Modelos Biomatemáticos - aulas Teórico-Práticas

2005/2006

1 Capítulo 2

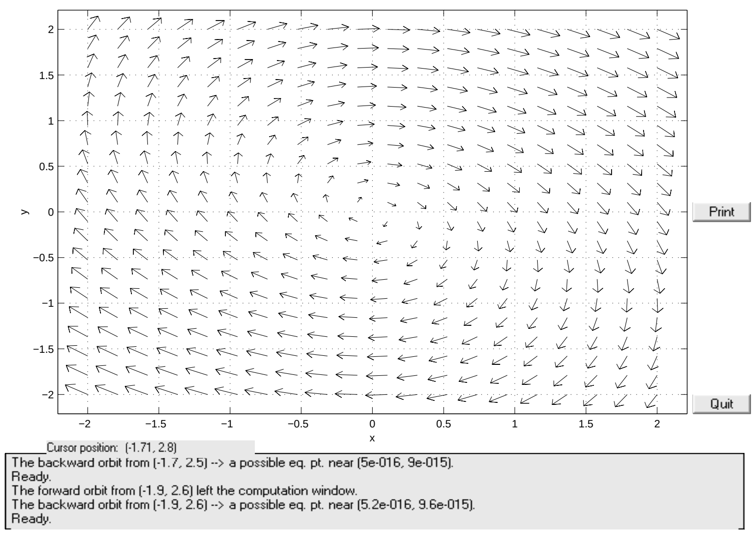
Nulclinas, equilíbrios e campos vectoriais

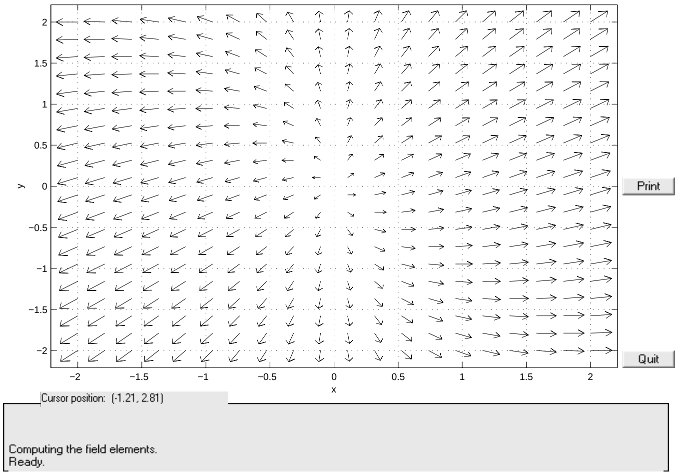
1. Determine as nulclinas e os equilíbrios dos seguintes sistemas de equações diferenciais

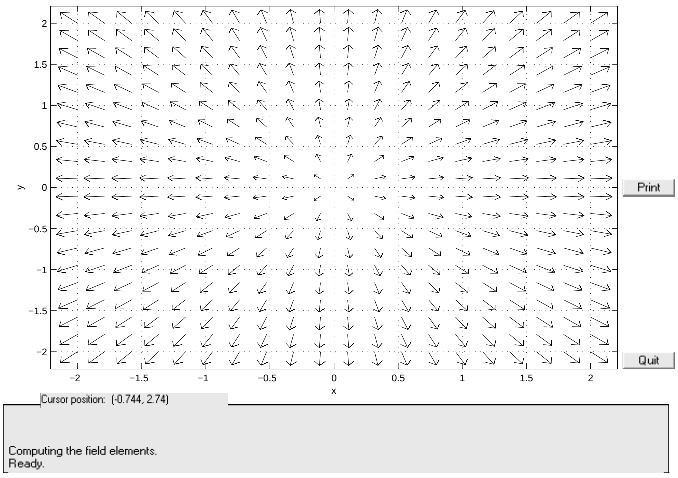
$$a)\ \begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= x^2 - y \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x' &= x(2-y) \\ y' &= y\left(-1 + \dfrac{x}{2}\right) \end{cases} \quad x, y \geq 0$$

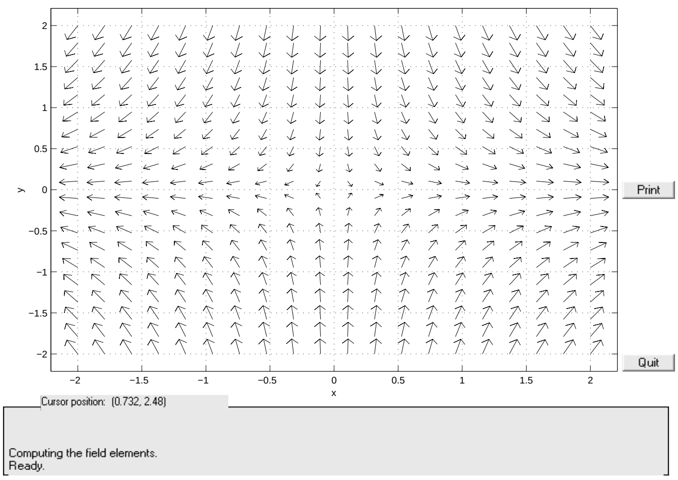
   Esquematize o campo vectorial correspondente a cada um dos sistemas.

2. Nas figuras seguintes estão indicados campos vectoriais.









Cada um dos seguintes sistemas de equações diferenciais está associado a exactamente um dos campos vectoriais anteriores. Associe os sistemas às correspondentes figuras.

$$a)\ \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= x_1 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= x_2 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= x_1 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= -2x_2 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= x_1 + 2x_2 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= -2x_1 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= 2x_1 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= x_1 + x_2 \end{cases}$$

Linearização e sistemas lineares

3. Determine a linearização dos sistemas do exercício 1) em cada um dos seus equilíbrios. Faça o mesmo para os sistemas

$$a)\ \begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= x + y - 2 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x' &= y + 1 \\ y' &= x^2 + y \end{cases}$$

4. O sistema

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X(t)$$

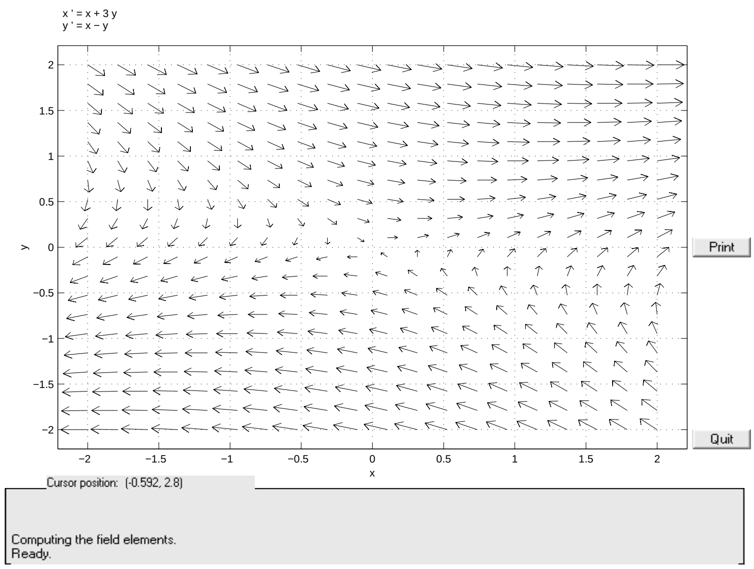
tem dois valores próprios reais distintos um dos quais é -2.

a) Determine o outro valor próprio e os vectores próprios associados a ambos os valores próprios.

b) Escreva a solução geral do sistema.

c) O campo vectorial do sistema está esquematizado na figura.

Esquematize as rectas correspondentes aos vectores próprios. Descreva como se comportam soluções com diferentes condições iniciais.



5. Considere o sistema de equações diferenciais da forma $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX$ onde A é uma matriz 2×2. Determine a estabilidade do equilíbrio $(0,0)$ e classifique-o (nó estável, nó instável, sela, espiral estável, espiral instável ou centro) supondo

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad b)\ A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \quad c)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$d)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \quad e)\ A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad f)\ A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Utilizando quando possível o teorema de linearização, estude a estabilidade dos equilíbrios dos sistemas considerados nos exercícios 1) e 3) e classifique-os.

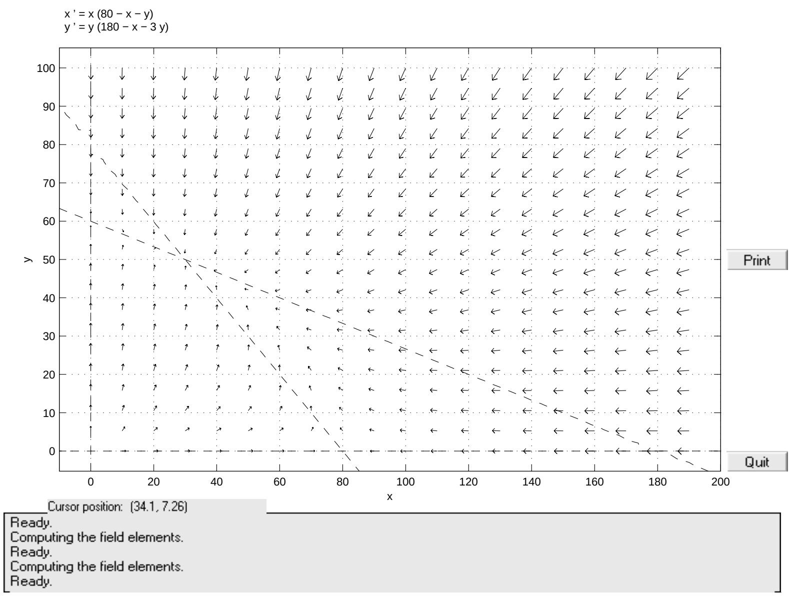
Competição e predação entre duas espécies

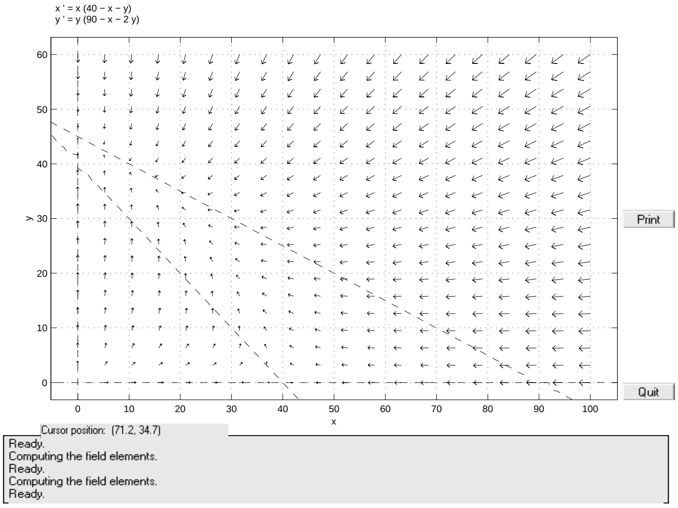
7. Considere um sistema competitivo com duas espécies x e y. Sabe-se que o efeito de 5 indivíduos da espécie y sobre a espécie x é o mesmo de o efeito se 4 indivíduos da especie x sobre a própria espécie x.. Quanto vale c_{xy}?

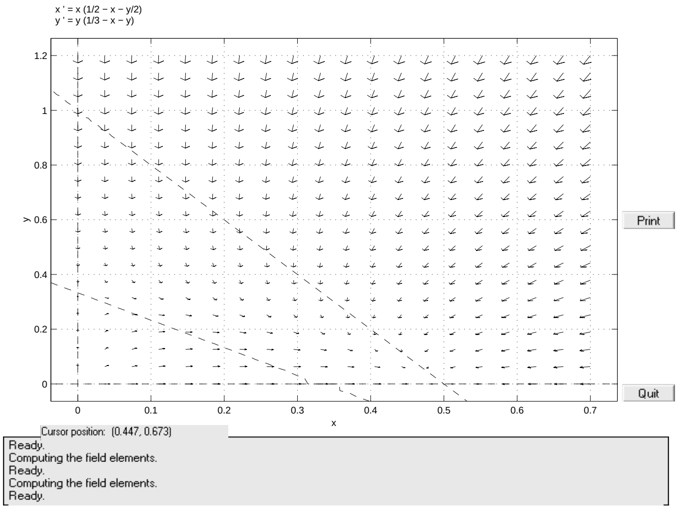
8. Mostre que o retrato de fase de cada um dos seguintes sistemas L-V que modelam a competição entre duas espécies é o que está representado em baixo na figura correspondente. Em cada caso estude a estabilidade dos equilíbrios, classifique-os e determine o resultado da competição.

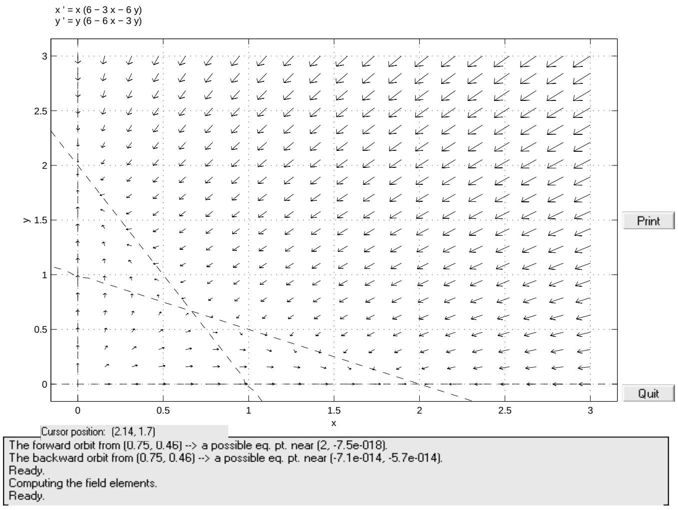
$$a) \begin{cases} x' &= x(80 - x - y) \\ y' &= y(120 - x - 3y) \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x' &= x(40 - x - y) \\ y' &= y(90 - x - 2y) \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x' &= x\left(\frac{1}{2} - x - \frac{y}{2}\right) \\ y' &= y\left(\frac{1}{3} - y - x\right) \end{cases} \qquad d) \begin{cases} x' &= x(6 - 3x - 6y) \\ y' &= y(6 - 6x - 3y) \end{cases}$$









9. Considere o retrato de fase do sistema 8a). Esboçe a trajectória $(x(t), y(t)),\ t \geq 0$ desse sistema tal que $(x(0), y(0)) = (10, 40)$. Esboçe também numa mesma figura os

gráficos das funções $t \to x(t)$, $t \to y(t)$ que correspondem a essa trajectória.

10. No exercício 8) foram considerados casos particulares do seguinte modelo de Lotka-Volterra para a competição entre duas espécies:

$$\begin{cases} x' &= r_1 x \left(1 - \dfrac{x}{K_1} - \dfrac{c_{xy}}{K_1} y\right) \\ \\ y' &= r_2 y \left(1 - \dfrac{y}{K_2} - \dfrac{c_{yx}}{K_2} x\right) \end{cases} \qquad x, y \geq 0.$$

a) Recorde as hipóteses que levam à construção do modelo anterior e o significado biológico das constantes.

Suponha $c_{yx}K_1 < K_2$ e $c_{xy}K_2 < K_1$.

b) Desenhe as nulclinas e esboce o retrato de fase do sistema.

c) Determine analiticamente os equilíbrios e utilize o resultado obtido em b) para determinar a sua estabilidade.

(*) Confirme os resultados obtidos com o método de linearização. Consegue classificar o equiíbrio não trivial?

d) Descreva as suas conclusões, quer em termos matemáticos quer em termos biológicos.

Faça o mesmo quando $c_{yx}K_1 > K_2$ e $c_{xy}K_2 > K_1$.

11. Suponha que a interacção entre coelhos e raposas é modelada pelo sistema presa-predador de Lotka-Volterra. Um agricultor quer reduzir o número médio de coelhos no ecossistema e alguém sugere a introdução no mesmo de mais raposas.

    a) Seja $x(t)$ o número de coelhos no instante t. Como se define matemáticamente o número médio de coelhos ? (**0.5**)

    b) Acha que a estratégia referida vai resolver o problema do agricultor? Justifique referindo explicitamente quais as propriedades do sistema presa-predador que utiliza. (**2**)

12. Associe, quando possível, cada uma das funções seguintes a uma resposta funcional de Holling de tipo I, II ou III:

$F(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $F(x) = xe^{-x^2}$, $F(x) = \dfrac{ax}{bx+c}$, $a, b, c > 0$, $F(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$, $F(x) = \min\{3x, 5\}$.

13. (*) (*Redução do numero de parâmetros no modelo de Lotka-Volterra*) Seja $(x(t), y(t))$ uma solução do sistema predador presa de Lotka-Volterra. Considere as funções $(u(t), v(t))$ definidas da seguinte forma:

$$u(t) = \alpha x(\gamma t), \;\; v(t) = \beta y(\gamma t).$$

onde α, β, γ são parâmetros positivos. Mostre que o par $(u(t), v(t))$ é solução do sistema

$$\begin{cases} u' &= r\gamma u \left(1 - \dfrac{\mu}{r\beta} v\right) \\ \\ v' &= d\gamma v \left(-1 + \dfrac{h\mu}{\alpha d} u\right) \end{cases}$$

Escreva o sistema que se obtém escolhendo $\alpha = \dfrac{h\mu}{d}$, $\beta = \dfrac{\mu}{r}$, $\gamma = \dfrac{1}{r}$, e, definindo $\delta = \dfrac{d}{r}$, observe que o sistema obtido depende unicamente do parâmetro δ.

14. Considere a seguinte modificação do sistema presa-predador de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} x' &= rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right) - \mu xy = x\left(r - \dfrac{r}{K}x - \mu y\right) \\ \\ y' &= (-d + h\mu x)y \end{cases}$$

a) Explique a fundamentação biológica do modelo.

b) Esboce as nulclinas e o campo vectorial associado ao sistema quando $K < \dfrac{d}{h\mu}$. Determine os equilíbrios e estude a sua estabilidade.

c) Faça o mesmo quando $K > \dfrac{d}{h\mu}$. Mostre que neste caso $(K, 0)$ é uma sela e que o equilíbrio não trivial

$$\left(\frac{d}{h\mu}, \frac{r}{\mu}\left(1 - \frac{d}{h\mu K}\right)\right)$$

é estável.

d) O modelo exibe o efeito de Volterra? Justifique.

e) Considere agora a seguinte afirmação: *"se o equilíbrio não trivial (x^*, y^*) do modelo anterior for tal que K é muito maior do que x^*, então em torno desse equilíbrio o termo $\frac{rx^2}{K}$ é desprezável em relação ao termo rx. Logo, neste caso, o modelo de Lotka-Volterra é adequado para descrever o comportamento assimptótico da interacção presa-predador em torno do equilíbrio e não é preciso considerar o sistema modificado"*. Parece-lhe esta afirmação apropriada? Justifique.

15. O seguinte sistema modela um sistema predador-presa

$$\begin{cases} x' &= 3x\left(2 - \dfrac{x}{20}\right) - \dfrac{xy}{x+10} \\ \\ y' &= y\left(\dfrac{x}{x+10} - \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

a) Explique as hipóteses que levam à construção do modelo. Dê uma justificação biológica para a escolha do tipo de resposta funcional.

b) Determine as isoclinas, os equilíbrios e esboce o campo vectorial associado ao sistema

c) Mostre que o equilíbrio não trivial é uma espiral instável.

d) Na figura abaixo é representado o retrato de fase do sistema em discussão. Considere a região do plano (x, y) limitada pelo troço de trajectória representada na figura e pela recta $x = 35$. Use um argumento geométrico para provar que a solução do sistema que satisfaz $x(0) = 35, y(0) = 60$ está contida nessa região para todo o $t \geq 0$. Tendo em conta também a alínea c), conclua que o sistema admite uma órbita periódica