Miscelânea

Lógica Matemática, Princípio de Indução e Somatórios

O Princípio de Contradição

Seja p uma proposição arbitrária e C uma **contradição** (uma proposição que é sempre **falsa**). A Tabela 1 mostra que a implicação $(\neg p \rightarrow C) \rightarrow p$ é uma **tautologia** (uma proposição que é sempre **verdadeira**). Isto leva-nos à seguinte regra de inferência: se $\neg p$ conduz-nos a uma contradição então p é que tem de ser verdadeira.

p	$\neg p$	C	$\neg p \rightarrow C$	$(\neg p \rightarrow C) \rightarrow p$
V	F	F	V	V
F	V	F	F	V

Tabela 1

Como usar este princípio. (Método da prova por contradição)

Exemplo 1. *Seja $x \in \mathbb{R}$. Provar que*

$$\forall \varepsilon > 0 : |x| < \varepsilon \rightarrow x = 0$$

Demonstração. Suponhamos que

$$\forall \varepsilon > 0 : |x| < \varepsilon \quad \wedge \quad x \neq 0.$$

Visto que $x \neq 0$, sabemos com certeza que $|x| > 0$ e portanto, para $\varepsilon = |x| > 0$, dado que $|x| < \varepsilon$, segue-se que $|x| < |x|$. Isto é claramente uma contradição. Logo, podemos concluir sem dúvida nenhuma que, devido precisamente ao princípio de contradição, a afirmativa $x = 0$ é verdadeira.

O Princípio de Indução Matemática

Sejam P uma propriedade dos números reais e S o conjunto de números naturais que satisfazem a propriedade P ,

$$S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ é verdadeira}\}.$$

Uma versão simples do Princípio de Indução Matemática consiste no seguinte:

1. Mostrar que $P(1)$ é verdadeiro; isto significa que $1 \in S$.
2. (**Hipótese indutiva**) Assumir que todos os números naturais de 1 até n satisfazem a propriedade P ; isto significa que para todo $1 \leq j \leq n$ cumpre-se que $j \in S$.
3. Provar que a propriedade P é ainda satisfeita por $n + 1$; isto significa que $n + 1 \in S$.

Se se verificarem (1), (2) e (3) então pode-se concluir que $S = \mathbb{N}$.

Exemplo 2. Provar que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais pode ser calculada a partir da seguinte fórmula:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Demonstração. Neste caso a propriedade $P(x)$ é

$$\sum_{i=1}^x i^2 = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6},$$

e o conjunto S é composto por todos aqueles $n \in \mathbb{N}$ que satisfazem dita propriedade. Usemos indução matemática para provar que $S = \mathbb{N}$.

- $1 \in S$. Efectivamente temos que $1^2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}$.
- **Assumamos que para todo número natural $1 \leq j \leq n$ cumpre-se que $j \in S$.**
- **Provemos que também $n+1 \in S$.**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)}{6} (n(2n+1) + 6(n+1)) \\ &= \frac{(n+1)}{6} (2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

Portanto $S = \mathbb{N}$.

Exercício. Provar que

$$\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Atenção: Um algoritmo interessante para encontrar a soma das k -ésimas potências dos n primeiros números naturais é apresentado [aqui](#). O artigo está em inglês mas é muito fácil de ler.

Somatórios. (A propriedade telescópica)

$$\sum_{i=1}^n a_i - a_{i+1} = a_1 - \cancel{a_2} + \cancel{a_2} - \cancel{a_3} + \dots + \cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_n} + \cancel{a_n} - a_{n+1} = a_1 - a_{n+1}$$