Faculdade de Ciências da
Universidade de Lisboa
Departamento de Matemática

Miscelânea

Resolução de inequações (método dos valores críticos)

Suponhamos que queremos resolver, em $\mathbb{R}$, a seguinte inequação:

$$(x+1)(x-2) > 0.$$

1. *(Simplificar.) Escrever a expressão polinomial (racional) da inequação como produto de factores lineares e/ou quadráticos indecomponíveis, deixando o* 0 *sozinho à direita da relação de ordem com que se esteja a trabalhar.*

A expressão polinomial de acima está já escrita como produto de factores lineares e o 0 à direita da relação $>$.

2. *(Valores críticos.) Identificar os 'valores críticos' da expressão polinomial (racional). Estes valores são aqueles que anulam ou causam indeterminação à expressão polinomial (racional). Eles dividem a recta real num número de regiões igual ao número de valores críticos + 1.*

Para a inequação que queremos resolver, os valores críticos são claramente -1 e 2, e as regiões em que a recta real fica dividida são as três seguintes: $]-\infty,-1[$, $]-1,2[$ e $]2,+\infty[$.

3. *(Análise de sinais.) Escolher um 'representante' por região e substituí-los na expressão racional (já factorizada). Reter só o sinal. Se a expressão racional estiver escrita como produto só de factores lineares, então é suficiente fazer a análise de sinais só numa região. Os sinais nas outras regiões vão alternar-se. Caso contrário, deve proceder-se à análise de sinais para cada região.*

Note-se que todos os factores no lado esquerdo da inequação acima são lineares. Portanto, escolhemos (arbitrariamente) a região $]-1,2[$ e tomamos como representante $0 \in]-1,2[$. Substituindo em $(x+1)(x-2)$, concluimos que o sinal, neste caso, é $-$. O sinal na região $]-\infty,-1[$ é, portanto, $+$ e na região $]2,+\infty[$ é também $+$.

4. *(Conjunto solução.) Considerar o tipo de relação da inequação. Se a relação for* $>$*, ficar com aquelas regiões que tiverem sinal* $+$*; se a relação for* $<$*, ficar com aquelas regiões que tiverem sinal* $-$*. Se a relação for* $\geq$ *ou* $\leq$*, então no conjunto solução da inequação dada, deve incluir-se aqueles valores críticos que satisfazem a inequação.*

A relação de ordem da inequação a considerar é $>$. Logo o conjunto solução da inequação dada é

$$\mathbf{C.S.} =]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[.$$

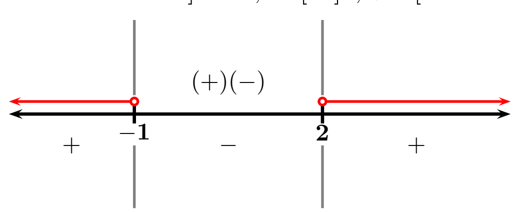
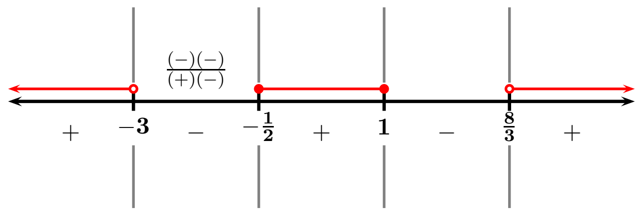


Figura 1: Resumo gráfico do método

Resolver, em $\mathbb{R}$, as inequações seguintes:

a) $\dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x+3)(3x-8)} \geq 0.$

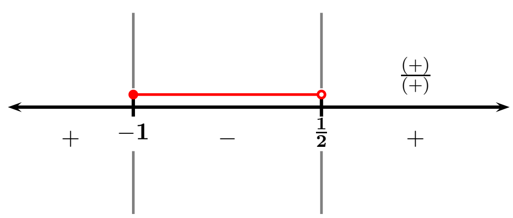


$$\textbf{C.S.} =]-\infty, -3[\cup [-\tfrac{1}{2}, 1] \cup]\tfrac{8}{3} + \infty[.$$

b) $\dfrac{(x^2+4x+5)(x+1)}{2x-1} \leq 0.$

Note-se que $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto fazer a análise de sinais da expressão racional na inequação em (b) é equivalente a fazer a análise de sinais para a inequação

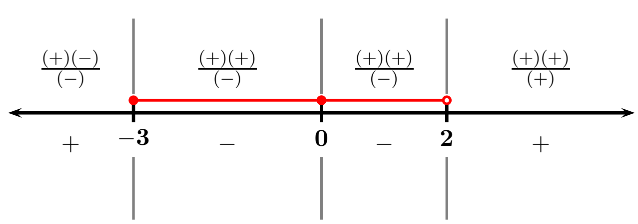
$$\frac{x+1}{2x-1} \leq 0$$



$$\textbf{C.S.} = [-1, \tfrac{1}{2}[.$$

c) $\dfrac{x^2(x+3)}{x-2} \leq 0.$

Note-se que há um factor quadrático. Temos de fazer então a análise de sinais para cada região. Podemos verificar que neste caso os sinais já não são alternados.



$$\textbf{C.S.} = [-3, 2[.$$