Processamento de Sinal (DF-FCUL)

Outubro de 2014

Introdução à Análise Espectral e Modulação (V1.0)

A teoria de Fourier permite estudar sinais contínuos e discretos no domínio da frequência. A informação que se retira desta análise é saber em que intervalos de frequência (ou bandas) se concentra a energia do sinal. Isto permite-nos processar o sinal na frequência, efectuando operações difíceis ou impossíveis de realizar no tempo.

A família das transformadas de Fourier é mais adequada ao estudo dos espectros dos sinais do que as transformadas de Laplace e Z, que são "talhadas" para obter a solução "global" de sistemas descritos por equações diferenciais ou às diferenças.

Vai ser focado "o espectro" de vários sinais discretos (que podem eventualmente ser sinais contínuos amostrados), recorrendo-se à DFT ("Discrete Fourier Transform"). A DFT é calculada por uma família de algoritmos denominados FFTs ("Fast Fourier Transforms"), muito eficientes, principalmente quando o número de pontos no eixo do tempo, N, é uma potência de dois. Pode considerar que a DFT corresponde aproximadamente à série de Fourier quando os sinais analisados são periódicos. A Teoria de Fourier vai ser estudada em detalhe nas aulas teóricas, sendo focadas em particular a DFT e a FFT.

Objectivos da aula prática

Nesta aula pretende-se familiarizar os alunos com o conceito de espectro de um sinal, ou seja, com a sua representação na frequência, e apresentar-lhes algumas técnicas de processamento. Adicionalmente será apresentada e estudada a modulação de sinais, uma **operação não linear**.

Já sabe que os detalhes sobre os comandos do Scilab utilizados no trabalho deverão ser procurados no "Help".

Anexo a este documento vai um ficheiro comprimido contendo algumas sequências em formatos `.wav` e `.dat`.

O espectro

O espectro de um sinal é dado pelos coeficientes da sua representação de Fourier. Na maioria das vezes interessa-nos a amplitude[1] desses coeficientes. Se o sinal for periódico, a representação é por uma série de Fourier (SF): se for aperiódico, é representado por uma transformada de Fourier (TF). A nomenclatura das várias "transformadas" e "séries" encontradas no processamento digital de sinais é confusa (DTFT, DFS, DFT, FFT, STFT, etc...) embora existam relações estreitas entre algumas elas. No contexto deste trabalho interessa-nos particularmente a DFT ("Discrete Fourier Transform") e, por isso, é sobre ela que nos debruçamos.

[1] Ou, então, o quadrado dessas amplitudes.

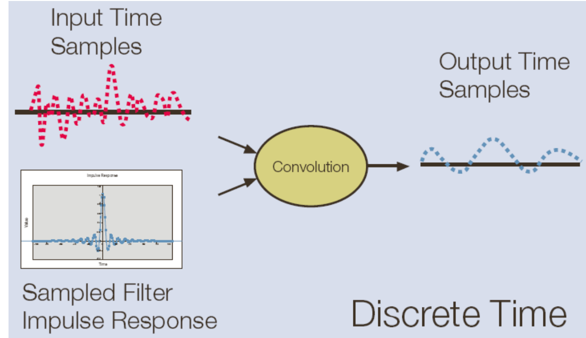

Figura 1: Filtragem no domínio do tempo, fazendo-se a convolução de $x[n]$ com $h[n]$ para calcular a saída $y[n]$.

Seja então uma sequência $x[n]$ discreta e finita, com N pontos, existindo para $n = 0, 1, \ldots N-1$. A DFT desta sequência é o somatório

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{nk} \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

onde $W_N = e^{-j2\pi/N}$ é o inverso (ou o conjugado[2]) da N-ésima raiz primitiva da unidade. A síntese do sinal $x[n]$, efectuada a partir de $X[k]$, é denominada IDFT (i.e., é a DFT Inversa) e consiste em

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, W_N^{-nk} \qquad n = 0, 1, \cdots, N-1$$

É visível a simetria entre as expressões de $X[k]$ e de $x[n]$, o que significa que a FFT, o algoritmo eficiente de cálculo da DFT, é usada também para calcular a IDFT. Ambas as sequências, $X[k]$ e $x[n]$, podem ser complexas.

Das expressões, retira-se que o cálculo de cada ponto de $X[k]$ ou de $x[n]$ exige aproximadamente N somas e N multiplicações (complexas), ou seja, um total na ordem de $2N$ *flops* ("floating-point operations"). Como há N pontos para calcular em cada caso, conclui-se que, aparentemente, no cálculo da totalidade das sequências $\{X[k]\}$, na DFT, ou $\{x[n]\}$, na DFTI, estão envolvidas $\sim N^2$ flops (i.e., a complexidade é da ordem de N^2).

A FFT é um algoritmo que explora a periodicidade de W_N^{nk} para calcular a sequência $\{X[k]\}$ usando apenas $\sim N \log_2 N$ flops, o que representa uma economia sensacional face aos anteriores N^2. Por exemplo, se $N = 1024$, então $N^2 \approx 10^6$ e $N \log_2 N \approx 10^4$, o que corresponde a uma economia de 99%. O algoritmo subjacente à FFT será estudado nas aulas.

A utilidade da DFT no processamento digital de sinal é ilustrada com a ajuda das figs. 1 e 2.

[2] Consoante os textos, define-se $W_N = e^{-j2\pi/N}$ ou, então, com o expoente simétrico, isto é, $W_N = e^{j2\pi/N}$. De facto, os sinais nos expoentes da DFT e da IDFT têm de ser simétricos mas, quanto ao resto, na definição da DFT até mesmo a colocação do factor $1/N$ na DFT ou na IDFT, é algo arbitrário. Aqui usa-se a notação mais comum na literatura.

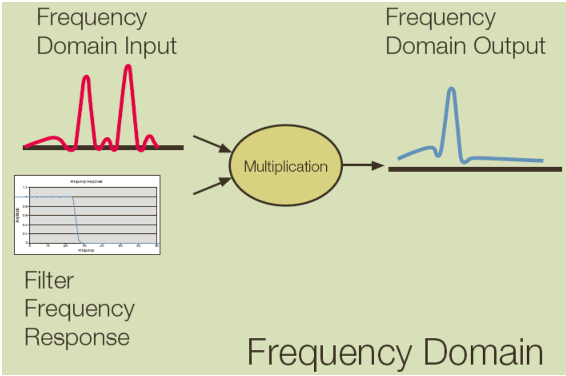

Figura 2: Ilustração da filtragem no domínio da frequência, usando-se o produto de $X[k]$ com $H[k]$ para calcular a DFT da saída, $Y[k]$.

Na primeira delas (fig. 1) é usado o domínio do tempo para calcular a resposta de um SLIT discreto (mais concretamente, um filtro) fazendo a convolução da sequência de entrada com a resposta impulsiva do filtro.

Por outro lado, na fig. 2 mostra-se como a DFT da saída do filtro é obtida pelo produto das DFTs $X[k]$ e $H[k]$. A relação entre as representações no tempo e na frequência do sinal assenta na DFT (ou na IDFT). Finalmente, assinala-se que o tipo de convolução (no tempo) associado ao produto das DFTs (na frequência) é a **convolução circular dos sinais**. Esta matéria será discutida nas aulas.

Comandos Scilab para análise espectral

Para criar vectores de tempo pode usar `soundsec()` ou então a sintaxe alternativa `t=T:T:tmax`, onde `T` é o período de amostragem e `tmax` é a duração do sinal. Irá aprender a carregar sinais a partir de ficheiros de dados.

O Scilab apresenta um conjunto de comandos relacionados com a análise de Fourier. Os sinais discretos habitualmente são gerados pela amostragem de sinais contínuos. Vamos, em geral, criar sinais cuja dimensão é uma potência de dois: 512, 1024, 2048, etc..., pois assim a FFT trabalhará com dimensões onde a eficiência é maior. Quando a dimensão do vector não é uma potência de dois, é feito automaticamente no Scilab o "padding" (enchimento com zeros, até a dimensão ser uma potência de dois) antes de aplicar a FFT. Os comandos apropriados para a análise de Fourier são `fft()` e `ifft()`. Para desenhar o espectro, use `plot(abs(fft(...))`, que mostra no gráfico a amplitude dos coeficientes. Crie um pequeno vector (ou sequência), calcule a sua FFT e calcule a IFFT desta transformada, verificando que recupera o vector original (i.e., a FFT e a IFFT são funções inversas). Note que as DFTs ou FFTs são simétricas relativamente ao ponto médio do vector de frequências, bastando por isso desenhar apenas a primeira metade de $X[k]$ (isto deve-se a $x[n]$ ser real).

Espectros de funções comuns e de ruído

Gere um vector com amostras de ruído usando a função `rand()`. Gere também uma sinusóide (por exemplo de 200 Hz), e uma onda quadrada da mesma frequência. Trace os respectivos espectros e critique-os face ao que já aprendeu sobre séries de Fourier. Varie as frequências e as amplitudes e vá observando os espectros. Pode tentar gerar ondas triangulares, rampas, etc...

Relação entre o espectro e o número de amostras

Neste exemplo pretende-se visualizar e comparar vários espectros de um mesmo sinal, amostrado à mesma frequência, mas com durações diferentes. Considere então $f_S = 1024$ Hz e gere sinais de 1, 2 e 4 segundos de duração correspondentes a uma sinusóide de 200 Hz. Compare os respectivos espectros. Comente.

Espectros de sinais reais

Nesta fase do trabalho pretende-se observar espectros de alguns sinais do dia a dia e efectuar processamento básico. Para ler os sinais em formato `.wav` use algo semelhante ao trecho de código abaixo (tem de saber previamente a frequência de amostragem).
Para ler dados em formato de texto (ficheiros `.dat`), guardados como uma lista de números, usa-se `w=read('...path...\ECG3.dat',1,4000)`. Tem de saber-se a frequência de amostragem e a dimensão do vector para processar correctamente o sinal.
Depois de lidos para um vector, pode processar os sinais da forma habitual. Teste alterações em amplitude, em ritmo de amostragem, apague ou reforce determinadas zonas do espectro e vá observando as reconstruções dos sinais no tempo.

```
fs=8000; k=0.5
x=loadwave('...path...\touchtone.wav')
//plot2d(x);
sound(k*x,fs);
analyze(x);
```

Alteração de ritmo, decimação e interpolação

Use um dos sinais audio (e.g., `speech.wav`) e, por fases, diminua `fs` para metade e aumente-a para o dobro (por exemplo). Observe os espectros e ouça os sinais.
No mesmo sinal audio, faça decimação (remova, por exemplo, as amostras ímpares, mantendo as pares e dividindo f_S por dois) e interpolação (a operação inversa da anterior, criando novas amostras entre as originais e duplicando f_S) por um factor de dois (pode tentar factores de interpolação ou decimação maiores do que dois). Observe os espectros e oiça os sinais criados.

Modulação (V1.0)

A DFT ("Discrete Fourier Transform"), calculada pela FFT ("Fast Fourier Transform"), é a ferramenta operacional de que dispomos para efectuar análise de Fourier. Sob certas condições, se amostrarmos um sinal contínuo uniformemente no tempo e assim criarmos uma sequência discreta com N amostras, ao efectuar a DFT desta sequência obtém-se uma aproximação (através de uma sequência de amostras na frequência) do espectro "verdadeiro" do sinal contínuo. Esta matéria já foi aflorada na aula anterior.

Nesta aula vai ser focada a técnica de processamento de sinal denominada **modulação**. Para fazer observações e deduzir conclusões usamos dois métodos: desenhar gráficos dos sinais e das suas DFTs (ou FFTs); ou ouvi-los com a instrução `sound()`. Se as frequências de amostragem e dos sinais satisfizerem com boa margem o limite de Nyquist (i.e., o teorema da amostragem), as operações com sinais discretos são boa aproximação da realidade "contínua".

Objectivos da aula prática

Esta aula pretende familiarizar os alunos com o conceito de modulação e de desmodulação, fundamentais em muitas áreas científicas e de engenharia, mas que assumem particular importância em telecomunicações. Os comandos Scilab necessários a este trabalho já foram introduzidos em aulas anteriores.

Habitualmente a modulação envolve dois sinais: a portadora, cuja frequência irá aqui ser designada por ω_C, e o sinal que contém informação, cuja frequência será ω_m. Em geral $\omega_C \gg \omega_m$, embora neste trabalho de laboratório esta relação possa não ser assim "tão grande", devido às limitações que temos na frequência de amostragem (os sinais deverão ser audíveis e o limite de Nyquist tem de ser observado) e na dimensão dos vectores contendo os sinais (a memória do computador é finita...).

Técnicas de modulação

O produto de sinais como modulação

A forma mais imediata de modulação é a **multiplicação** dos sinais. Seja $x(t) = x_m(t)\, x_C(t)$, e sejam as respectivas transformadas de Fourier $X(\omega)$, $X_m(\omega)$ e $X_C(\omega)$. Aqui, $x_m(t)$ é o sinal modulado (i.e., a informação a transmitir) e $x_C(t)$ é a portadora. A frequência da portadora é em geral muito maior do que a(s) do sinal modulado.

Uma importante propriedade da TdF (e também das transformadas de Laplace e Z) é a que diz respeito à **convolução**:

$$x_m(t) * x_C(t) \leftrightarrow X_m(\omega)\, X_C(\omega)$$

Como consequência da reciprocidade das expressões da TdF e da sua inversa[3], a propriedade recíproca daquela é

$$x_m(t)\, x_C(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_m(\omega) * X_C(\omega) \qquad (1)$$

[3]Que, como se recordará, são $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ e $f(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$.

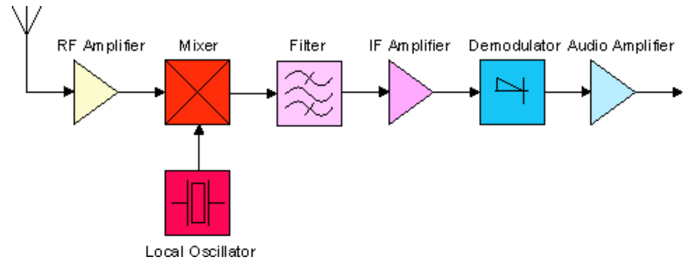

Figura 3: Desmodulação por *heterodinagem* para a frequência IF. O desmodulador mostrado na figura pressupõe o uso de um rectificador com filtro.

e esta convolução na frequência, $\frac{1}{2\pi} X_m(\omega) * X_C(\omega)$, corresponde ao espectro $X(\omega)$.

Esta propriedade indica que a localização da energia do sinal modulado (habitualmente com largura de banda limitada) vai ser transferida para frequências próximas da da portadora. Esta "matemática" é o que permite à informação ser transmitida por canais que não seriam utilizáveis se este processo não tivesse lugar. Um exemplo da modulação pelo produto é dado na fig. 5, onde o sinal corresponde a 20 Hz e a portadora a 160 Hz.

Para desmodular o sinal de uma forma simples, voltamos a multiplicar o sinal modulado, $x(t)$, pela portadora e filtramos (passa-baixo) o resultado, de forma a recuperar apenas a energia no segmento inferior do espectro. Este sinal consistirá (idealmente) duma réplica do sinal original. Este processo denomina-se *heterodinagem* (veja a fig. 3).

Modulação em amplitude (AM)

O sinal modulado em amplitude é descrito por (a modulação AM é uma especialização da multiplicação)

$$x_{AM}(t) = [A + M.\cos \omega_m t]\, \sin \omega_C t$$

Os índices M e A são positivos e em geral, $A > M$ para garantir que a quantidade entre parêntesis se mantém positiva. O *índice de modulação*, ou profundidade de modulação, é dado por

$$m_i = \frac{M}{A}$$

Um índice superior a 100% deverá ser evitado. Na fig. 4 é mostrado um sinal modulado em amplitude com um índice a rondar os 100%. Os valores razoáveis para o índice situam-se entre 50% e 90%. O sinal que contém a informação é $m(t) = M.\cos \omega_m t$ e na prática raramente se consegue prever com exactidão a sua amplitude M de forma a garantir que m_i nunca excede os 100%. Se $m(t)$ for, por exemplo, um sinal áudio correspondente à gravação de uma sinfonia, então os níveis de amplitude, i.e. de M, variarão muito durante a audição.

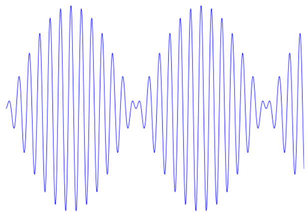

Figura 4: Sinal modulado em amplitude.

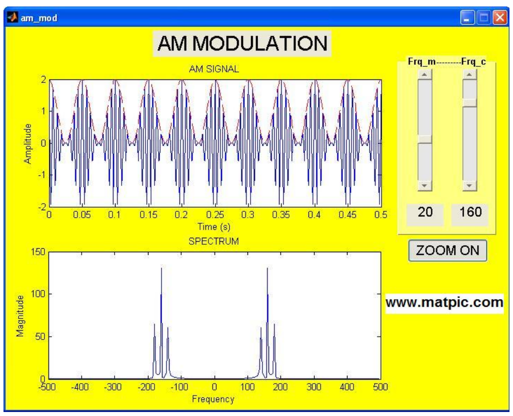

Figura 5: Espectro de um sinal modulado em amplitude.

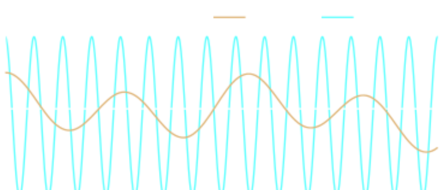

Figura 6: Sinal (a castanho) e portadora (a azul) no exemplo de modulação de frequência.

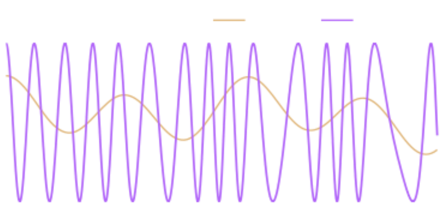

Figura 7: Sinal (a castanho) e sinal modulado em frequência (a lilás).

Modulação em frequência (FM)

Um sinal modulado em frequência é descrito por

$$x_{FM}(t) = A.\cos[\omega_C t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\alpha) d\alpha]$$

Se $m(t) = M.\cos\omega_m t$, teremos

$$\begin{aligned} x_{FM}(t) &= A.\cos[\omega_C t + k_f \int_{-\infty}^{t} M.\cos(\omega_m \alpha)\, d\alpha] \\ &= A.\cos[\omega_C t + \frac{k_f M}{\omega_m}\sin(\omega_m t) + Cte] \end{aligned}$$

O índice k_f é escolhido tendo em conta M, pretendendo-se garantir que o desvio de frequência, relativamente à frequência da portadora, ω_C, se mantém dentro dos limites pretendidos. A modulação FM é utilizada nas transmissões de rádio comerciais, na banda de frequências situada entre os 88 e os 108 MHz. Um exemplo dos vários sinais envolvidos nesta técnica encontra-se nas figs. 6 e 7.

Trabalho prático

Uma vez descritas as técnicas de modulação básicas, propõe-se aos alunos que criem sinais discretos e com eles simulem aquelas técnicas – essencialmente a modulação em amplitude – e observem: os sinais; as suas transformadas de Fourier (via DFT/FFT); e "ouçam" o processamento que vai tendo lugar.
Para um dado valor de f_S, use $f_C \approx f_S/3$, e f_m a rondar os 100 Hz (para ser audível). Tem liberdade de escolher os valores desde que não se afaste muito das sugestões. Interprete os espectros que observa à luz da equação (1). Previlegie a modulação em amplitude, ou aquela que corresponde ao simples produto dos sinais. Implemente e aplique o filtro passa-baixo estudado há duas aulas para fazer a desmodulação por heterodinagem (sem passar por uma frequência intermédia IF) se tiver tempo.

Recursos

Os ficheiros de dados foram retirados do site do livro "Biomedical Signal Analysis" de R. Rangayyan e do site de "Proc. Digital de Sinais" do IST. Estão num ficheiro anexo a este documento.