Faculdade de Ciências da
Universidade de Lisboa
Departamento de Matemática

Miscelânea

Produto Cartesiano de dois conjuntos, Relações e Funções

Sejam A e B dois conjuntos e sejam $a \in A$ e $b \in B$. O conjunto $\{a, \{a, b\}\}$ chama-se **par ordenado** e designa-se por (a, b). Os elementos a e b são as **componentes** do par ordenado (a, b). A propriedade fundamental dos pares ordenados é a equivalência

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 = a_2 \quad \text{e} \quad b_1 = b_2.$$

Definição 1. O **produto cartesiano** de A e B, é o conjunto formado por todos os pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$, e designa-se por $A \times B$

$$A \times B = \Big\{ (a, b) \ : \ a \in A \ , \ b \in B \Big\} \ .$$

Exemplo 1. Sejam $A = \{\star, \bullet\}$ e $B = \{/, \backslash, |\}$. Então

$$A \times B = \Big\{ (\star, /), (\star, \backslash), (\star, |), (\bullet, /), (\bullet, \backslash), (\bullet, |) \Big\} \ .$$

Exemplo 2. Sejam $A = \mathbb{Z} = B$. Então

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \Big\{ (m, n) \ : \ m \in \mathbb{Z} \ , \ n \in \mathbb{Z} \Big\} \ .$$

Podemos representar o produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ usando eixos coordenados como na **Figura 1**.

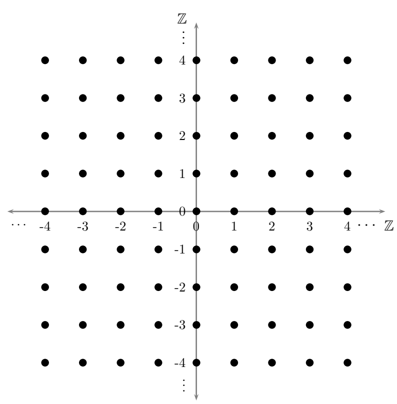

Figura 1: Produto Cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Definição 2. Uma **relação** $\mathscr{R}$ entre A e B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$,

$$\mathscr{R} = \Big\{ (a, b) \in A \times B \ : \ P(a, b) \Big\} \ ,$$

onde P é uma propriedade que determina quais são os elementos de $\mathscr{R}$. Neste contexto chamaremos **conjunto de partida** ao conjunto A e **conjunto de chegada** ao conjunto B.

Exemplo 3. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer e sejam P_1 a propriedade "$a \in A$ e $b \in B$" e P_2 a propriedade "$a \notin A$ ou $b \notin B$". Então as relações $\mathscr{R}_1$ e $\mathscr{R}_2$ entre A e B definidas pelas propriedades P_1 e P_2 respectivamente são

$$\mathscr{R}_1 = \Big\{(a,b) \in A \times B \ : \ P_1(a,b)\Big\} = \Big\{(a,b) \in A \times B \ : \ a \in A \text{ e } b \in B\Big\} = A \times B \ ,$$

$$\mathscr{R}_2 = \Big\{(a,b) \in A \times B \ : \ P_2(a,b)\Big\} = \Big\{(a,b) \in A \times B \ : \ a \notin A \text{ ou } b \notin B\Big\} = \emptyset \ .$$

As relações $\mathscr{R}_1$ e $\mathscr{R}_2$ são chamadas triviais.

Exemplo 4. Sejam $A = B = \mathbb{Z}$ e seja P_3 a propriedade "$a \in \mathbb{N}$". A relação

$$\mathscr{R}_3 = \Big\{(a,b) \in A \times B \ : \ P_3(a,b)\} = \Big\{(a,b) \in A \times B \ : \ a \in \mathbb{N}\Big\} = \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \ ,$$

é representada pelos pontos em vermelho na **Figura 2**.

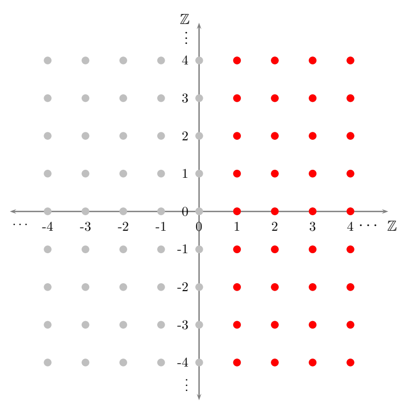

Figura 2: Relação $\mathscr{R}_3 = \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

Uma outra representação prática de uma relação entre A e B (sobretudo quando A e B são conjuntos finitos) obtem-se usando diagramas de Venn

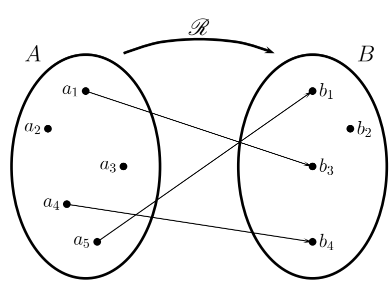

Figura 3: Representação de uma relação usando Diagramas de Venn.

Definição 3. Dada uma relação $\mathscr{R}$ entre A e B, chamamos **domínio** de $\mathscr{R}$ (que designamos por Dom $\mathscr{R}$) ao conjunto das primeiras componentes dos pares ordenados que pertencem a $\mathscr{R}$,

$$\text{Dom } \mathscr{R} = \Big\{a \in A \ : \ (a,b) \in \mathscr{R}\Big\} \ .$$

Similarmente, chamamos **imagem** ou **rango** de $\mathscr{R}$ (que designamos por Im $\mathscr{R}$ ou Ran $\mathscr{R}$) ao conjunto das segundas componentes dos pares ordenados que pertencem a $\mathscr{R}$,

$$\text{Im } \mathscr{R} = \text{Ran } \mathscr{R} = \Big\{ b \in B \ : \ (a,b) \in \mathscr{R} \Big\} .$$

Na **Figura 3** temos que Dom $\mathscr{R} = \{a_1, a_4, a_5\} \subset A$ e Ran $\mathscr{R} = \{b_1, b_3, b_4\} \subset B$.

Definição 4. Dada uma relação $\mathscr{R}$ entre A e B, chamamos **gráfica** de $\mathscr{R}$, que denotaremos por Gr $\mathscr{R}$, ao conjunto de pares ordenados que pertencem a $\mathscr{R}$,

$$\text{Gr } \mathscr{R} = \Big\{ (a,b) \in A \times B \ : \ (a,b) \in \mathscr{R} \Big\} .$$

Observe-se que, conforme a Definição 2, Gr $\mathscr{R} = \mathscr{R}$.

Definição 5. Uma **função** $\mathscr{F}$ entre A e B **é uma relação especial** onde para cada elemento do seu domínio Dom $\mathscr{F}$ associa-se um único elemento do conjunto de chegada B. Esta **propriedade caracterizante** de qualquer função escreve-se da seguinte forma:

$$\forall \ (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathscr{F} : a_1 = a_2 \implies b_1 = b_2 \ . \tag{1}$$

Exemplo 5. Sejam $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. A relação $\mathscr{R}_1$ representada na **Figura 4** não é função porque para $a_1 \in$ Dom $\mathscr{R}_1$ existem $b_2, b_3 \in B$ diferentes tais que $(a_1, b_2), (a_1, b_3) \in \mathscr{R}_1$. Por outra parte, a relação $\mathscr{R}_2$ representada na **Figura 5** sim é função porque a cada elemento do Dom $\mathscr{R}_2$ corresponde-lhe um único elemento em B.

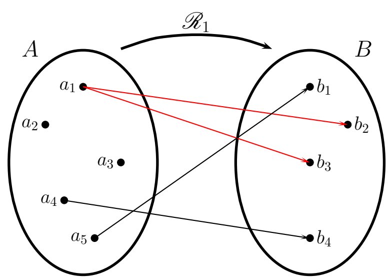

Figura 4: $\mathscr{R}_1$ não é função

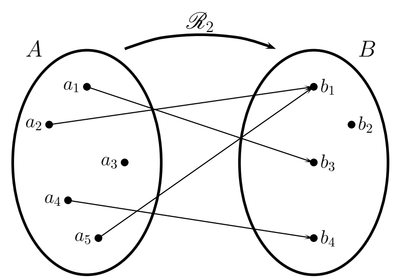

Figura 5: $\mathscr{R}_2$ é função

Devido a (1) escrevemos $b = \mathscr{F}(a)$ em lugar de $(a,b) \in \mathscr{F}$ e diremos que b **é imagem do argumento** a **pela função** $\mathscr{F}$. Assim, podemos escrever também

$$\begin{aligned}
\text{Dom } \mathscr{F} &= \Big\{ a \in A \ : \ b = \mathscr{F}(a), \ \text{para um } \textbf{único } b \in B \Big\} , \\
\text{Im } \mathscr{F} &= \Big\{ b \in B \ : \ b = \mathscr{F}(a), \ \text{para } \textbf{algum } a \in A \Big\} \ \text{e} \\
\text{Gr } \mathscr{F} &= \Big\{ (a,b) \in A \times B \ : \ b = \mathscr{F}(a) \Big\} .
\end{aligned}$$

Quando Dom $\mathscr{F} = A$, o conjunto de chegada B chama-se também **contradomínio**.

Atenção: Note-se que, conforme a Definição 3, o contradomínio e a imagem de uma função podem não serem iguais, pois mesmo que Dom $\mathscr{F} = A$ nem sempre temos que Im $\mathscr{F}$ seja igual a B (ver **Figura 6**).

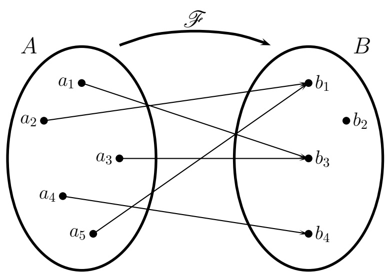

Figura 6: Dom $\mathscr{F} = A$ e Im $\mathscr{F} \neq B$

Notação: Daqui em diante usaremos letras minúsculas $f, g, h, \ldots$ ou indexadas $f_1, f_2, \ldots$ para designar funções e escreveremos por exemplo $f\colon X \to Y$ para significar a função f entre X e Y.

O tipo de funções que estudaremos são aquelas em que tanto o conjunto de partida como o conjunto de chegada são iguais ao conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Diremos então que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma **função real de variável real** e referiremos ainda a fórmula $y = f(x)$ como a lei que permite associar a cada elemento x do domínio da função um único elemento do conjunto de chegada. Costuma-se usar também a notação $x \mapsto y = f(x)$. Quando $X = Y = \mathbb{R}$, a gráfica de uma função pode ser representada por meio de uma curva no plano.

Teste da recta vertical (para determinar quando uma relação é função)**.** Seja $\mathscr{R}$ uma relação entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$. Se qualquer recta vertical que intersecte a gráfica de $\mathscr{R}$ corta-a só num ponto, então $\mathscr{R}$ é uma função (nisto consiste a propriedade (1)). Ver **Figuras 7** e **8**.

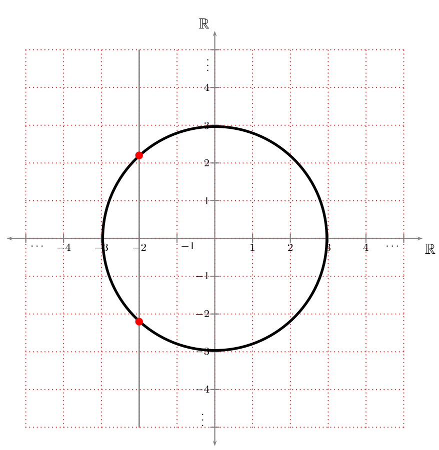

Figura 7: Relação $x^2 + y^2 = 9$

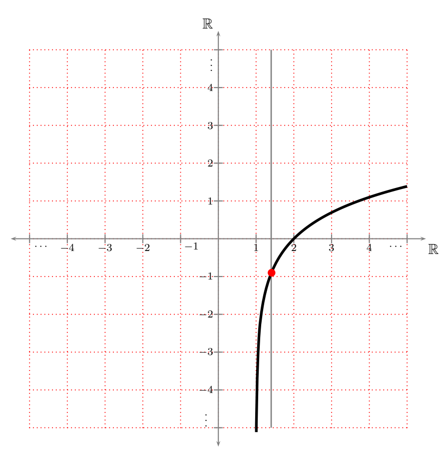

Figura 8: Função $y = \ln(x - 1)$

Exemplo 6. Sejam $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções tais que $f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{x}$. Digamos que a priori sabemos que Dom $f_1 = \mathbb{N}$ (portanto f_1 é uma sucessão), enquanto Dom f_2 é determinado a posteriori. Para determinar Dom f_2 perguntamo-nos pelos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a expressão $\frac{1}{x}$ faz sentido. Vê-se imediatamente que para todo $x \in \mathbb{R}$ excepto $x = 0$ a expressão $\frac{1}{x}$ é um número real (ou seja, faz sentido). Logo, segue-se que Dom $f_2 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. As gráficas de f_1 e f_2 são dadas na **Figura 9** e **Figura 10** respectivamente.

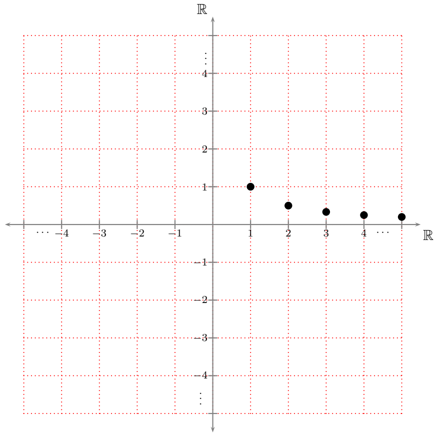

Figura 9: Dom $f_1 = \mathbb{N}$

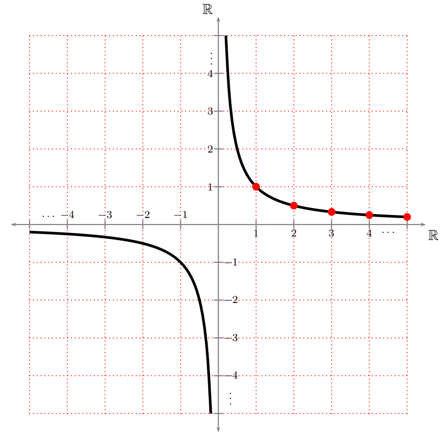

Figura 10: Dom $f_2 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Geométricamente, o domínio de uma função pode ser identificado pela projecção ortogonal do gráfico da função sobre o eixo das abcissas (eixo horizontal). Similarmente, a imagem de uma função pode ser identificada pela projecção ortogonal do gráfico da função sobre o eixo das ordenadas (eixo vertical). Assim, no exemplo anterior, Im $f_1 = \left\{\frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}$ e Im $f_2 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definição 6. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Dizemos que $c \in$ Dom f é um **zero de** f se $f(c) = 0$. Gráficamente, os zeros de f correspondem as intersecções $(c, 0)$ da gráfica Gr f de f com o eixo das abcissas.

Exemplo 7. Os zeros da função $f(x) = x^3 - x$ são -1, 0 e 1, e estão em correspondência com os pontos $(-1, 0)$, $(0, 0)$ e $(1, 0)$ (ver **Figura 11**), enquanto a função $f(x) = \frac{1}{x}$ representada na **Figura 10** não tem zeros.

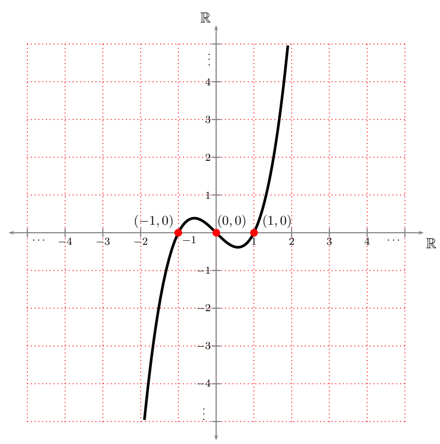

Figura 11: $f(x) = x^3 - x$

Classificação de funções. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real.

Definição 7 (Função Injectiva). Dizemos que f é **injectiva** se cada elemento da $\operatorname{Im} f$ é imagem de um único elemento do $\operatorname{Dom} f$. Em símbolos,

$$\forall\, x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f:\; x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) \quad\Longleftrightarrow\quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2\,. \tag{2}$$

Teste da recta horizontal (para reconhecer quando f é injectiva)**.** Se qualquer recta horizontal que intersecte a gráfica de f corta-a só num ponto, então f é injectiva (ver **Figuras 12** e **13**).

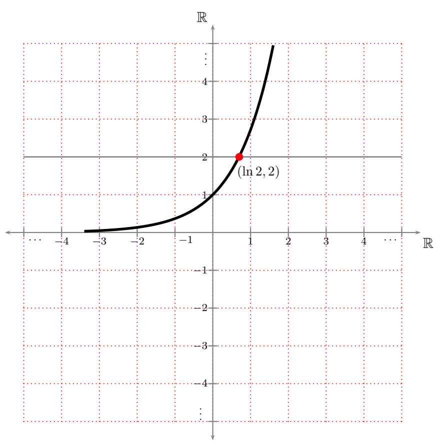

Figura 12: $f(x) = e^x$ é injectiva

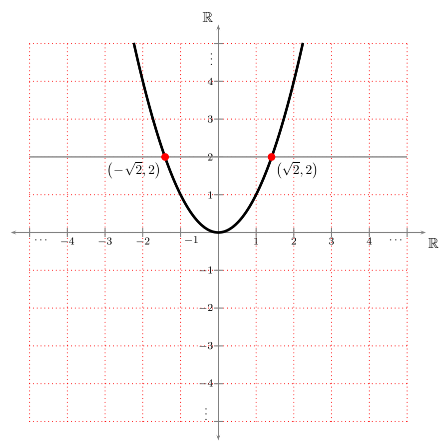

Figura 13: $f(x) = x^2$ não é injectiva

Definição 8 (Função Sobrejectiva). Dizemos que f é **sobrejectiva** se $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$. Em símbolos,

$$\forall\, y \in \mathbb{R} \;\; \exists\, x \in \operatorname{Dom} f:\; y = f(x)\,. \tag{3}$$

Definição 9 (Função Bijectiva). Dizemos que f é **bijectiva** se é injectiva e sobrejectiva.

Assim, temos por exemplo que a função $f(x) = \ln(x-1)$ na Figura 8 é injectiva e sobrejectiva (portanto é bijectiva), a função $f(x) = \frac{1}{x}$ na Figura 10 é injectiva mas não é sobrejectiva (pois $\operatorname{Im} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$), a função $f(x) = x^3 - x$ na Figura 11 não é injectiva mas é sobrejectiva, a função $f(x) = e^x$ na Figura 12 é injectiva mas não é sobrejectiva (uma vez que $\operatorname{Im} f =]0, +\infty[$), e finalmente, a função $f(x) = x^2$ na Figura 13 não é injectiva nem sobrejectiva ($\operatorname{Im} f = [0, +\infty[$).

Exercício. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x + 3}}$$

Determine o domínio, a imagem e os zeros da função. Esboçe a gráfica de f e diga se f é injectiva e/ou sobrejectiva.

Resolução: Sabemos que

$$\text{Dom } f = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ \sqrt{\tfrac{x^2-1}{x+3}} \ \text{ faz sentido} \right\}$$

A expressão $\sqrt{\frac{x^2-1}{x+3}}$ faz sentido (i.e. $\sqrt{\frac{x^2-1}{x+3}}$ é um número real) quando $\frac{x^2-1}{x+3} \geq 0$ (uma vez que não existe raiz quadrada de números negativos).

Ao resolver a inequação

$$\frac{x^2-1}{x+3} \geq 0 \iff \frac{(x-1)(x+1)}{(x+3)} \geq 0$$

encontramos que o conjunto solução é $]-3,-1] \cup [1,+\infty[$. Ver **Figura 14**.

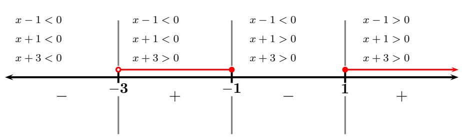

Figura 14: Conjunto solução da ineq. $\frac{x^2-1}{x+3} \geq 0$

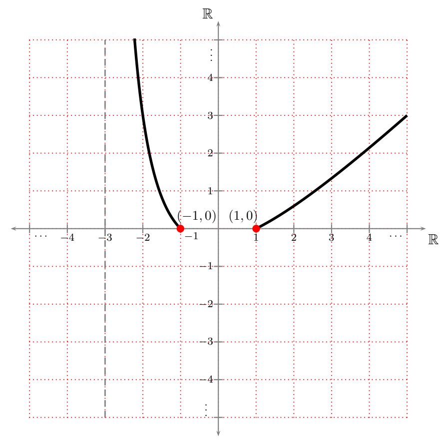

Figura 15: Gráfica de $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x+3}}$

Logo, Dom f $=]-3,-1] \cup [1,+\infty[$ e $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x+3}} \geq 0$; portanto, Im $f = [0,+\infty[$ e em consequência, f não é sobrejectiva. Para encontrar os zeros de f resolvemos a equação $f(x) = 0$, isto é

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x+3}} = 0 \iff \frac{x^2-1}{x+3} = 0 \iff x^2-1=0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1.$$

Podemos também tabular alguns pontos e esboçãr a gráfica de f como na **Figura 15**. Da gráfica de f conclui-se que f não é injectiva. Note-se ainda que a recta $x=-3$ é uma assimptota vertical de f.