\, dx + \frac{B}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\, dx + C\int \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+3) + \frac{B}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C\ln|x+1| + K\ ,$$

onde K é uma constante arbitrária e A, B e C são constantes que determinamos a partir da igualdade de polinómios

$$x = (Ax+B)(x+1) + C(x^2+3) = (A+C)x^2 + (A+B)x + B + 3C\ .$$

Obtemos um sistema linear de três equações com três incógnitas

$$\begin{array}{rcl} A+C & = & 0 \\ A+B & = & 1 \\ B+3C & = & 0 \end{array} ,$$

donde segue-se que $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{3}{4}$ e $C = -\frac{1}{4}$. Portanto

$$\int \frac{x}{(x^2+3)(x+1)}\,dx = \frac{1}{8}\,\ln(x^2+3)\;+\;\frac{\sqrt{3}}{4}\,\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\;-\;\frac{1}{4}\,\ln|x+1|\;+\;K\;.$$