Faculdade de Ciências da
Universidade de Lisboa
Departamento de Matemática

Miscelânea

Equações e inequações com valor absoluto

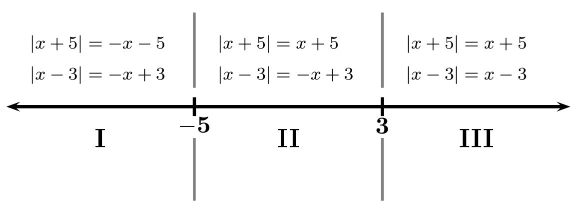
Quando queremos resolver uma equação ou inequação que contém valores absolutos primeiro temos de fazer desaparecer os valores absolutos. A fim de conseguí-lo, podemos usar o método dos valores críticos (também chamado análise por regiões) para levantar em forma ordenada e sistemática as barras verticais do valor absoluto.

1) Suponhamos que queremos resolver, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação:

$$|x+5| - |x-3| = -3. \tag{1}$$

Resolução.

Identificamos primeiro os valores críticos da equação (1); estes são aqueles que anulam as expressões com valor absoluto. No nosso caso, -5 e 3 são os valores críticos. Usamos estes valores para dividir a recta real em três regiões. Estas regiões são: $]-\infty,-5]$, $]-5,3]$ e $]3,+\infty[$. Procedemos agora a levantar os valores absolutos segundo cada região.



Região I: $]-\infty,-5]$

Temos de trabalhar com $x \in]-\infty,-5]$ que equivale a dizer $x \leq -5$. Temos que $x+5 \leq 0$ e $x-3 < 0$. Portanto $|x+5| = -(x+5)$ e $|x-3| = -(x-3)$. Logo a equação (1) escreve-se nesta região como segue

$$\begin{aligned} -(x+5) - \big(-(x-3)\big) &= -3 \\ -x-5+x-3 &= -3 \\ -8 &= -3. \end{aligned}$$

Esta última equação é um absurdo, logo concluímos que na região I não há x que satisfaça a equação (1). Portanto o conjunto solução $\mathbf{CS_I}$ **nesta região** é $\mathbf{CS_I} = \emptyset$.

Região II: $]-5,3]$

Temos agora de trabalhar com $x \in]-5,3]$ que equivale a dizer $-5 < x \leq 3$. Temos que $0 < x+5$ e $x-3 \leq 0$. Logo a equação (1) escreve-se nesta região como segue

$$\begin{aligned} (x+5) - \big(-(x-3)\big) &= -3 \\ x+5+x-3 &= -3 \\ 2x+2 &= -3 \\ 2x &= -5 \\ x &= -\tfrac{5}{2}. \end{aligned}$$

Não se esquecer de verificar sempre se o(s) valor(es) obtido(s) pertence(m) ou não à região onde estamos a trabalhar. Portanto o conjunto solução $\mathbf{CS_{II}}$ **nesta região** é

$$\mathbf{CS_{II}} = \{-\tfrac{5}{2}\} \cap \,]-5,3] = \{-\tfrac{5}{2}\}.$$

Região III: $]3,+\infty[$

Temos agora de trabalhar com $x \in]3,+\infty[$ que equivale a dizer $3 < x$. Temos que $0 < x+5$ e $0 < x-3$. Logo a equação (1) escreve-se nesta região como segue

$$\begin{aligned} (x+5)-(x-3) &= -3 \\ x+5-x+3 &= -3 \\ 8 &= -3. \end{aligned}$$

Esta última equação é também um absurdo. Portanto o conjunto solução $\mathbf{CS_{III}}$ **nesta região** é $\mathbf{CS_{III}} = \emptyset$.

O conjunto solução final $\mathbf{CS_F}$ da equação (1) é a união de todos estes conjuntos solução parciais

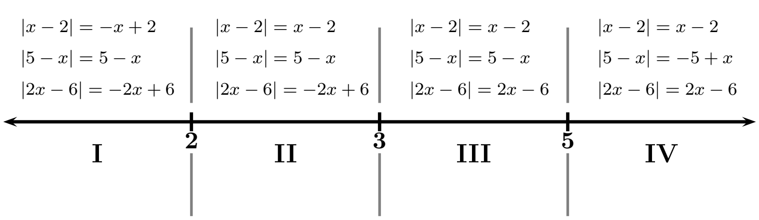
$$\mathbf{CS_F} \;=\; \mathbf{CS_I} \cup \mathbf{CS_{II}} \cup \mathbf{CS_{III}} \;=\; \emptyset \cup \{-\tfrac{5}{2}\} \cup \emptyset \;=\; \{-\tfrac{5}{2}\}.$$

$\therefore \boxed{\mathbf{CS_F} \;=\; \{-\tfrac{5}{2}\}}.$

2) Resolver, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação

$$|x-2| + |5-x| = |2x-6|. \tag{2}$$

Resolução.



Região I: $]-\infty,2]$

$$\begin{aligned} |x-2|+|5-x| &= |2x-6| \\ -x+2+5-x &= -2x+6 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{CS_I} = \emptyset \cap \,]-\infty,2] = \emptyset. \\ 7 &= 6 \end{aligned}$$

Região II: $]2,3]$

$$\begin{aligned} |x-2|+|5-x| &= |2x-6| \\ x-2+5-x &= -2x+6 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{CS_{II}} = \{\tfrac{3}{2}\} \cap \,]2,3] = \emptyset. \\ -3 &= -2x \end{aligned}$$

Região III: $]3,5]$

$$\begin{aligned} |x-2|+|5-x| &= |2x-6| \\ x-2+5-x &= 2x-6 \\ 9 &= 2x \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{CS_{III}} = \{\tfrac{9}{2}\} \cap \,]3,5] = \{\tfrac{9}{2}\}.$$

Região IV: $]5,+\infty]$

$$\begin{aligned} |x-2|+|5-x| &= |2x-6| \\ x-2-5+x &= 2x-6 \\ -7 &= -6 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{CS_{IV}} = \emptyset \cap \,]5,+\infty] = \emptyset.$$

O conjunto solução final $\mathbf{CS_F}$ da equação (2) é a união de todos estes conjuntos solução parciais

$$\mathbf{CS_F} \;=\; \mathbf{CS_I} \cup \mathbf{CS_{II}} \cup \mathbf{CS_{III}} \cup \mathbf{CS_{IV}} \;=\; \emptyset \cup \emptyset \cup \{\tfrac{9}{2}\} \cup \emptyset \;=\; \{\tfrac{9}{2}\}.$$

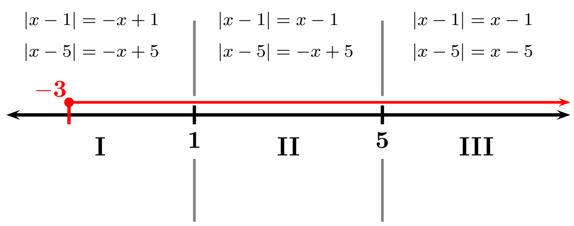
$\therefore \boxed{\mathbf{CS_F} \;=\; \{\tfrac{9}{2}\}}.$

3) Resolver, em $\mathbb{R}$, a seguinte inequação

$$|x-1|+|x-5| \leq x+3. \tag{3}$$

Resolução.

Os valores críticos desta inequação são 1 e 5. Ora bem, como $0 \leq |x-1|+|x-5| \leq x+3$, temos de ter também presente a condição $0 \leq x+3$, ou seja, em vez de trabalhar sobre a recta real toda, trabalharemos só sobre a semirecta $[-3,+\infty[$.



Região I: $]-\infty,1] \cap [-3,+\infty[= [-3,1]$

$$\begin{aligned} |x-1|+|x-5| &\leq x+3 \\ -x+1+-x+5 &\leq x+3 \\ 3 &\leq 3x \\ 1 &\leq x \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{CS_I} = [1,+\infty[\, \cap [-3,1] = \{1\}.$$

Região II: $]1,5] \cap [-3,+\infty[=]1,5]$

$$\begin{aligned} |x-1|+|x-5| &\leq x+3 \\ x-1+-x+5 &\leq x+3 \\ 1 &\leq x \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{CS_{II}} = [1,+\infty[\, \cap \,]1,5] =]1,5].$$

Região III: $]5,+\infty[\cap[-3,+\infty[=]5,+\infty[$

$$\begin{aligned} |x-1|+|x-5| &\leq x+3 \\ x-1+x-5 &\leq x+3 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{CS_{III}} =]-\infty,9] \cap]5,+\infty[=]5,9]. \\ x &\leq 9 \end{aligned}$$

Logo, o conjunto solução final $\mathbf{CS_F}$ da inequação (3) é

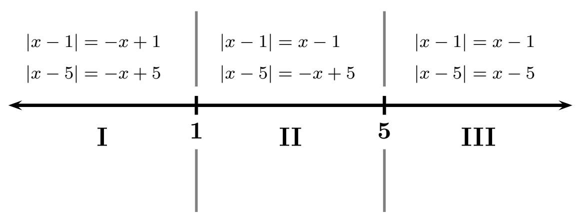
$$\mathbf{CS_F} \;=\; \mathbf{CS_I} \cup \mathbf{CS_{II}} \cup \mathbf{CS_{III}} \;=\; \{1\}\cup]1,5]\cup]5,9] \;=\; [1,9].$$

$\therefore \boxed{\mathbf{CS_F} \;=\; [1,9]}.$

4) Resolver, em $\mathbb{R}$, a seguinte inequação

$$|x-1|-|x-5| \leq x+3. \tag{4}$$

Resolução.



Região I: $]-\infty,1]$

$$\begin{aligned} |x-1|-|x-5| &\leq x+3 \\ -x+1-(-x+5) &\leq x+3 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{CS_I} = [-7,+\infty[\cap]-\infty,1] = [-7,1]. \\ -7 &\leq x \end{aligned}$$

Região II: $]1,5]$

$$\begin{aligned} |x-1|-|x-5| &\leq x+3 \\ x-1-(-x+5) &\leq x+3 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{CS_{II}} =]-\infty,9] \cap]1,5] =]1,5]. \\ x &\leq 9 \end{aligned}$$

Região III: $]5,+\infty[$

$$\begin{aligned} |x-1|-|x-5| &\leq x+3 \\ x-1-(x-5) &\leq x+3 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{CS_{III}} = [1,+\infty[\cap]5,+\infty[=]5,+\infty[. \\ 1 &\leq x \end{aligned}$$

Logo, o conjunto solução final $\mathbf{CS_F}$ da inequação (4) é

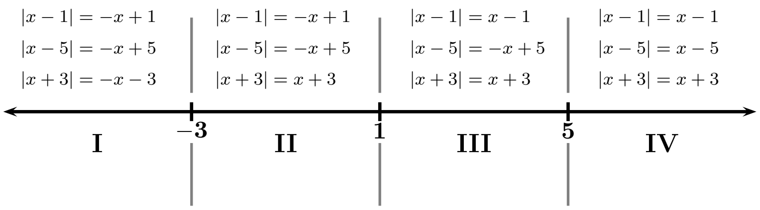
$$\mathbf{CS_F} \;=\; \mathbf{CS_I} \cup \mathbf{CS_{II}} \cup \mathbf{CS_{III}} \;=\; [-7,1]\cup]1,5]\cup]5,+\infty[\;=\; [-7,+\infty[.$$

$\therefore \boxed{\mathbf{CS_F} \;=\; [-7,+\infty[}.$

5) Resolver, em $\mathbb{R}$, a seguinte inequação

$$|x-1|+|x-5|\leq |x+3|. \tag{5}$$

Resolução.



Região I: $]-\infty,-3]$

$$\begin{array}{rcl} |x-1|+|x-5| & \leq & |x+3| \\ -x+1+-x+5 & \leq & -x-3 \\ 9 & \leq & x \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{CS_I}=[9,+\infty[\,\cap\,]-\infty,-3]=\emptyset.$$

Região II: $]-3,1]$

$$\begin{array}{rcl} |x-1|+|x-5| & \leq & |x+3| \\ -x+1+-x+5 & \leq & x+3 \\ 3 & \leq & 3x \\ 1 & \leq & x \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{CS_{II}}=[1,+\infty[\,\cap\,]-3,1]=\{1\}.$$

Região III: $]1,5]$

$$\begin{array}{rcl} |x-1|+|x-5| & \leq & |x+3| \\ x-1+-x+5 & \leq & x+3 \\ 1 & \leq & x \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{CS_{III}}=[1,+\infty[\,\cap\,]1,5]=]1,5].$$

Região IV: $]5,+\infty[$

$$\begin{array}{rcl} |x-1|+|x-5| & \leq & |x+3| \\ x-1+x-5 & \leq & x+3 \\ x & \leq & 9 \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{CS_{IV}}=[-\infty,9]\cap\,]5,+\infty]=]5,9].$$

Logo, o conjunto solução final $\mathbf{CS_F}$ da inequação (5) é

$$\mathbf{CS_F} \;=\; \mathbf{CS_I}\cup\mathbf{CS_{II}}\cup\mathbf{CS_{III}}\cup\mathbf{CS_{IV}} \;=\; \emptyset\,\cup\,\{1\}\cup]1,5]\cup]5,9] \;=\; [1,9].$$

$\therefore \boxed{\mathbf{CS_F}\;=\;[1,9]}.$