O boi almiscarado (musk ox)

Distribuição original: América Norte, Groenlândia

Deplecção por caça excessiva: 1700-1850

Últimos indivíduos no Alaska: 1850-60

Ilha de Nunivak

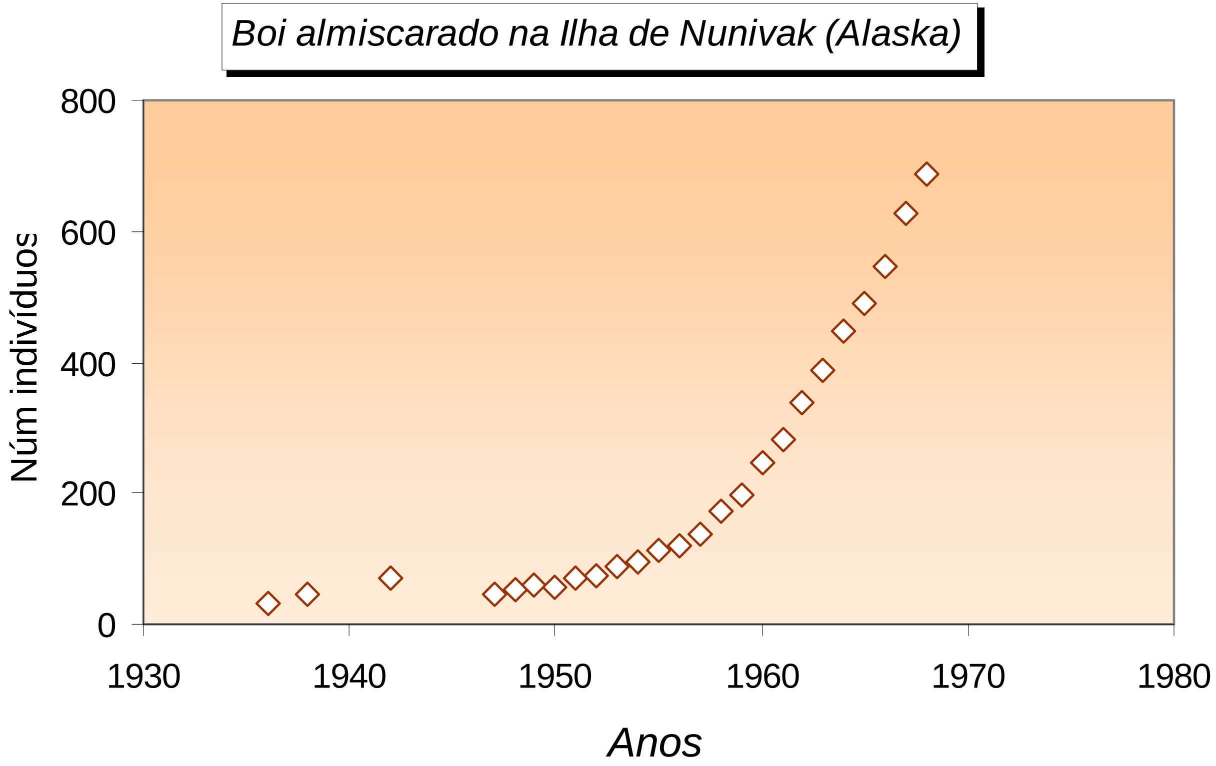
Nunivak Island

31 animais, 1936

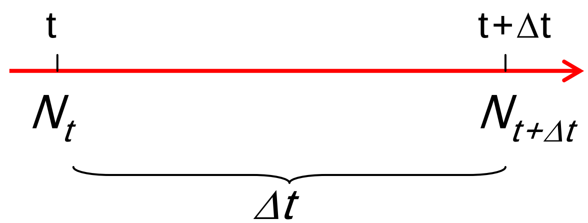
Crescimento exponencial

População inicial na reserva protegida de Nunivak: 31 indivíduos

Boi almiscarado
(Ovibos moschatus)



Medidas de variação de N



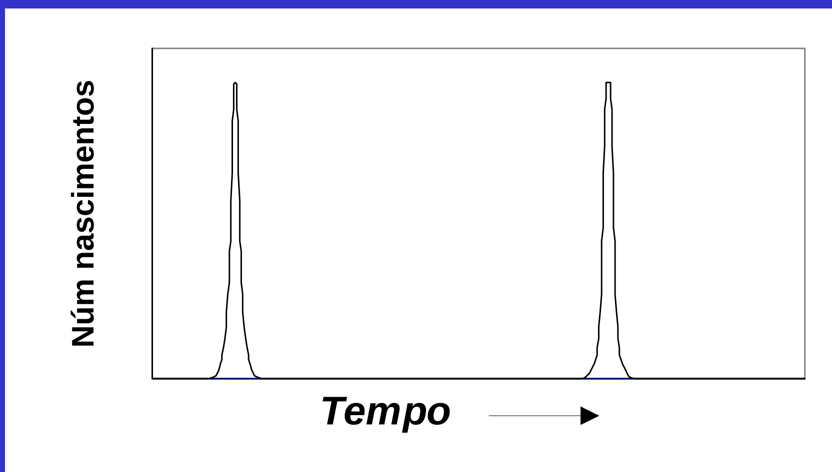
$\Delta N > 0$ cresce
$\Delta N = 0$ não varia
$\Delta N < 0$ decresce

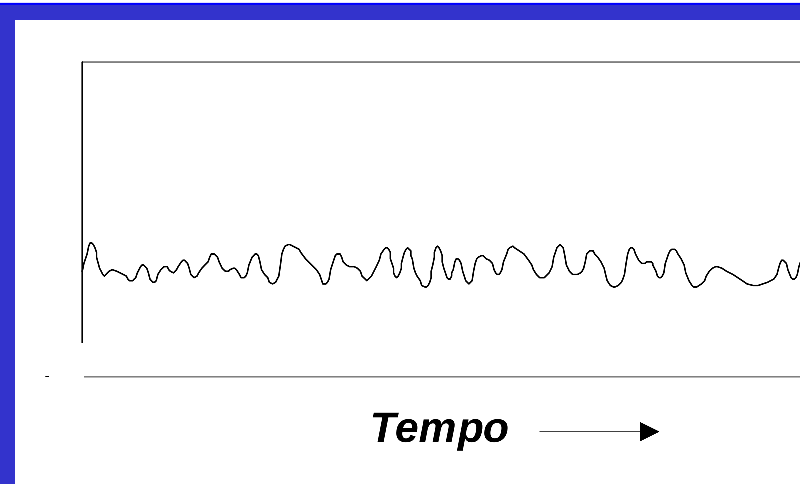
$\Delta N = N_{t+\Delta t} - N_t$ *Variação absoluta*

$$\frac{N_{t+\Delta t} - N_t}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t}$$ *Variação média em* Δt $\equiv$ *variação tempo*$^{-1}$

$$\frac{1}{N_i}\frac{\Delta N}{\Delta t}$$ *Variação média relativa* $\equiv$ *% variação*

Tipos de reprodutores

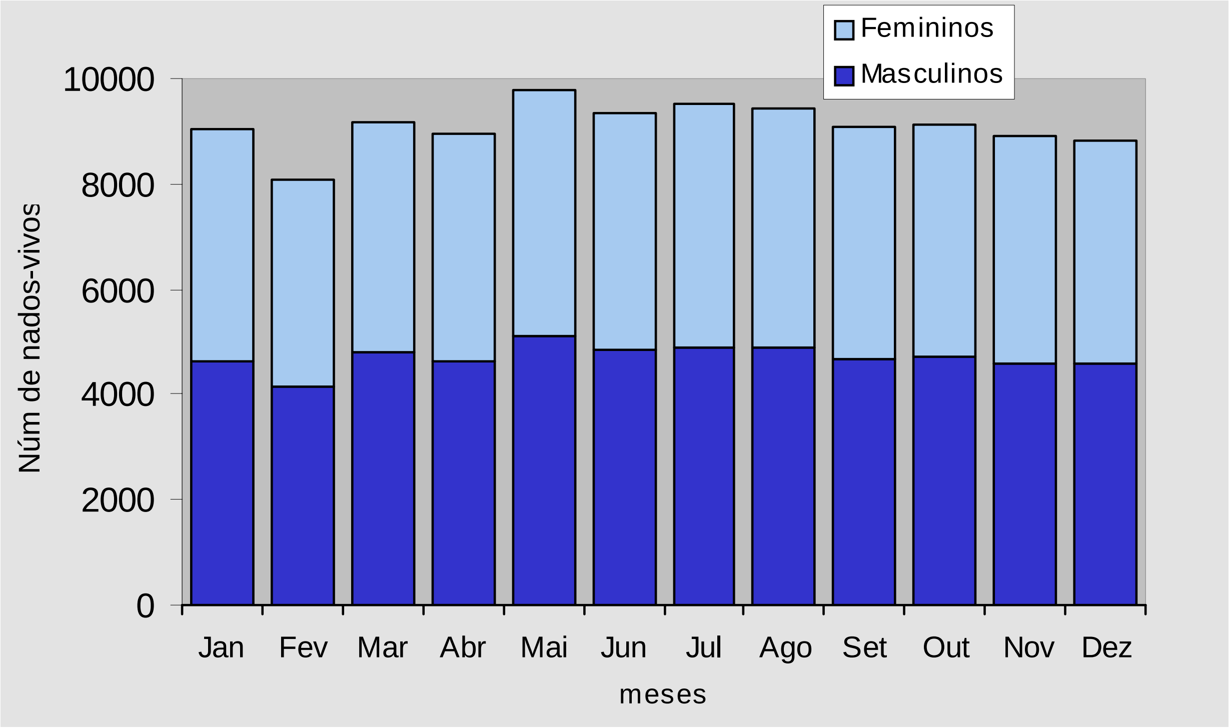




Sazonais

Contínuos

Nascimentos em Portugal, 1994, INE 1995



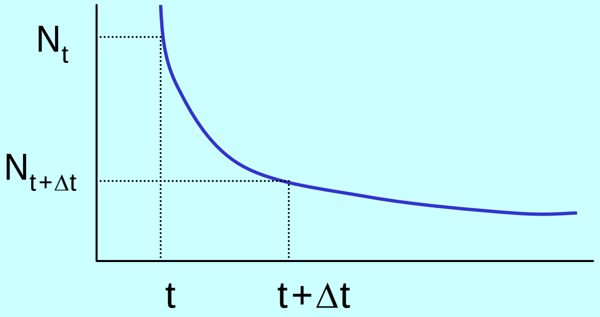
Reproductores contínuos

Variação de N ocorre contínuamente !

O intervalo $\Delta t = [t, t+\Delta t]$ é uma simplificação arbitrária.

Recorde-se a variação média:

$$\frac{N_{t+\Delta t} - N_t}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t}$$



$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{dN}{dt}$$ = Variação *instantânea* em t

Variação instantânea

Variação instantânea no instante t:

$$\frac{dN}{dt} = B_t - D_t$$

Definição de taxas instantâneas:

Taxa de natalidade = $\frac{nascimentos}{ascendentes} = \frac{B_t}{N_t} = b_t$

Taxa de mortalidade = $\frac{mortes}{presentes} = \frac{D_t}{N_t} = d_t$

Taxa instantânea de crescimento

$$\frac{dN}{dt} = N_t b_t - N_t d_t = N_t \underbrace{\left(b_t - d_t\right)}_{\boldsymbol{r}}$$

Taxa instantânea de crescimento
(Parâmetro de Malthus)

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

Unidades de r:
indivíduos por indivíduo por unidade tempo

Dado um N_t inicial, qual o valor de $N_{t+\Delta t}$?

Solução da equação

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

Equação diferencial ordinária de 1º ordem

Assumindo r constante,

Solução, pelo método de *separação de variáveis*:

Parâmetro

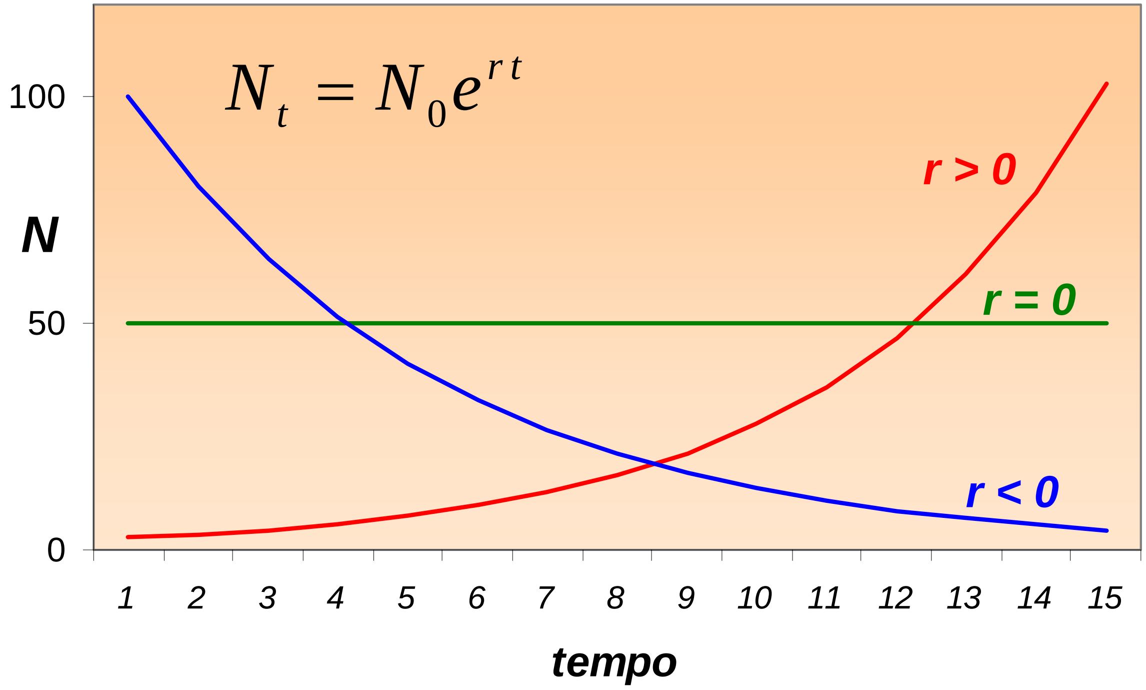
$$N_{t+\Delta t} = N_t \, e^{r\,\Delta t}$$

Variável independente

Variável dependente

Para qualquer Δt

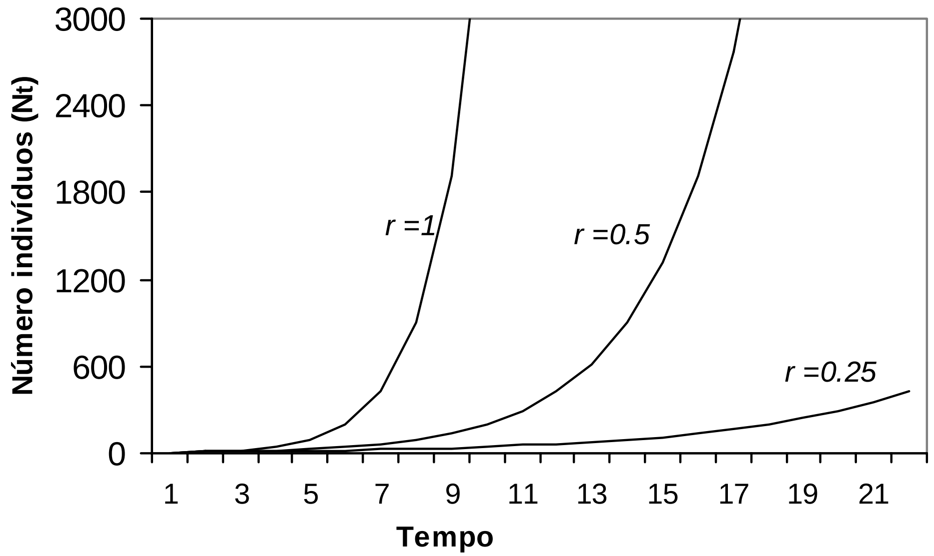
Crescimento exponencial



Revê-se aqui o boi almiscarado ?

O crescimento não regulado não pode durar muito tempo

$$N_{t+\Delta t} = N_t \; e^{r\,\Delta t}$$



r= 1 ano $^{-1}$
N_t *= 10 indivíduos iniciais*
Δt *= 10 anos*

$$N_{t+10} = 10\, e^{1\times 10} = 220265$$ *indivíduos*

N_t *influencia sobrevivência e natalidade*

$$N_{t+\Delta t} = N_t \; e^{r\,\Delta t} = N_t \; e^{(b-d)\Delta t}$$

Sobrevivência, natalidade = f (N_t)

Para que serve o modelo de crescimento não-regulado ?

1. *Ilustra o papel da matemática como ferramenta em biologia*
2. *Ilustra objectivamente as consequências de pressupostos sobre sobrevivência e natalidade*
3. *O modelo é adequado para descrever o crescimento inicial da população e ilustra o seu potencial para crescer*
4. *Serve de ponto de partida para introduzir componentes que conferem maior realismo ao crescimento populacional*

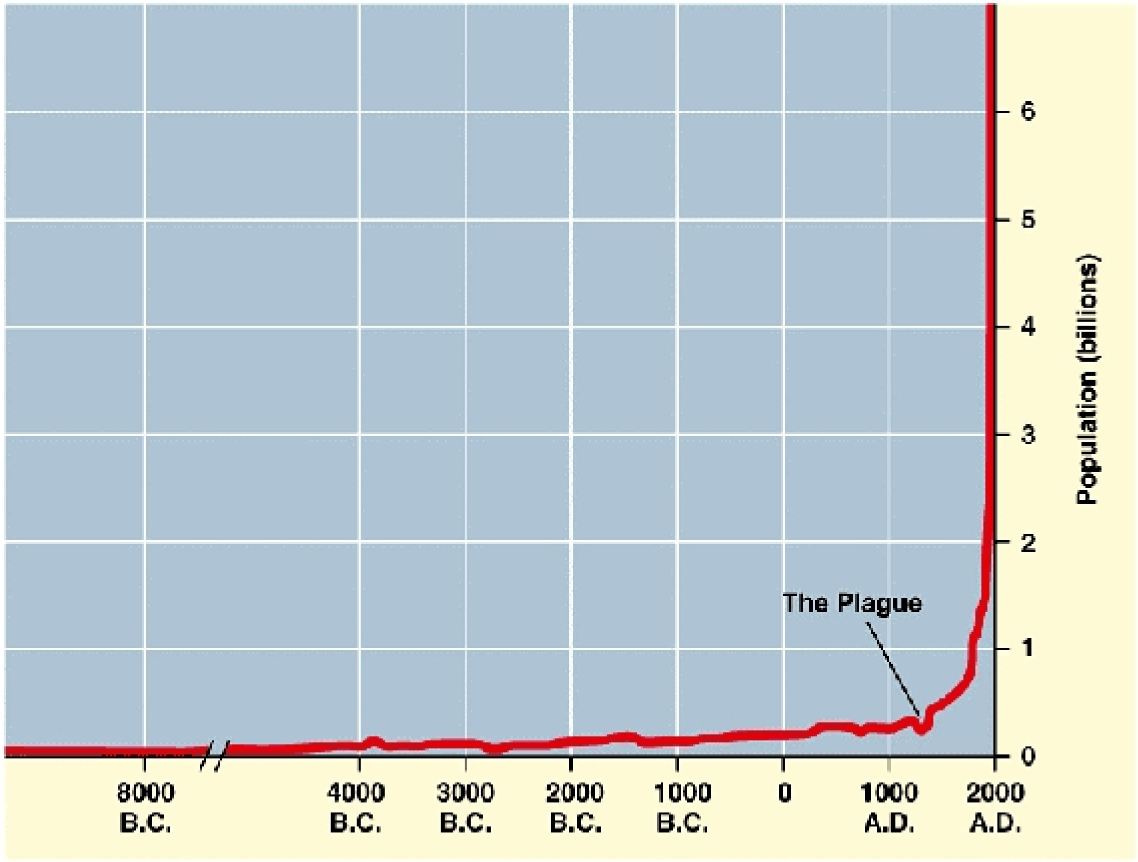
Thomas Malthus

Thomas Malthus

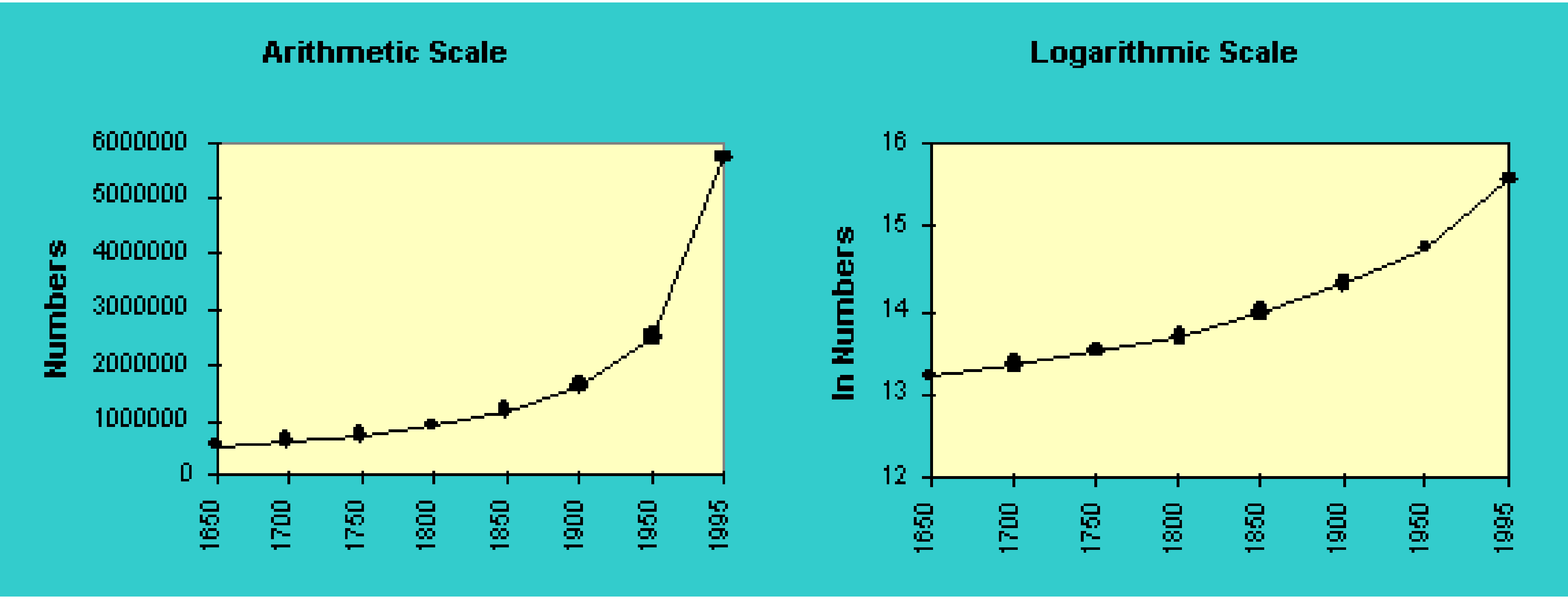
Thomas Malthus’ studies on the growth of population led to the development of the field of demography. Malthus (1766-1834) believed that the population would naturally increase faster than the amount of food that could be produced to feed them. He advocated sexual abstinence or restraint to control population increases and acknowledged the role of plagues, wars, and epidemics in containing overpopulation. Malthus specifically suggested that people marry later and have small families. Due to these ideas, economics earned its name as “the dismal science.”

A população humana 1

Figure 52.21 Human population growth



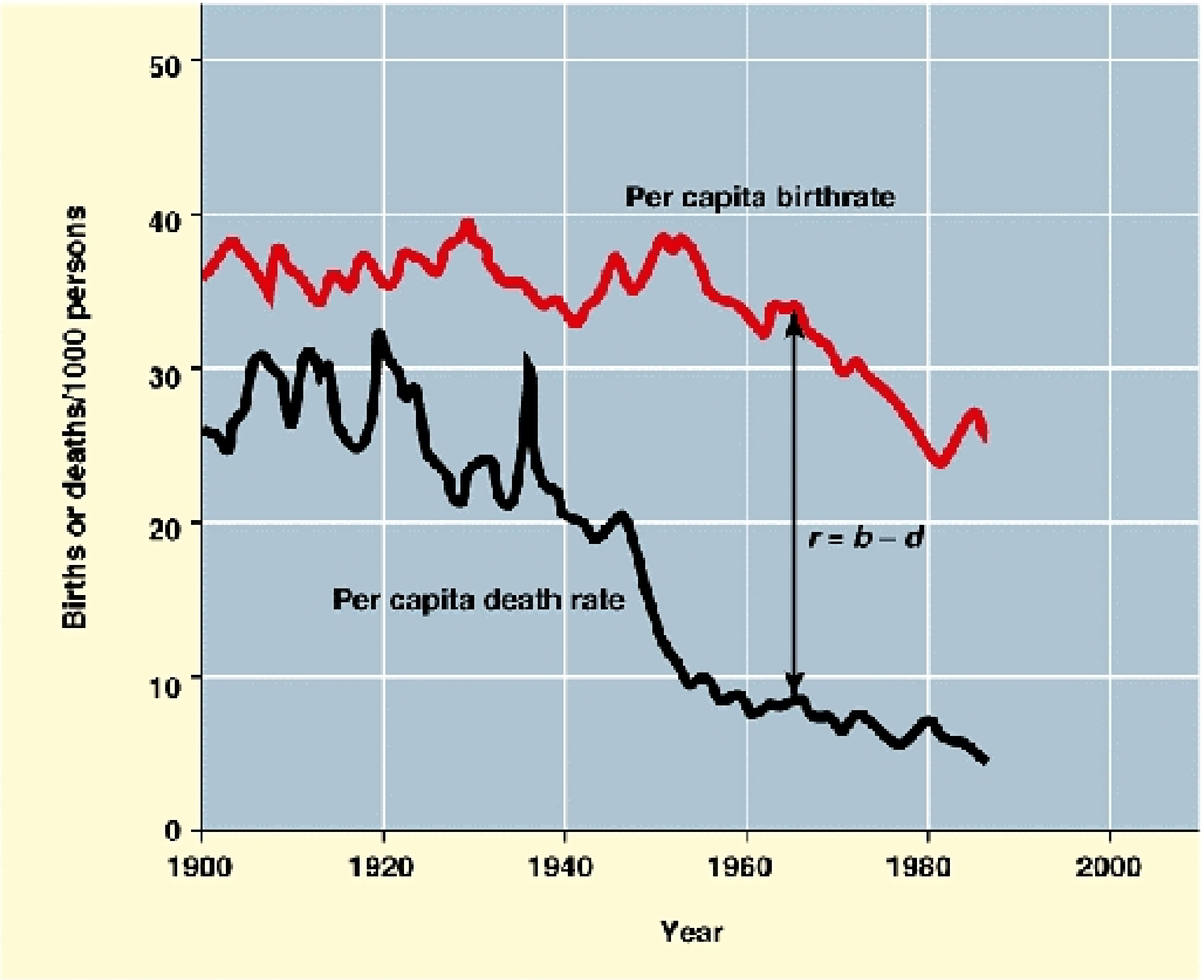
A população humana 2



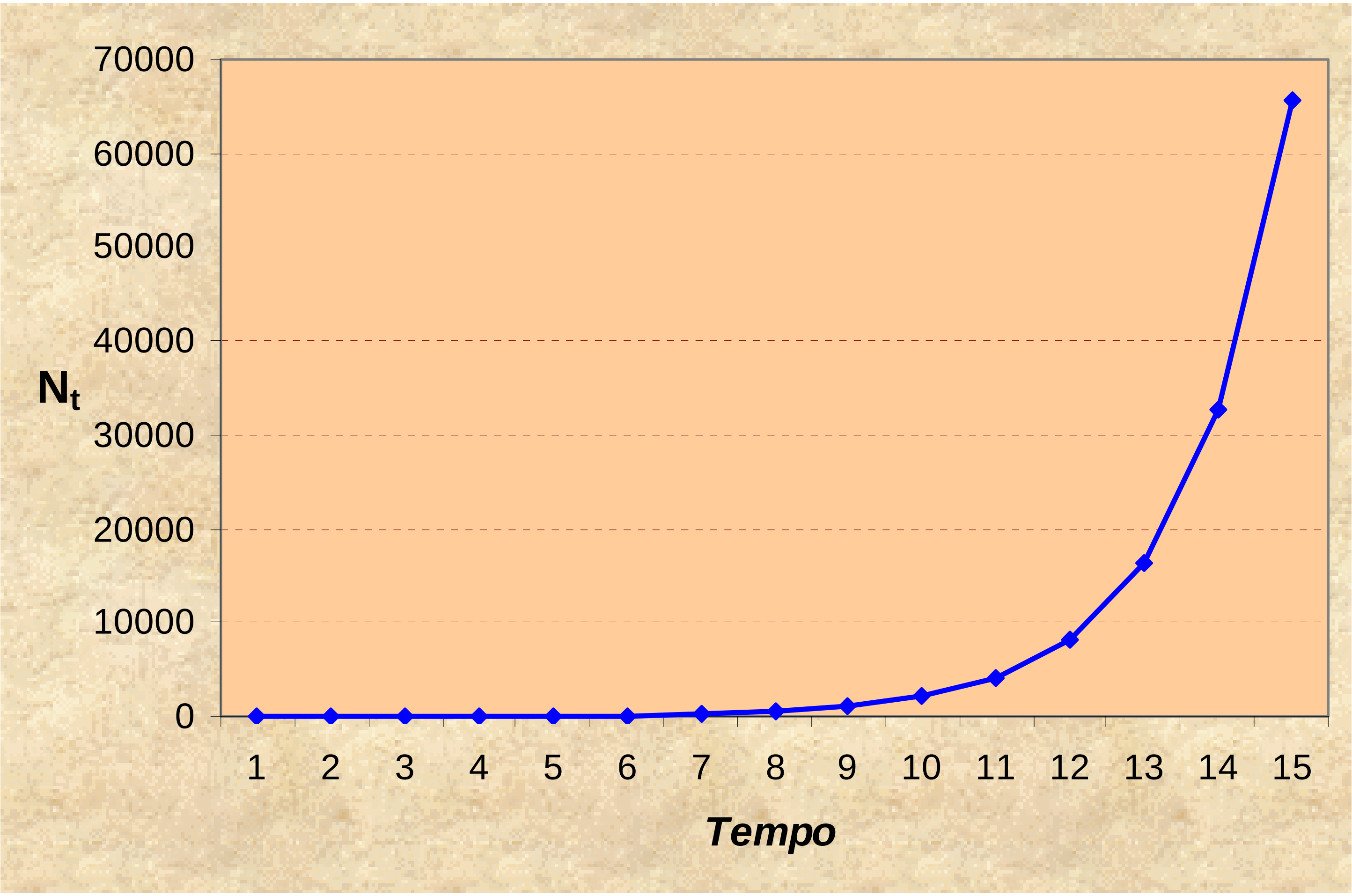
Fonte: Demographic yearbook. Annuaire démographique. New York Dept. of Economic and Social Affairs, Statistical Office, United Nations

b_t e d_t numa população exponencial

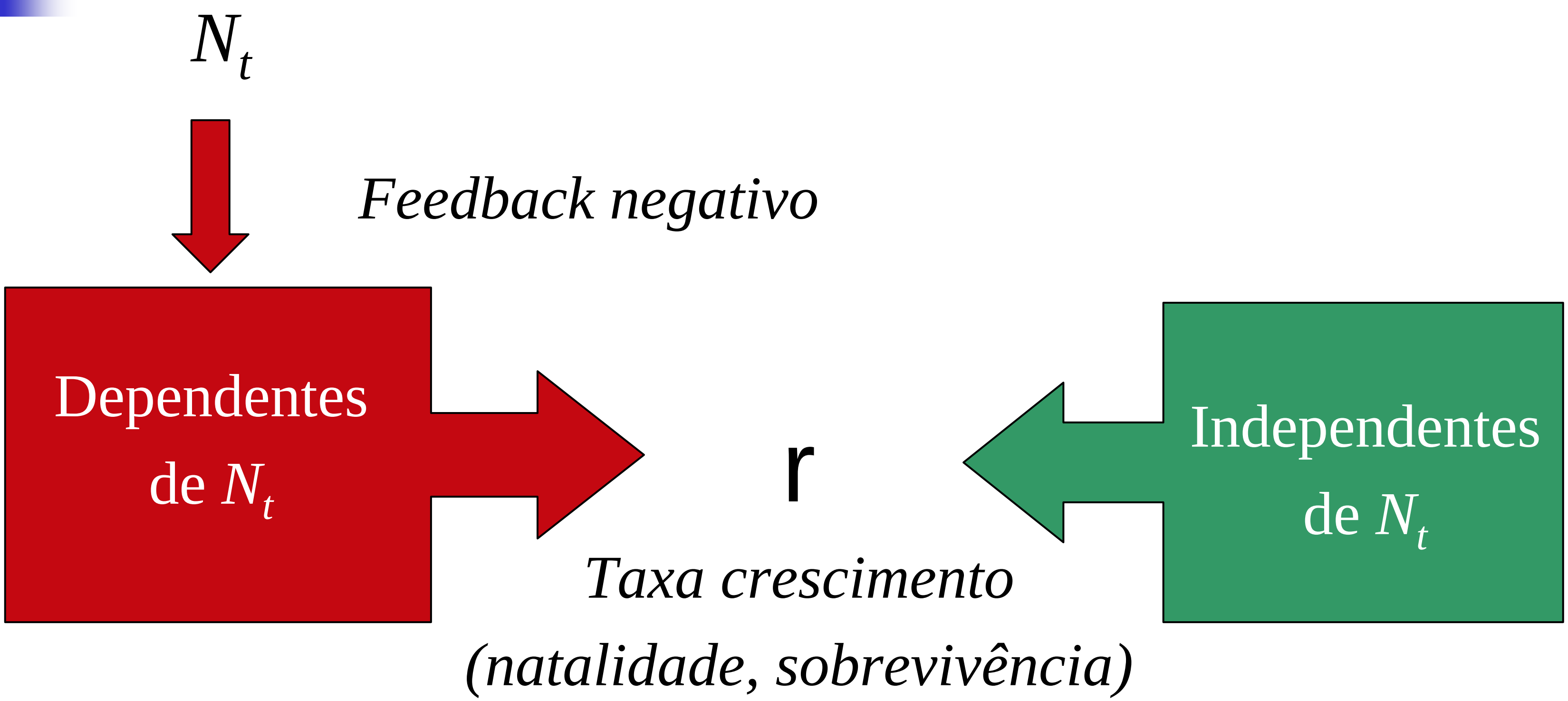
Figure 52.22 Changes in birthrates and death rates in Sri Lanka



O crescimento exponencial não é sustentavel



Factores de regulação



Mecanismos que <u>podem</u> produzir regulação dependente da densidade

Diminuição de recursos alimentares:

– consumo *per capita* diminui, tempo de pesquisa aumenta bem como exposiçao a predadores (afecta S e b)

Menos espaço:

- Diminui território médio ou aumenta o número de sem-território

Acção de predadores e/ou de parasitas aumenta:

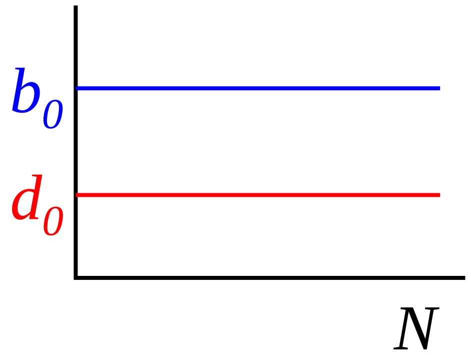
-Predadores "shiftam" para presas + densas; maior incidência de doenças transmissíveis.

Uso de habitats marginais de menor qualidade

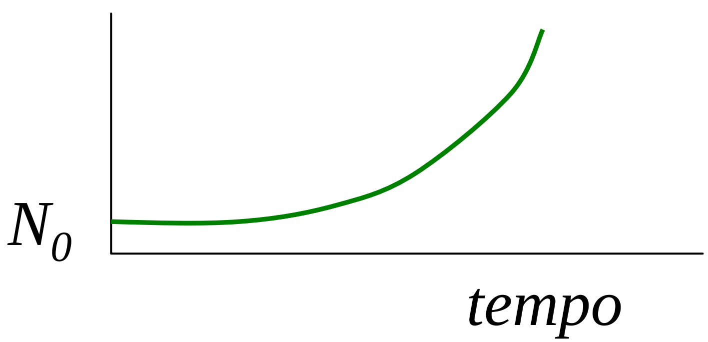
etc. etc...

Exponencial contínuo: *b* e *d* constantes

$$N_t = N_0 e^{r\,t} \qquad r = b_0 - d_0 \quad \text{constantes}$$

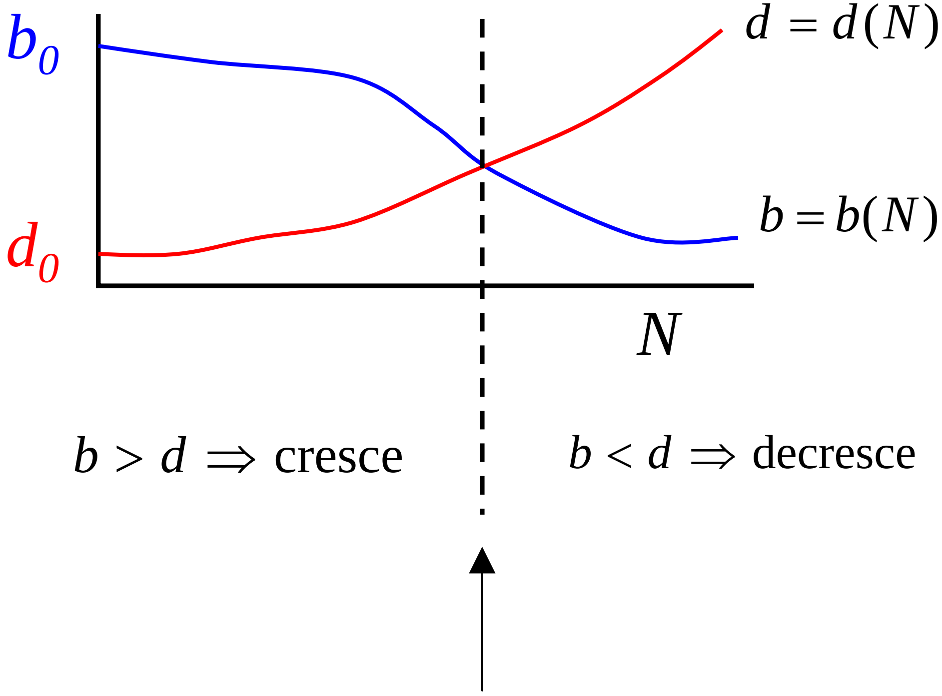


$$b_0 > d_0 \quad \Rightarrow \quad r > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{crescimento exponencial}$$



Regulação dependente da densidade

$$\frac{dN}{dt} = \left(b(N) - d(N)\right)N$$

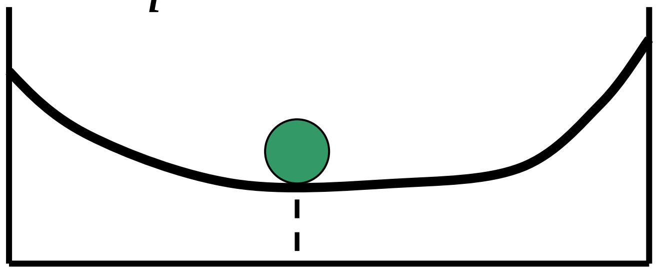


$b > d \Rightarrow$ cresce

$b < d \Rightarrow$ decresce

Equilibrio, $N = K$

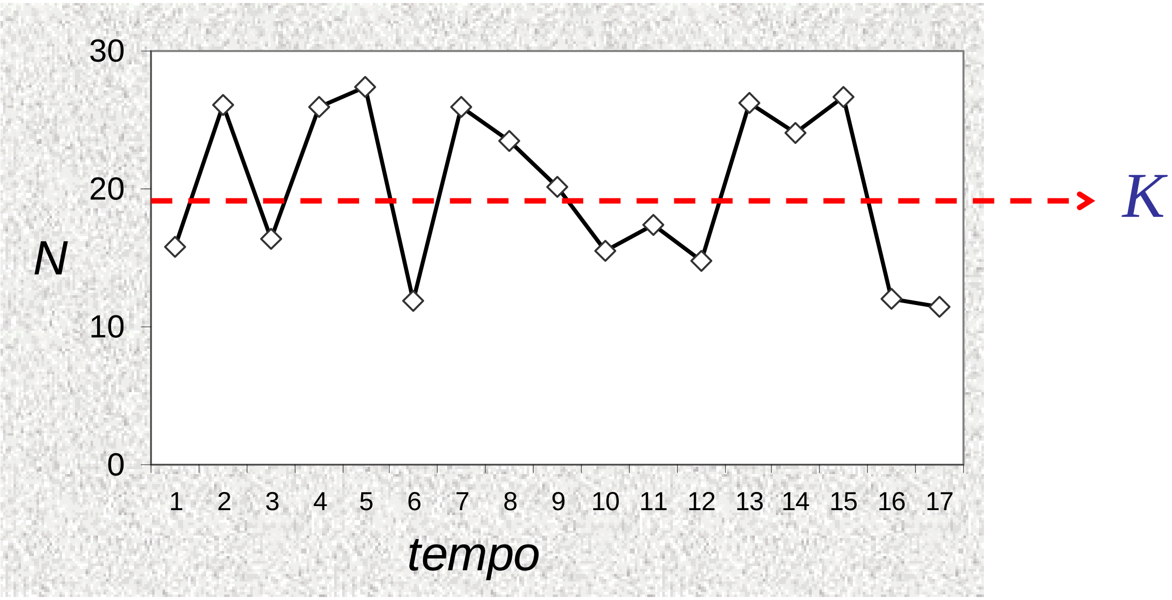
Equilibrio estavel



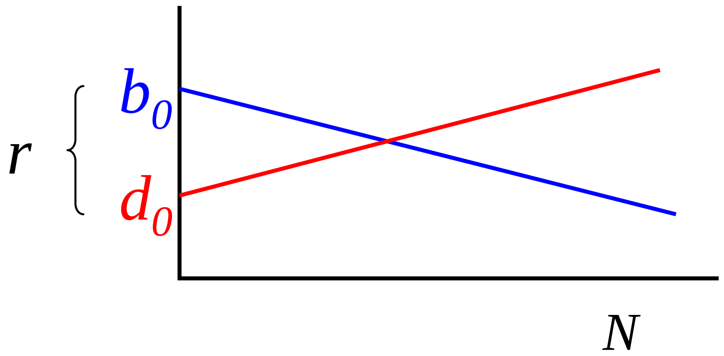
N=K

Carrying Capacity, K

Carrying capacity ~ Capacidade sustentada,
densidade populacional equilibrada/sustentada



Reproductores contínuos



$$r = b_0 - d_0$$

$$d_t = d_0 + qN_t$$

$$b_t = b_0 - pN_t$$

Substituindo em $$\frac{dN}{dt} = (b_t - d_t)N_t$$

Obtem-se: $$\frac{dN}{dt} = [(b_0 - pN_t) - (d_0 + qN_t)]N_t$$

$$\frac{dN}{dt} = [(b_0 - d_0) - (p + q)N_t]N_t$$

Introdução de K

$N \longrightarrow K$

Em K, dN/dt = 0

Em que condições

$$\frac{dN}{dt} = 0 \quad ?$$

$$\frac{dN}{dt} = \left[r - (p+q)N_t\right]N_t$$

$N_t = 0$

Equilibrio trivial

$$N_t = \frac{r}{p+q}$$

Equilíbrio não-trivial

É o próprio K

A equação logística dos reprods. contínuos (Verhulst, 1838)

$$K = \frac{r}{p+q} \quad \therefore \quad p+q = \frac{r}{K}$$

Substituindo aqui

$$\frac{dN}{dt} = \left[r - (p+q)N_t\right]N_t$$

$$\frac{dN}{dt} = rN\underbrace{\left(1 - \frac{N}{K}\right)}_{\text{Termo regulador}}$$

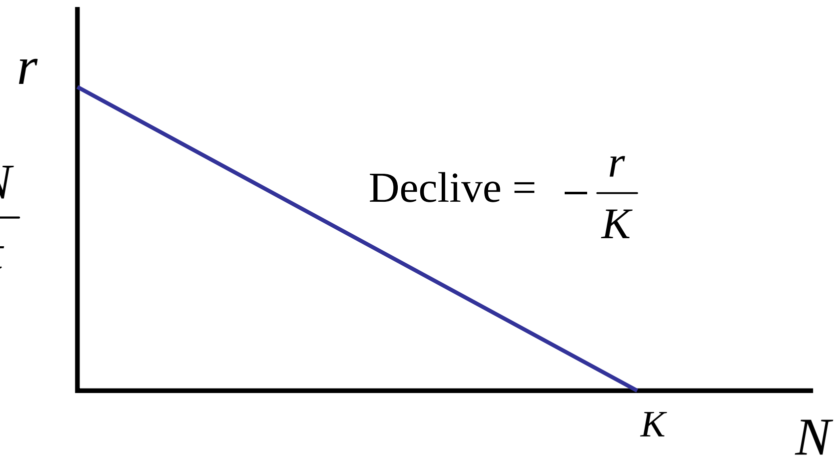
Crescimento sem regulação ***Termo regulador***

Crescimento *per capita*

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad \equiv \quad \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r - \frac{r}{K}N$$

Contribuição de 1 indivíduo p/ crescimento da população.

Contrib. *per capita* $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$



Forma integral da logística

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Solução:

$$N_t = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$$

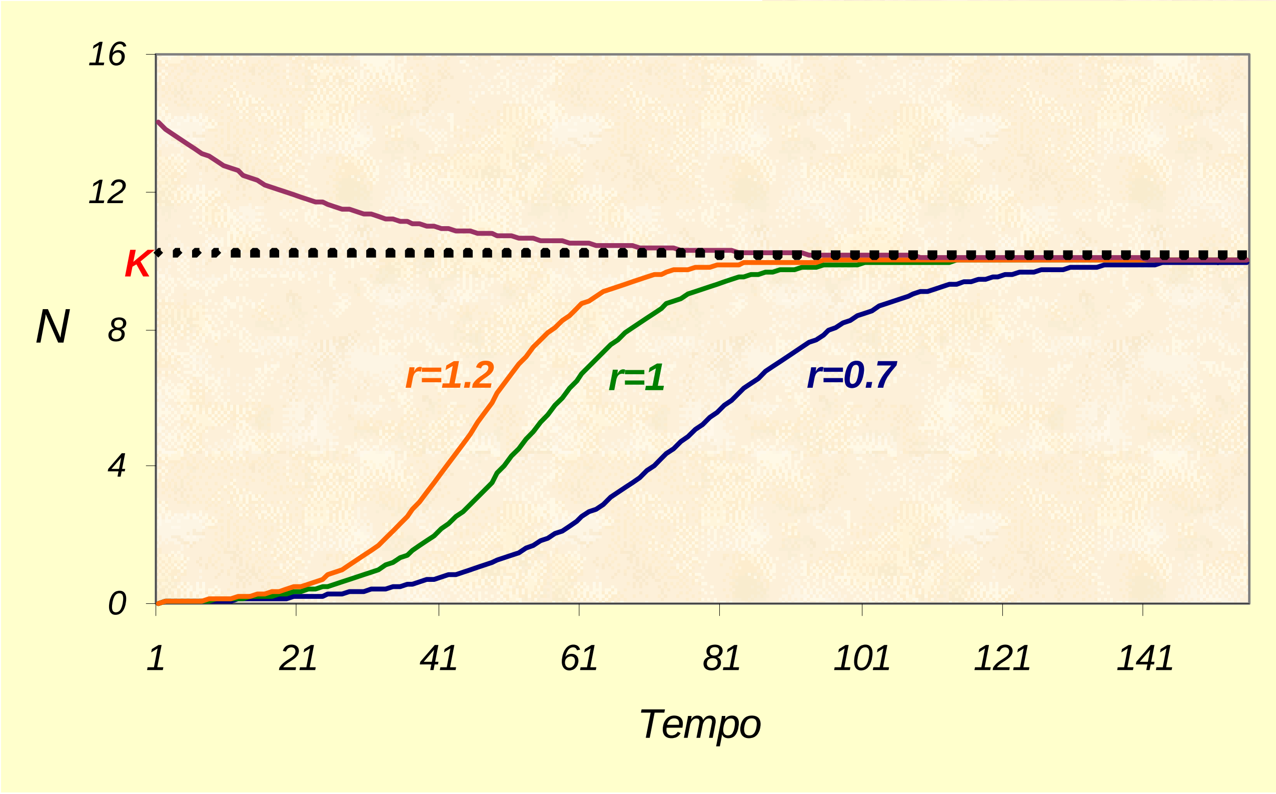
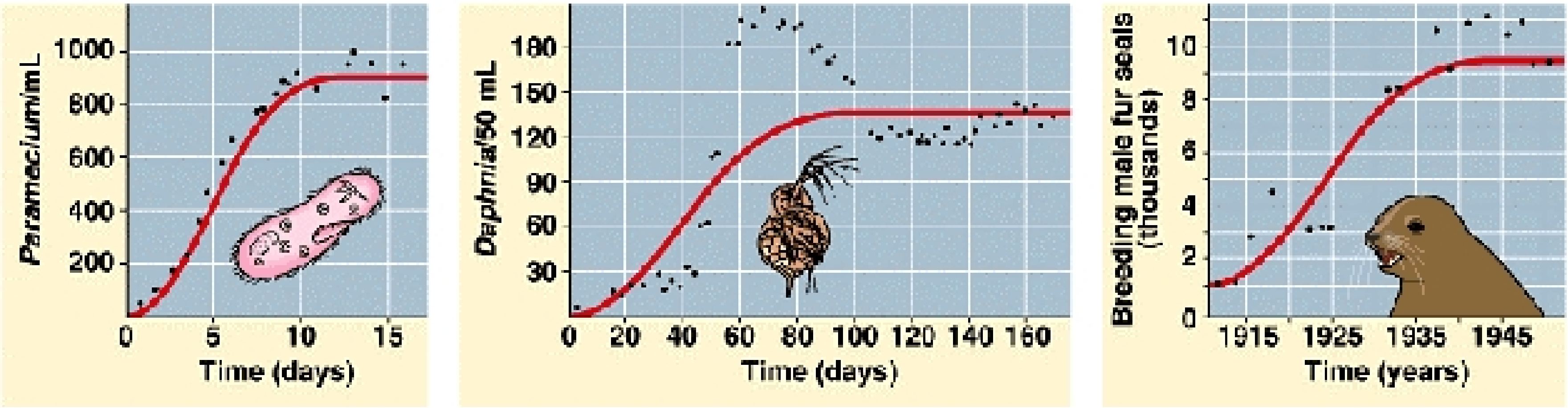


Figure 52.15 Examples of logistic population growth



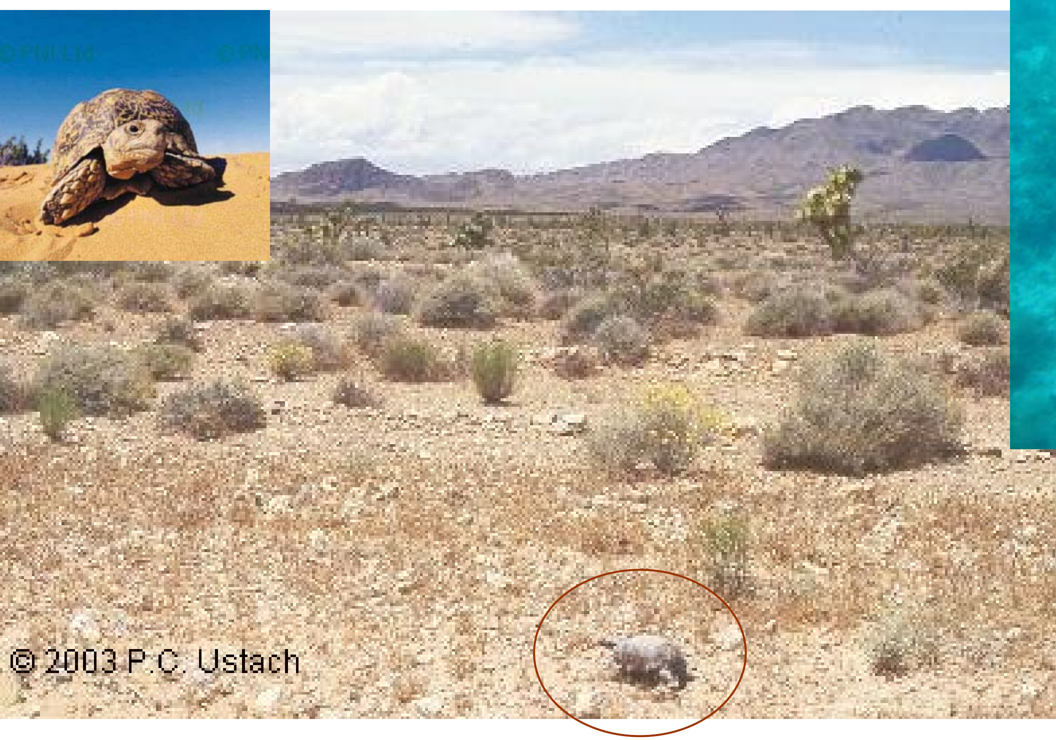
(a) A *Paramecium* population in laboratory culture

(b) A *Daphnia* population in laboratory culture

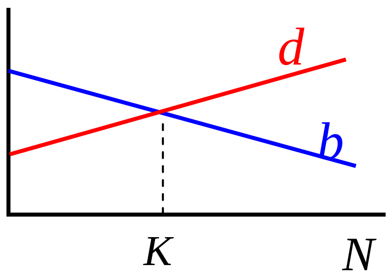
(c) A fur seal (*Callorhinus ursinus*) population on St. Paul Island, Alaska

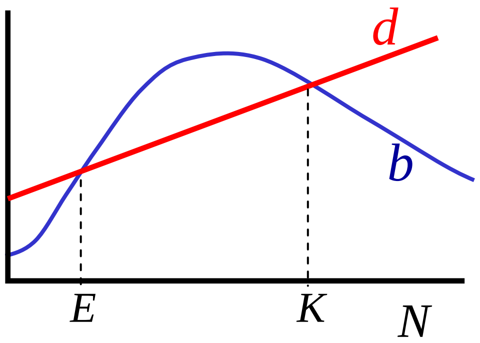
Efeito de Allee

Warder Allee 1885-1955



Representação matemática do Efeito de Allee



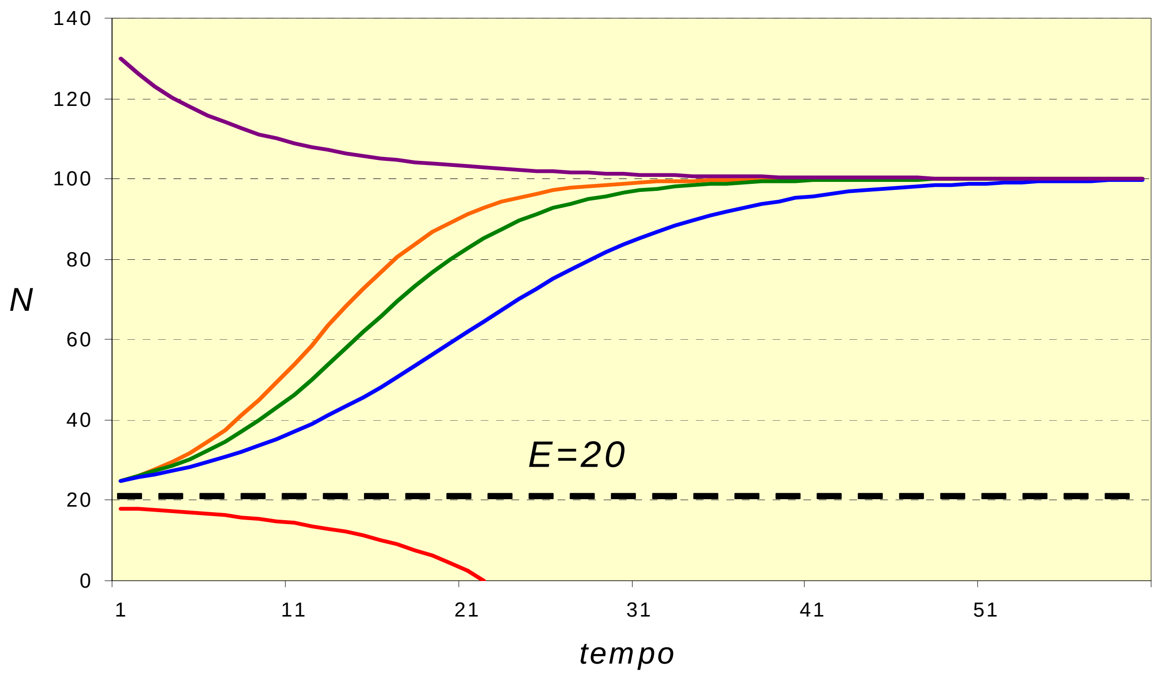


$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \Rightarrow \frac{dN}{dt} = rN\left(1-\frac{N}{K}\right)\left(1-\frac{E}{N}\right)$$

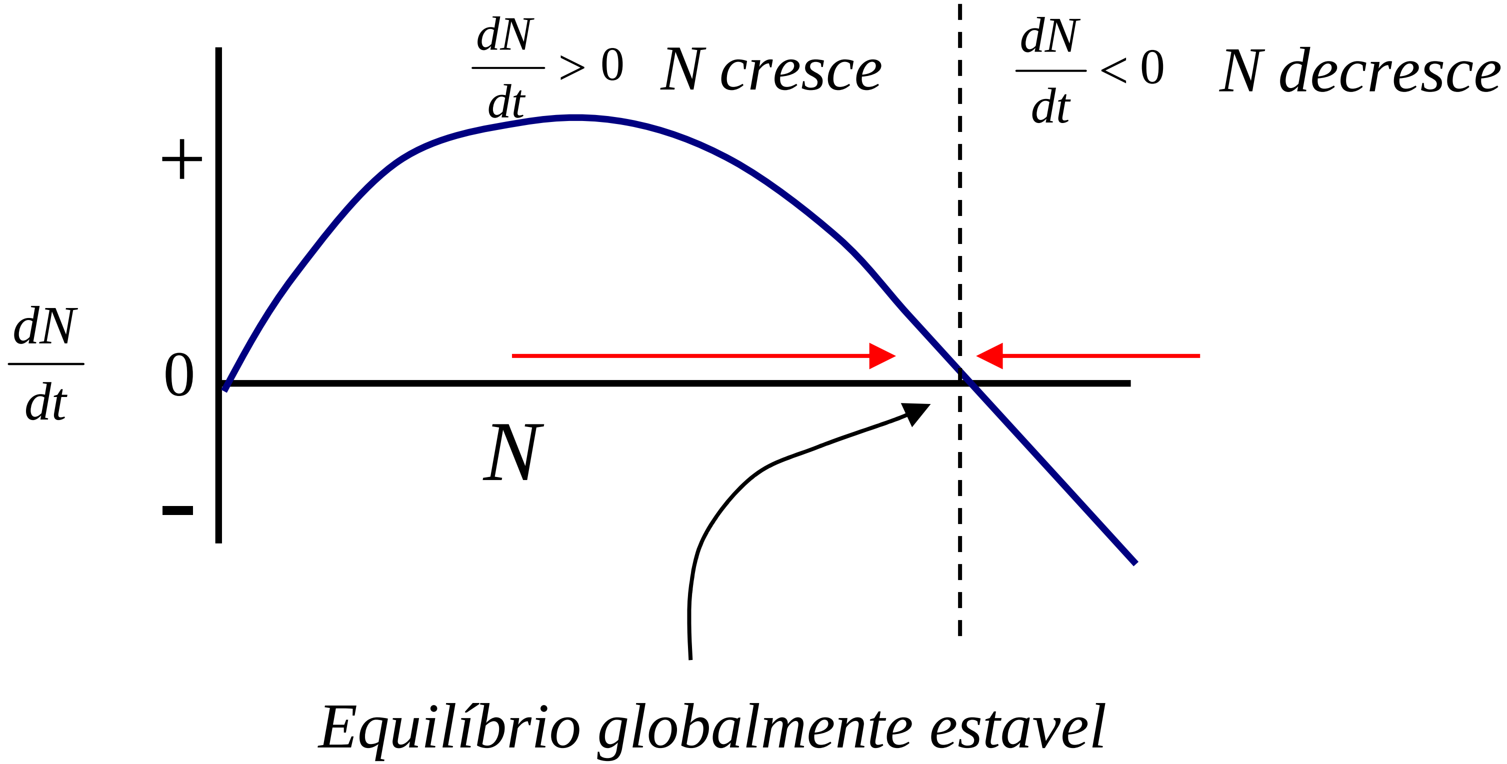
Wilson and Bossert 1971

Solução da eq. Wilson-Bossert

$$N_t = E + \frac{(N_0 - E)(K - E)}{(N_0 - E) + (k - N_0)\,e^{-rt}}$$

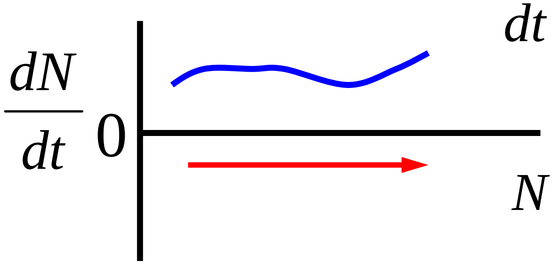


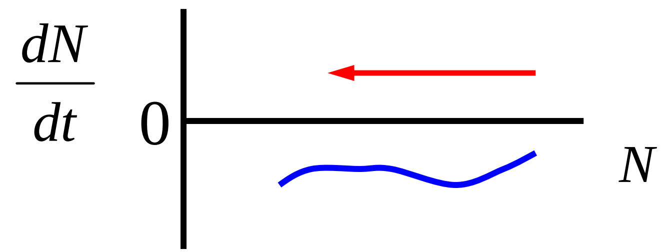
Análise qualitativa da logística

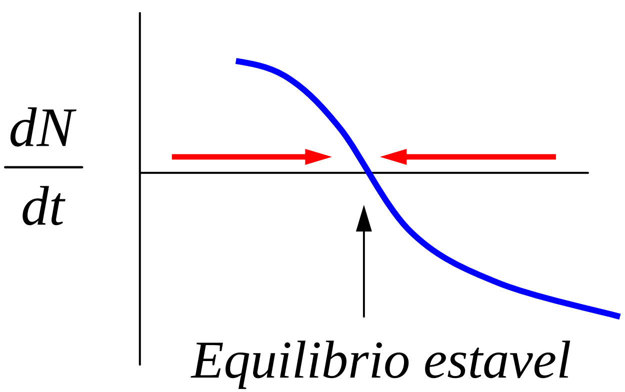


Um pouco de … teoria qualitativa de equações diferenciais (!)

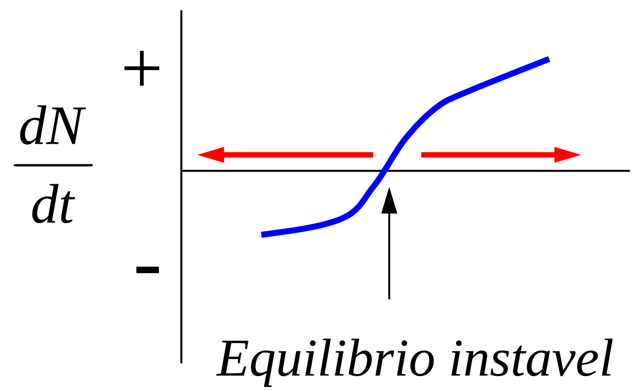
$$\frac{dN}{dt} = f(N)$$





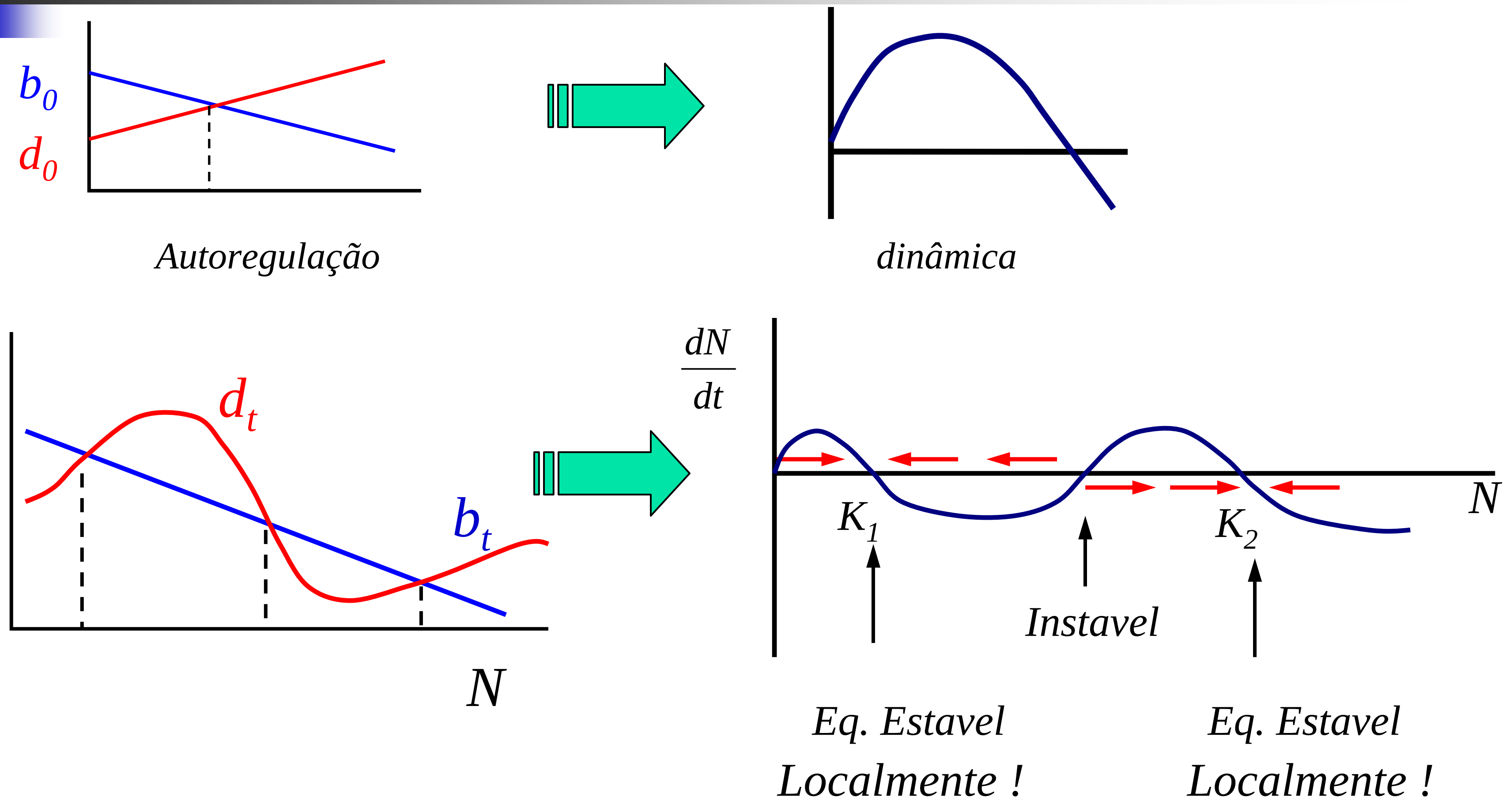


$$f'(N)\big|_{equi} < 0$$



$$f'(N)\big|_{equi} > 0$$

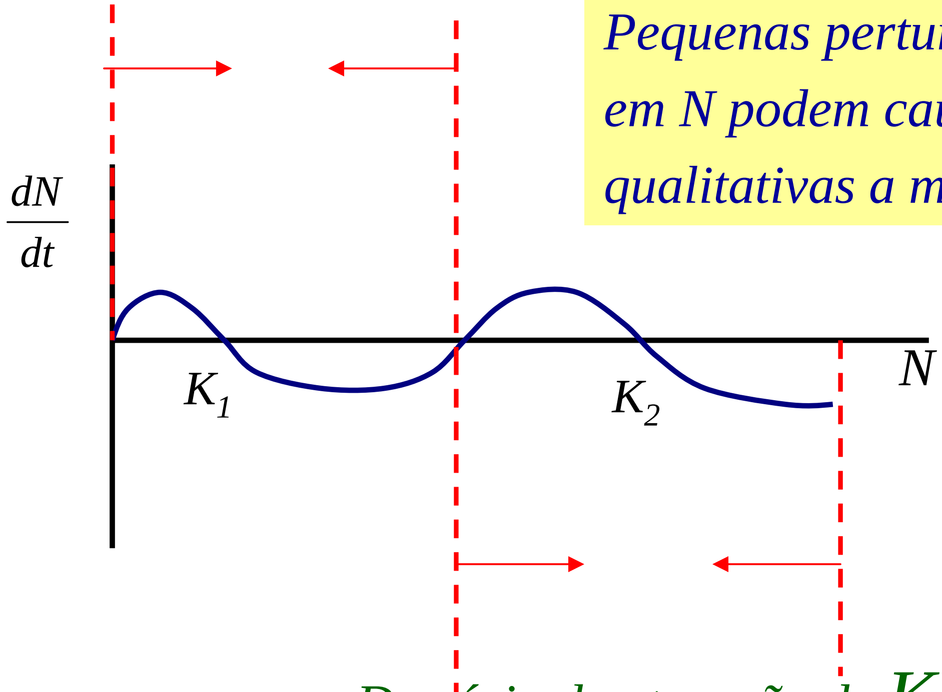
Autoregulação e dinâmica populacional



Equilíbrios múltiplos

Gama de valores de N que conduzem a K_1

Domínio de atracção de K_1

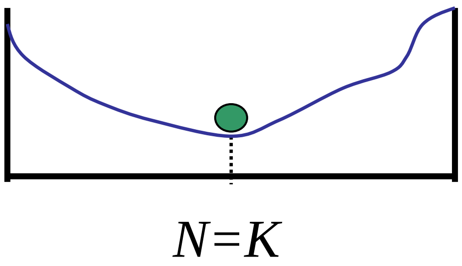


Domínio de atracção de K_2

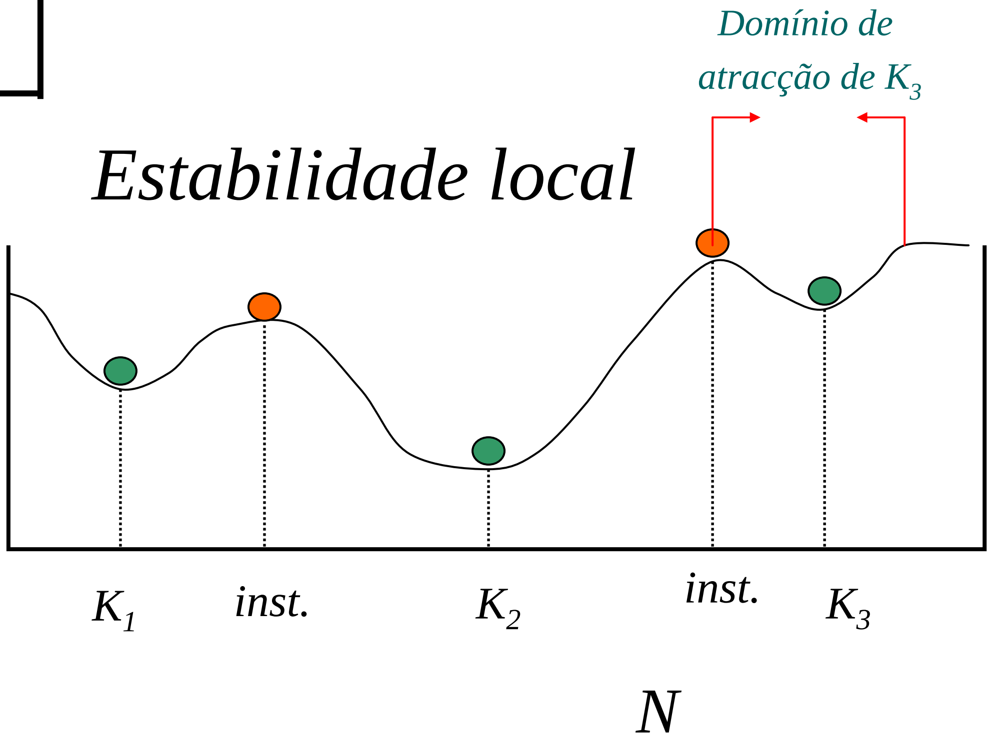
Pequenas perturbações quantitativas em N podem causar grandes alterações qualitativas a medio-longo prazo !

Estabilidade global e local

Estabilidade global



Estabilidade local



Resumo e alerta

b e *d* devem ser funções de *N*

Estas funções não são necessariamente lineares

Propensão para criar dinâmicas com equilíbrios múltiplos, alguns dos quais instaveis.

Perturbações em N podem gerar a médio-longo prazo grandes alterações contra-intuitivas: as "coisas" não voltam necessariamente a ser o mesmo.