Modelos Discretos

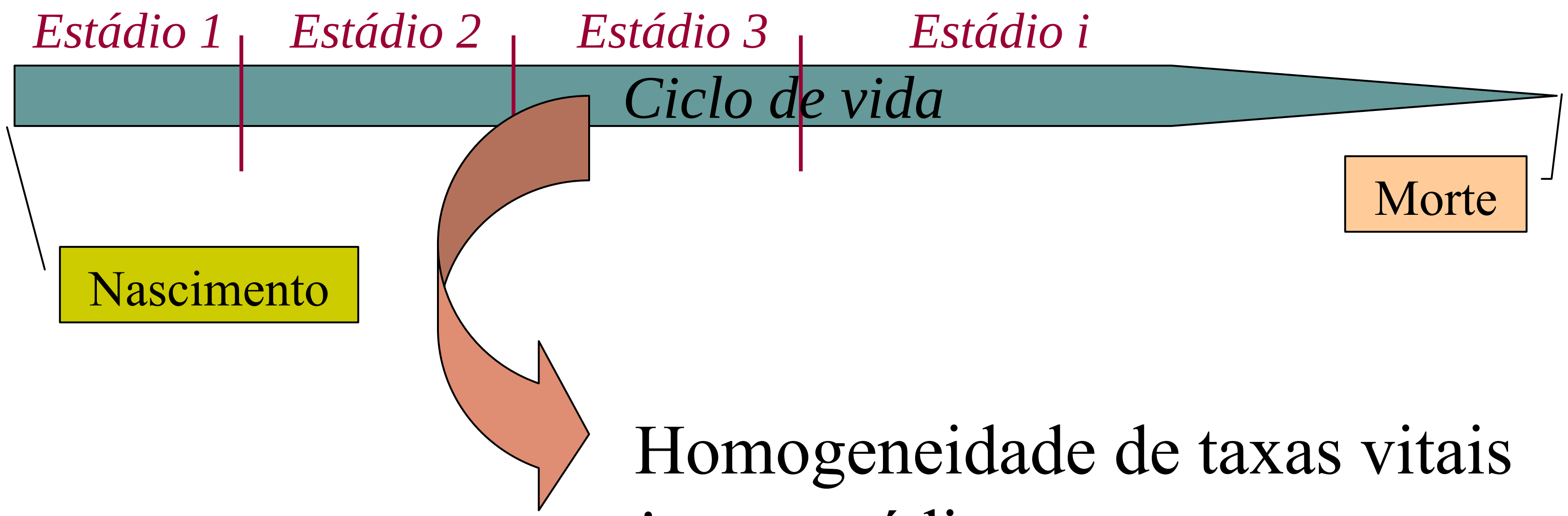
Introdução aos modelos matriciais

- A Matriz de Leslie -

Populações estruturadas em estádios fisiológicos

<u>*Estádios*</u>*:*

idades, tamanhos corporais, estádios desenvolvimento ...



Homogeneidade de taxas vitais *intra*-estádios

Duas escalas de tempo

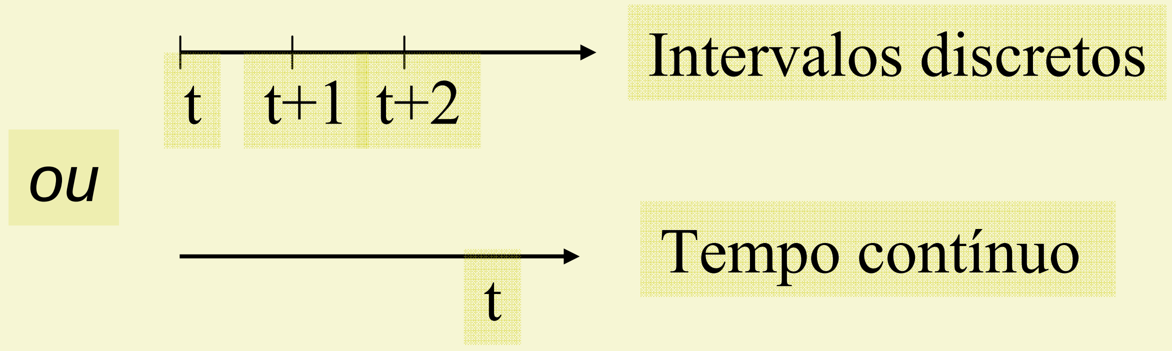
Tempo biológico

Tempo ao longo do ciclo de vida (nascimento até à morte) - idades

Tempo absoluto (ou de “projecção”)

Tempo ao longo do qual a população é recenseada

Para qualquer deles pode-se escolher:



Tipos de modelos para populações estruturadas

Tempo biológico

Tempo absoluto

	Estádios fisiol. discretos	Estádios fisiol. contínuos
Tempo discreto	***Modelos matriciais***	***Eqs Integro-diferenciais***
Tempo contínuo	***Eqs diferenciais com atrasos***	***Eqs às derivadas parciais***

História

C. Elton
Bureau of Animal Populations, Oxford

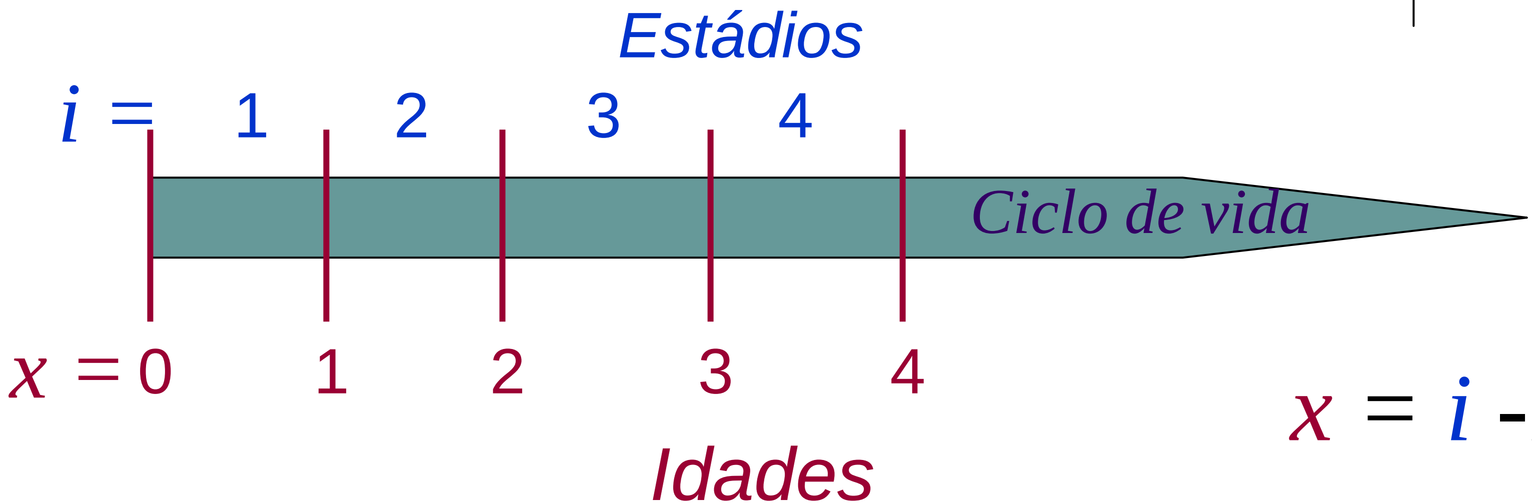
L. Lefkovitch, 1965

Patrick Leslie, 1945

Hal Caswell

Caswell, H. 2001. *Matrix Population Models. Construction, Analysis and Interpretation*. Sinauer

Estádios *vs.* idades



$$x = i - 1$$

A população tem estrutura etária:

$$\begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_3 \\ \ldots \end{bmatrix}$$

Demografia

Tempo absoluto

Δ t = Intervalo de projecção

$t \quad t+1 \quad \overbrace{t+2 \quad t+3} \quad t+4$

$$\begin{bmatrix} N_{t,0} \\ N_{t,1} \\ N_{t,2} \\ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} N_{t+1,0} \\ N_{t+1,1} \\ N_{t+1,2} \\ \ldots \end{bmatrix} \quad [\ldots] \quad \begin{bmatrix} N_{t+4,0} \\ N_{t+4,1} \\ N_{t+4,2} \\ \ldots \end{bmatrix}$$

2 regras

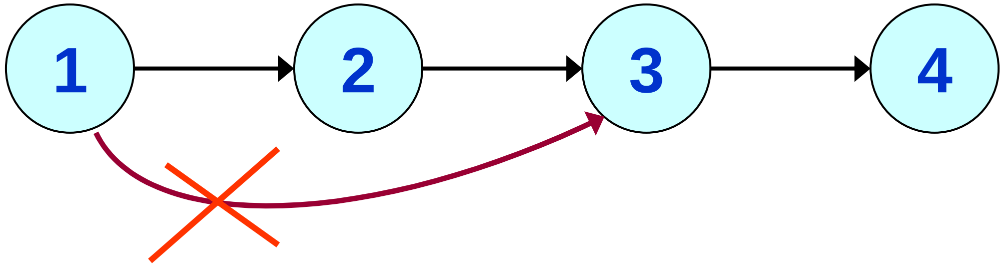
O intervalo de projecção é sempre constante

Intervalo projecção $\leq$ duração da unidade de idade

1 estádio de cada vez

Um indivíduo não pode saltar 2 ou mais estádios em 1 intervalo projecção

estádios



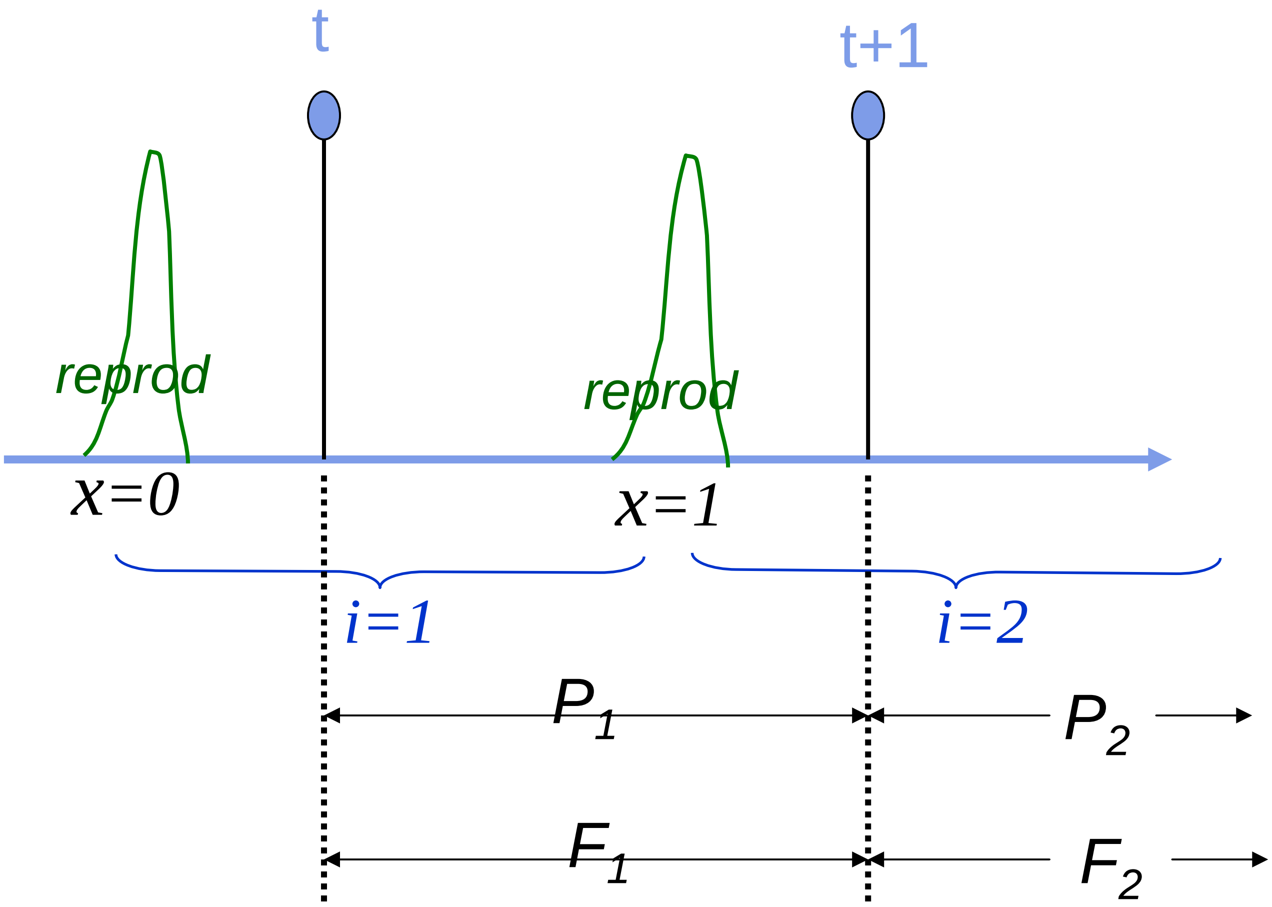
Parâmetros de projecção

P_i Probabilidade de que 1 indivíduo no estádio i, no instante t, sobreviva e esteja no estádio i+1 no census de t+1

F_i Número filhos viáveis dum indivíduo no estádio i, produzidos durante o intervalo de projecção (t, t+1).

"viáveis"= ainda estão vivos no instante t+1

Intervalo de aplicação



Projecção com P_i e F_i

t	***t+1***	***t+2***	**...**
$N_{1,\,t}$	$N_{1,\,t+1}$		
$N_{2,\,t}$	$N_{2,\,t+1}$		
$N_{3,\,t}$	$N_{3,\,t+1}$		
...	**...**		

$$N_{1,t+1} = F_1 N_{1,\,t} + F_2 N_{2,\,t} + F_3 N_{3,\,t} + \ldots + F_k N_{k,\,t}$$

$$N_{2,\,t+1} = P_1\, N_{1,\,t}$$

$$N_{3,\,t+1} = P_2\, N_{2,\,t}$$

…

Representação matricial

$$\begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_K \\ P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & P_{K-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \dots \\ N_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 N_1 + F_2 N_2 + F_3 N_3 + \dots + F_K N_K \\ P_1 N_1 \\ P_2 N_2 \\ \dots \\ P_i N_i \end{bmatrix}$$

A Matriz de Leslie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_K \\ P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & P_{K-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada (K, K)

K = nº estádios

$$\mathbf{N_{t+1}} = \mathbf{A}\,\mathbf{N_t}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{i=K} F_i N_i \\ P_1 N_1 \\ P_2 N_2 \\ \dots \\ P_3 N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_K \\ P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & P_{K-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \dots \\ N_K \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N_{t+1}} = \mathbf{A}\,\mathbf{N_t}$$

(K, 1) (K, K) (K, 1)

A^n determina o futuro

$$\mathbf{N}_{\mathbf{t}+\mathbf{1}} = \mathbf{A}\,\mathbf{N}_{\mathbf{t}}$$ equação de recorrência

Assumindo A constante

$$\mathbf{N}_{\mathbf{t}+2} = \mathbf{A}\,\mathbf{N}_{\mathbf{t}+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{A}\,\mathbf{N}_{\mathbf{t}} = \mathbf{A}^2\mathbf{N}_{\mathbf{t}}$$

$$\mathbf{N}_{\mathbf{t}+\mathbf{n}} = \mathbf{A}^n\mathbf{N}_{\mathbf{t}}$$ após n intervalos projecção

Determina o futuro após n intervalos

Aplicação sucessiva da ML

$$\begin{bmatrix} 320 \\ 36 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 & 2.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N_{t+1}} = \mathbf{A} \quad \mathbf{N_t}$$

$$\begin{bmatrix} 676 \\ 115 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1531 \\ 244 \\ 35 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3420 \\ 551 \\ 73 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 7659 \\ 1231 \\ 165 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N_{t+2}} \qquad \mathbf{N_{t+3}} \qquad \mathbf{N_{t+4}} \qquad \mathbf{N_{t+5}}$$

Variação dos números

	t	$t+1$	$t+2$	$t+3$	$t+4$	$t+5$	$t+6$
Estadio 1	100	320	676	1531	3420	7659	17144
Estadio 2	50	36	115	244	551	1231	2757
Estadio 3	20	15	11	35	73	165	369
Estadio 4	10	2	2	1	4	7	17
TOTAL	180	373	804	1811	4048	9062	20287
λ		**2.07**	**2.16**	**2.25**	**2.24**	**2.24**	**2.24**

$$N_{x,t+1} = N_{x,t}\lambda$$

$$N_{t+1} = AN_t = \lambda N_t$$

Transição das proporções para DEE

	t	*t+1*	*t+2*	*t+3*	*t+4*	*t+5*	*t+6*
Estadio 1	0.556	0.858	0.841	0.845	0.845	0.845	0.845
Estadio 2	0.278	0.097	0.143	0.135	0.136	0.136	0.136
Estadio 3	0.111	0.040	0.014	0.019	0.018	0.018	0.018
Estadio 4	0.056	0.005	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001