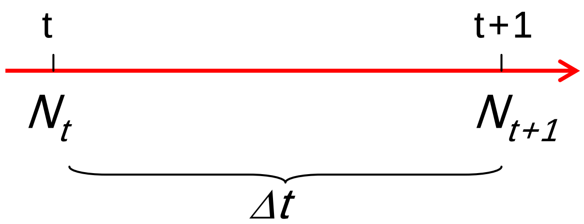
Modelos discretos

Introdução aos modelos discretos não-lineares

Medidas de variação de N



$\Delta N = N_{t+1} - N_t$ *Variação absoluta*

$$\frac{N_{t+1} - N_t}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t}$$ *Variação média em Δt (variação tempo^{-1})*

$$\frac{1}{N_i}\frac{\Delta N}{\Delta t}$$ *Variação média relativa ≡ % variação*

Equação às diferenças

$$\frac{N_{t+1}}{N_t} = \lambda$$

λ = taxa finita de incremento

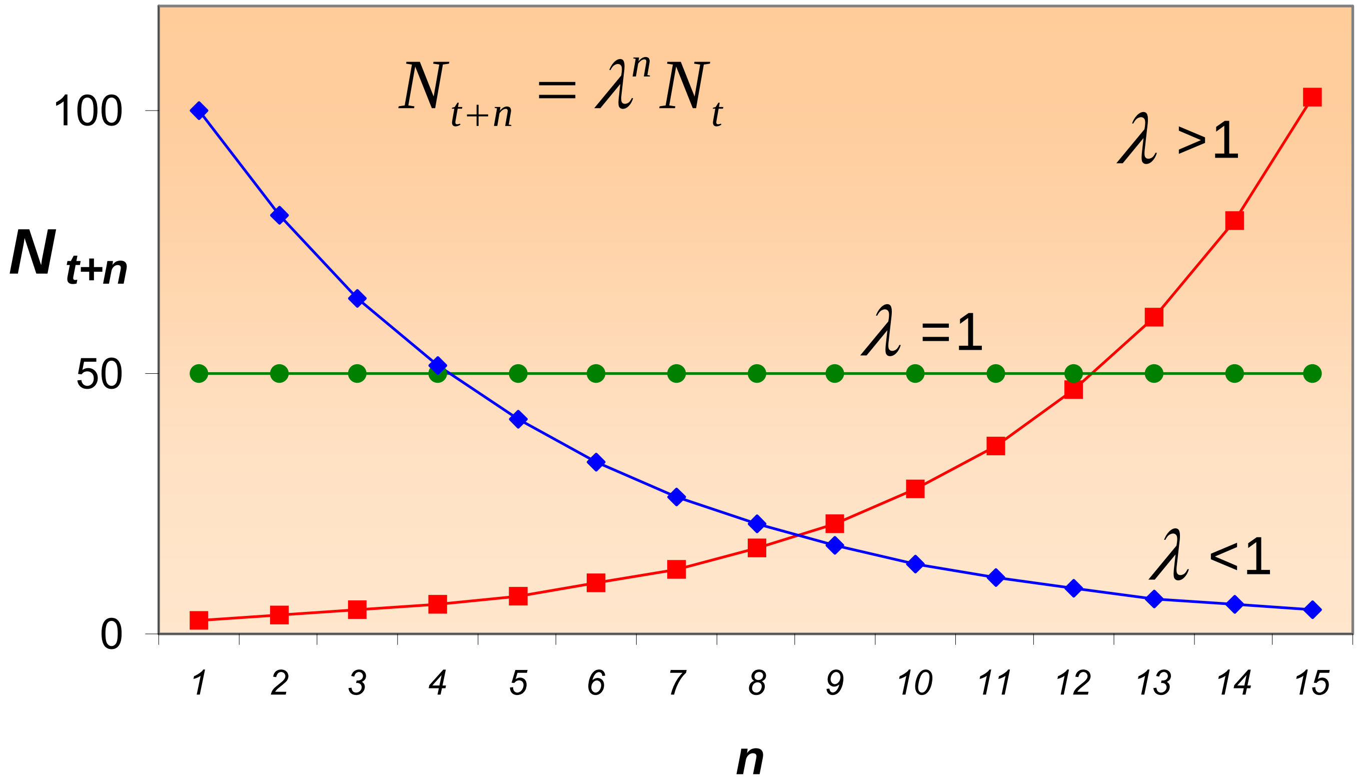
$$N_{t+1} = \lambda N_t$$

Eq. às diferenças, linear, de 1ª ordem

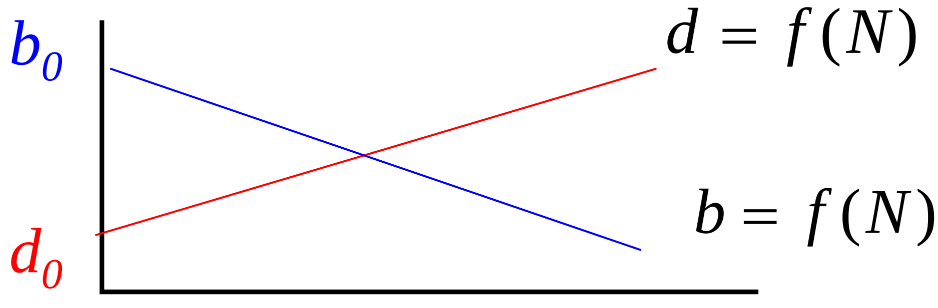
$$N_{t+n} = \lambda^n N_t$$

solução

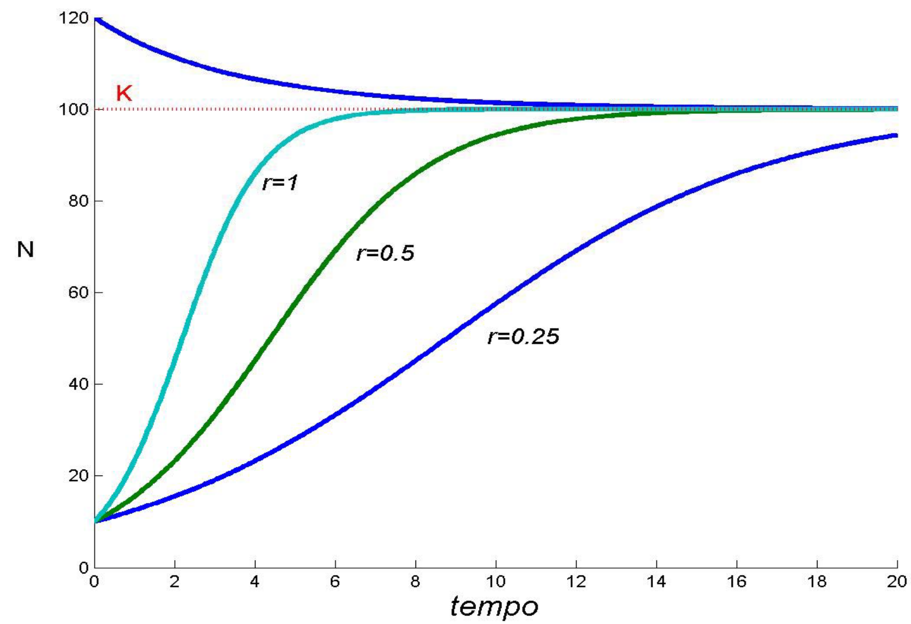
Crescimento geométrico



Regulação dependente da densidade
Crescimento contínuo – a eq logística -



$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

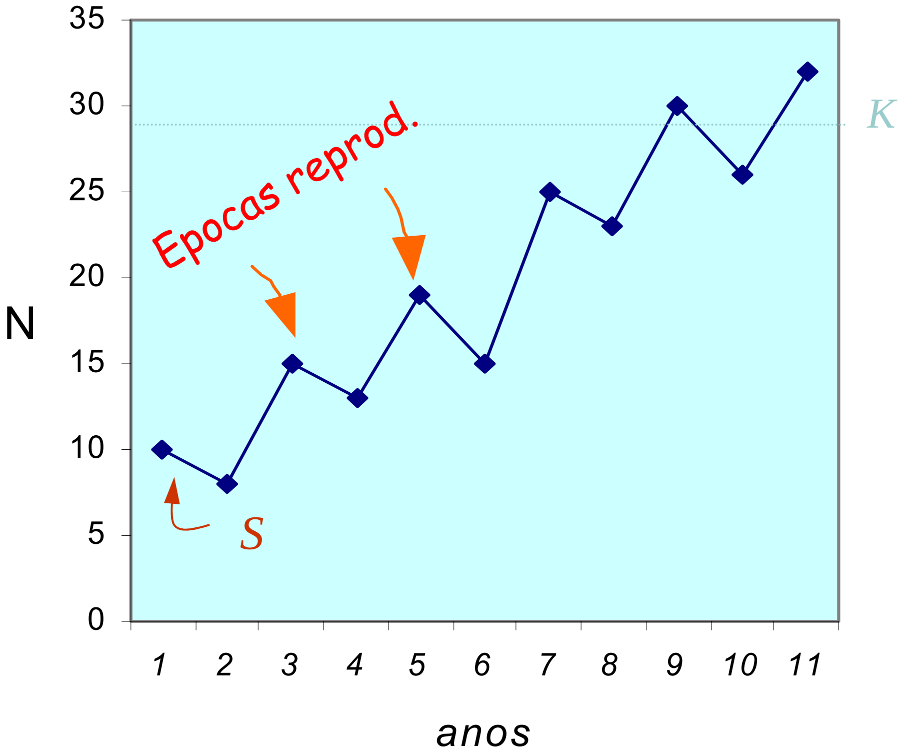


Reprodutores sazonais

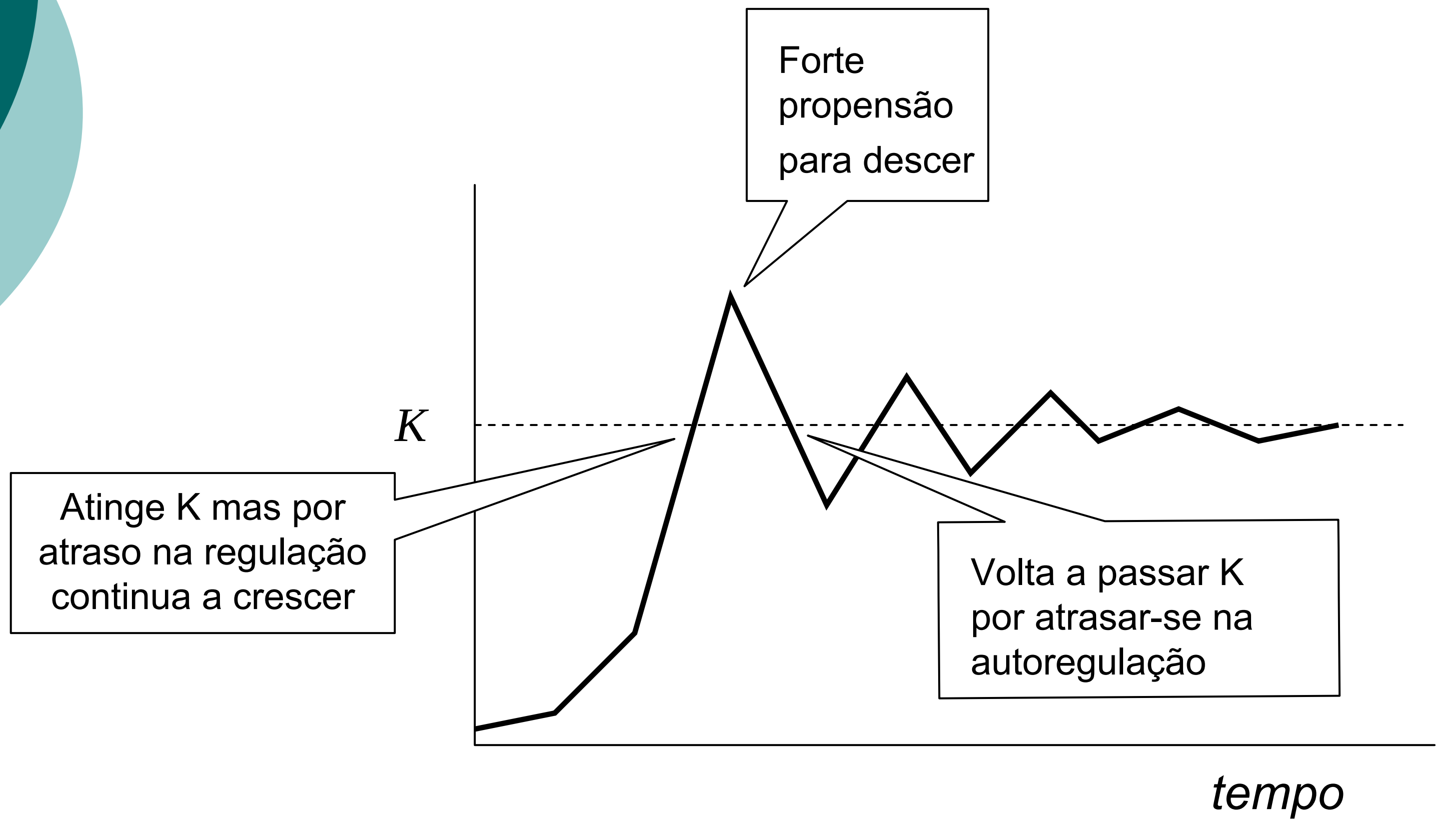
Regulação não é instantânea

Explo: impulsos de crescimento populacional na época reprod.

População pode ultrapassar K entre 2 épocas reprodução



Atrasos e oscilações



Discretização do tempo

$N_{t+1} = f(N_t)$ *Se* $f(N_t) = \lambda N_t$ $\rightarrow$ *cresc. geometrico*

Por ex[plo]*, a partir da logística dos contínuos:*

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \approx \frac{N_{t+\Delta t} - N_t}{\Delta t} = rN_t\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$$

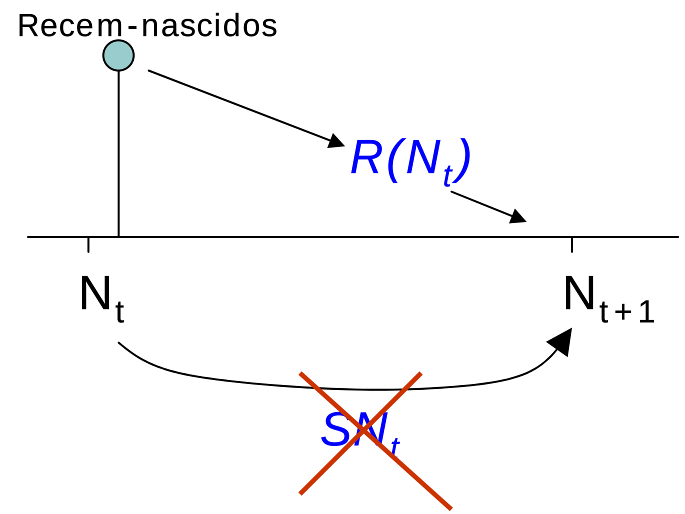
pondo $\Delta t = 1$

$$\boxed{N_{t+1} = N_t + rN_t\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)}$$

Decomposição em "recrutas" e adultos sobreviventes

$N_{t+1} = f(N_t)$

$$N_{t+1} = R(N_t) + \cancel{SN_t}$$



Os pais morrem após a reprodução

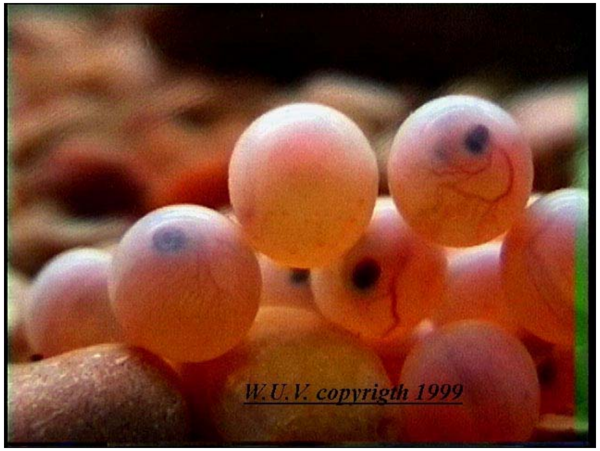
Plantas anuais
Vários insectos
Salmão

$$N_{t+1} = R(N_t)$$

Relação "stock-recrutamento"

Salmão: Reprodutor sazonal c/ gerações separadas

Desova e canibalismo



Equação de Ricker

Variação instantânea do núm "larvas"

$$\frac{dL}{dt} = -\left(d_1 N_t + d_2\right)L$$

Mortalidade por predação

Mortalidade natural

Solução dá o núm larvas que reiniciam a população: $L(\Delta t) = N_{t+1}$

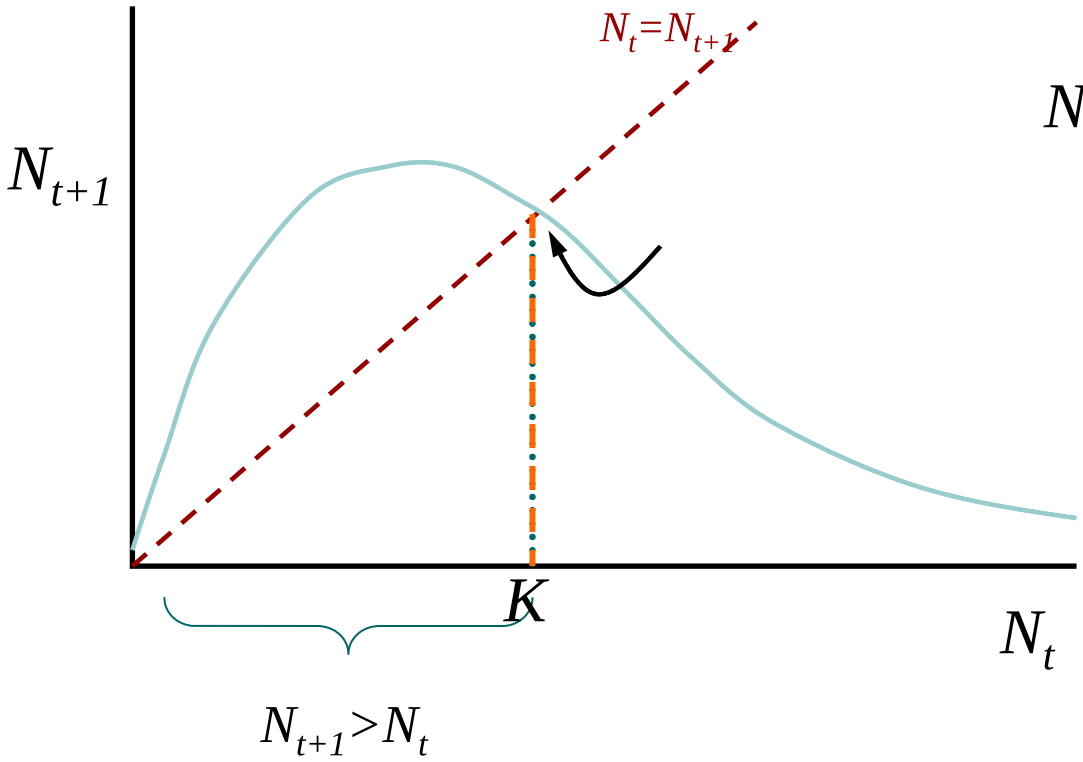
$$N_{t+1} = bN_t\, e^{-\left(d_1 N + d_2\right)}$$

Após alguma manipulação

A equação de Ricker

$$\boxed{N_{t+1} = N_t\, e^{r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)}}$$

Relação stock-recrutamento de Ricker



Se $N_t=0$, $N_{t+1}=0$

N_t *alto* ➔ N_{t+1} *baixo*

Equações às diferenças não-lineares

Logístico

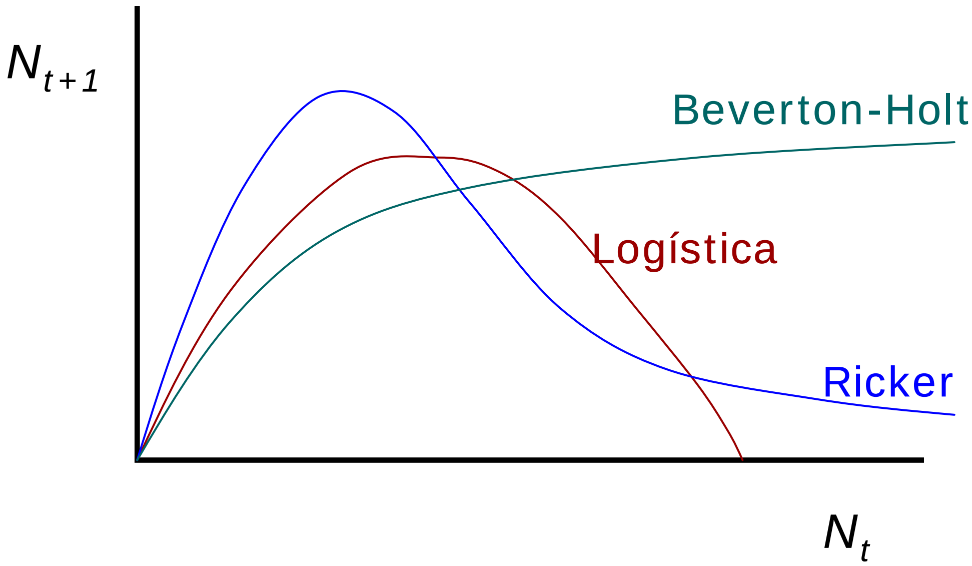
$$N_{t+1} = N_t + rN_t\left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{N_{t+1}}{N_t} = \underbrace{1 + r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)}_{\lambda_t}$$

Ricker

$$N_{t+1} = N_t\, e^{r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{N_{t+1}}{N_t} = \underbrace{e^{r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)}}_{\lambda_t}$$

Ricker, logística, Beverton-Holt

$$N_{t+1} = f(N_t)$$

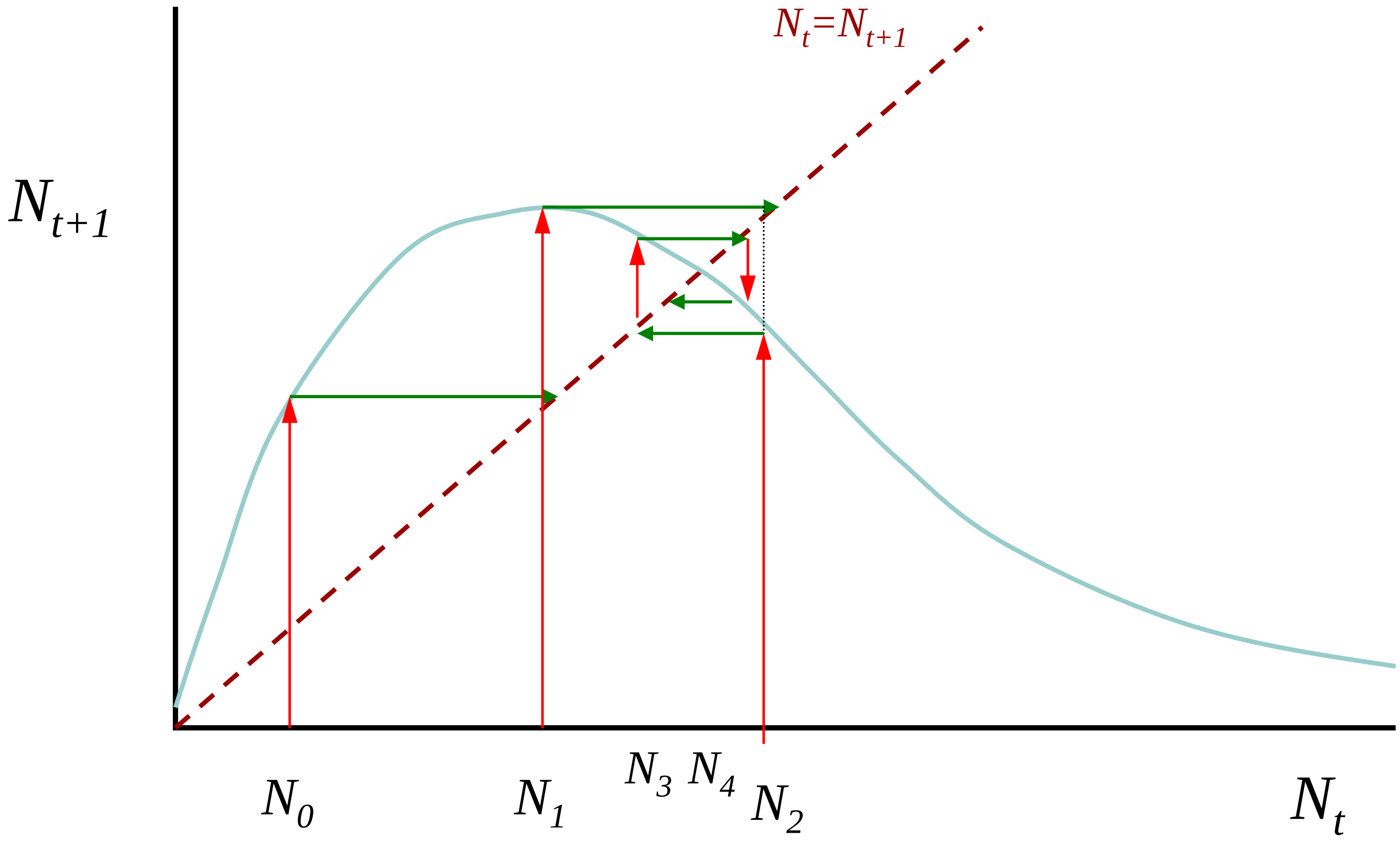


$$N_{t+1} = \frac{c_1 N_t}{1 + c_2 N_t}$$

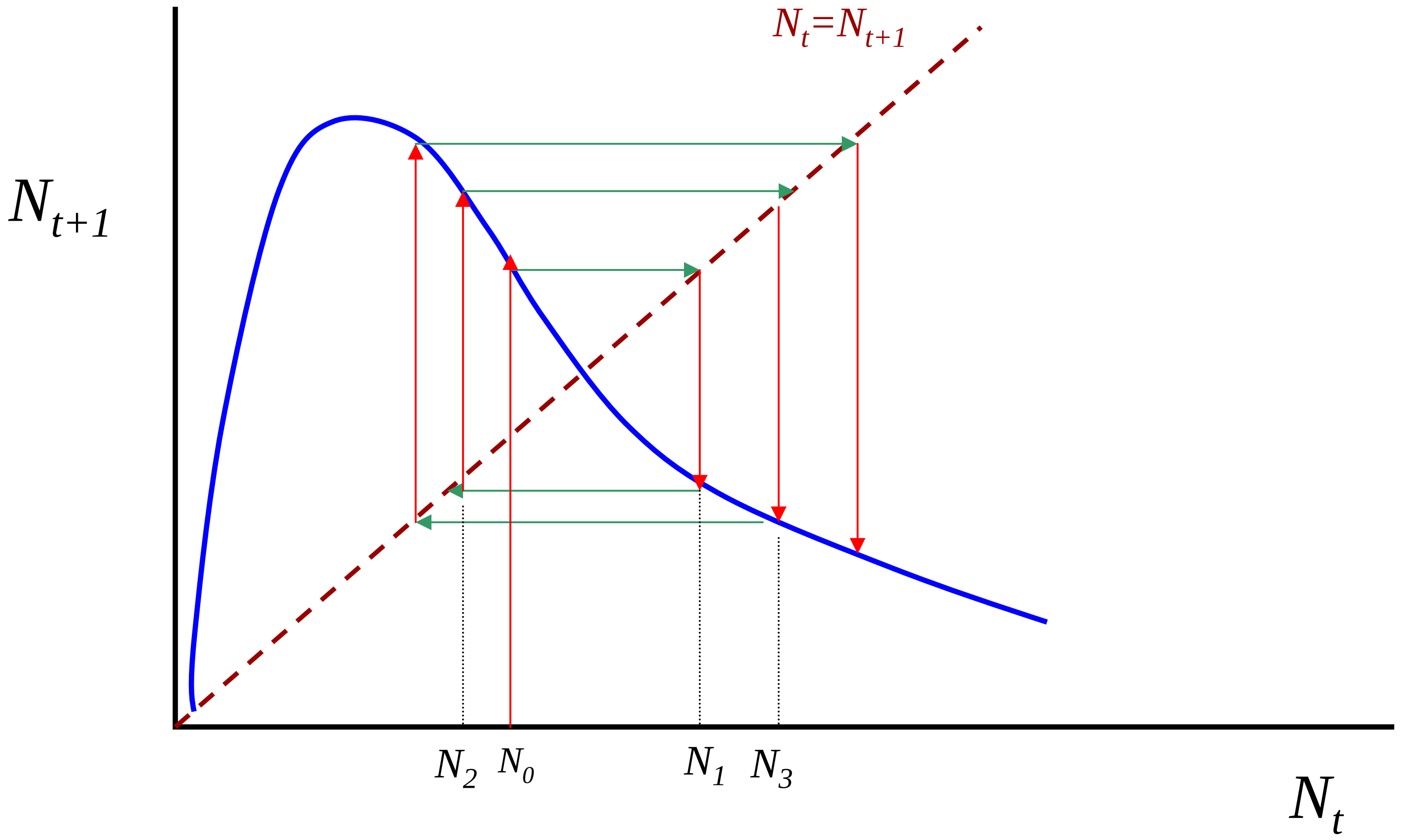
$$N_{t+1} = N_t + rN_t\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$$

$$N_{t+1} = N_t e^{r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)}$$

O equilíbrio não-trivial é estavel ?



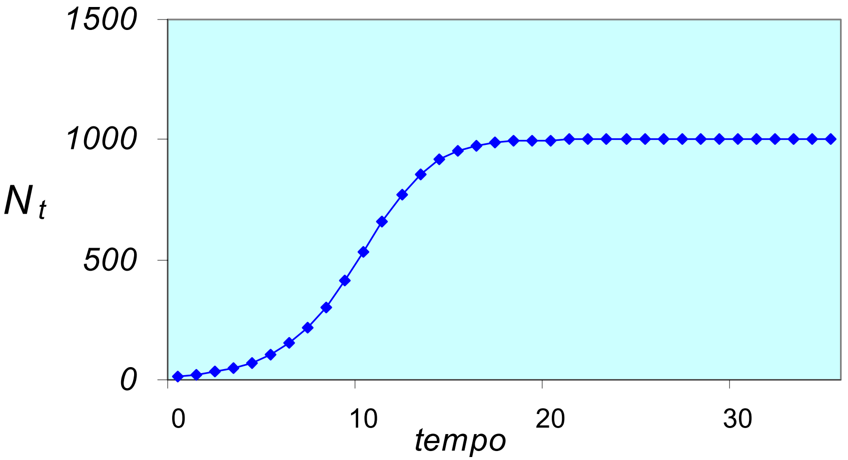
K não é necessariamente equilíbrio estável



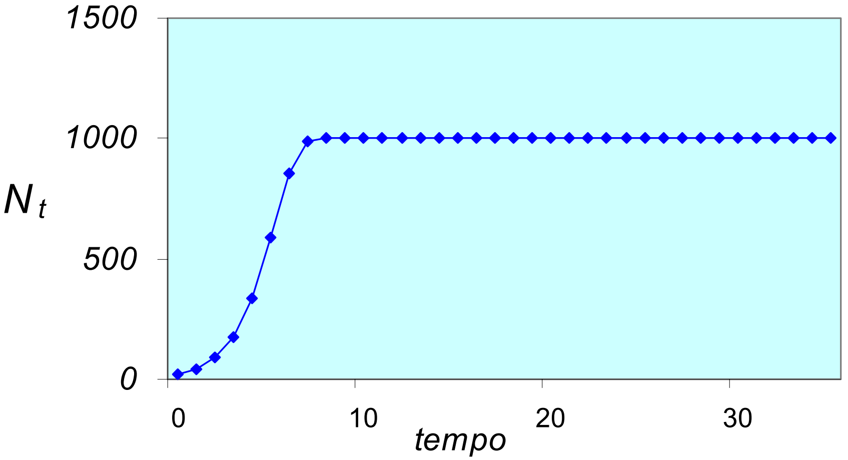
Eq. Logística discreta

$$N_{t+1} = N_t + r\,N_t\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$$

$r = 0.5$



$r = 1.1$



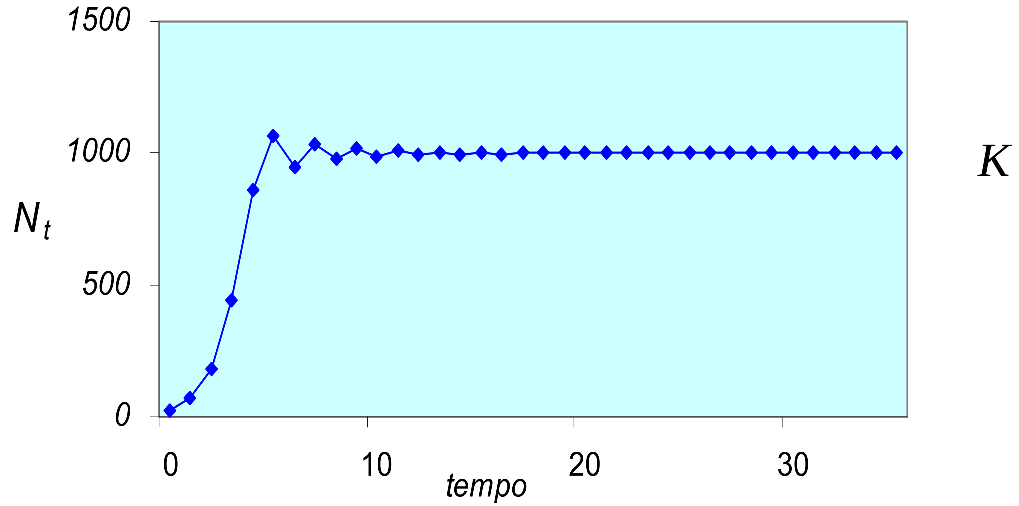
Tendência monotónica para K

K é equilíbrio pontual

Surgem oscilações amortecidas ...

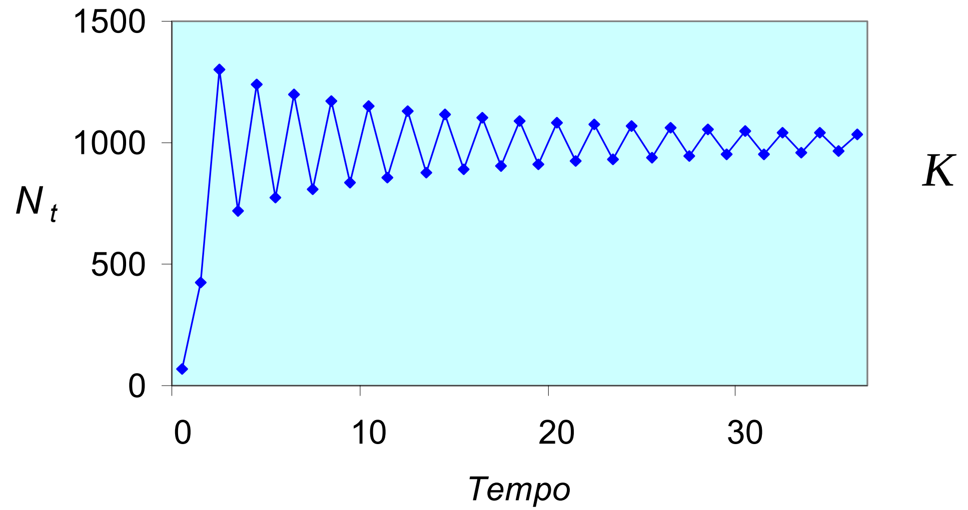
$r = 1.7$

Oscilações amortecidas para K



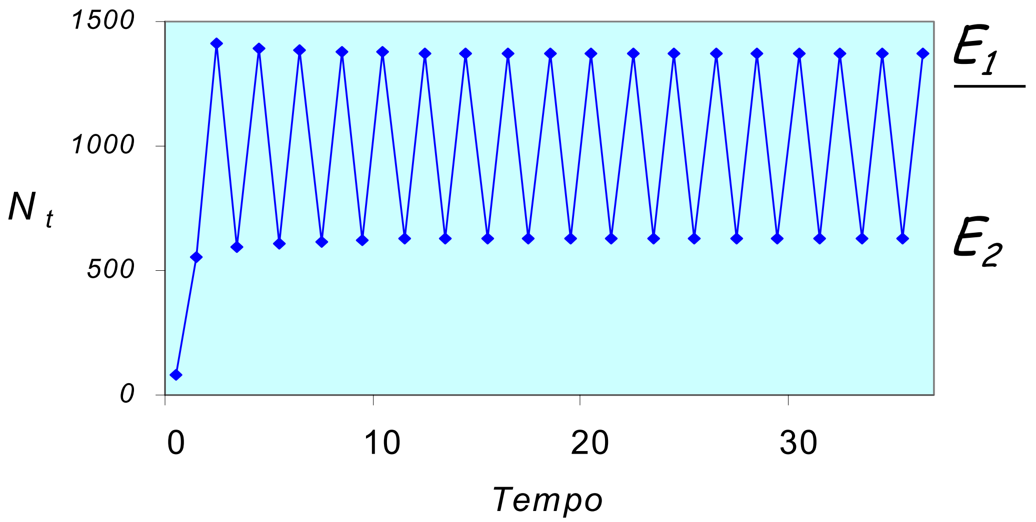
$r = 1.95$

K é ainda um equilíbrio pontual



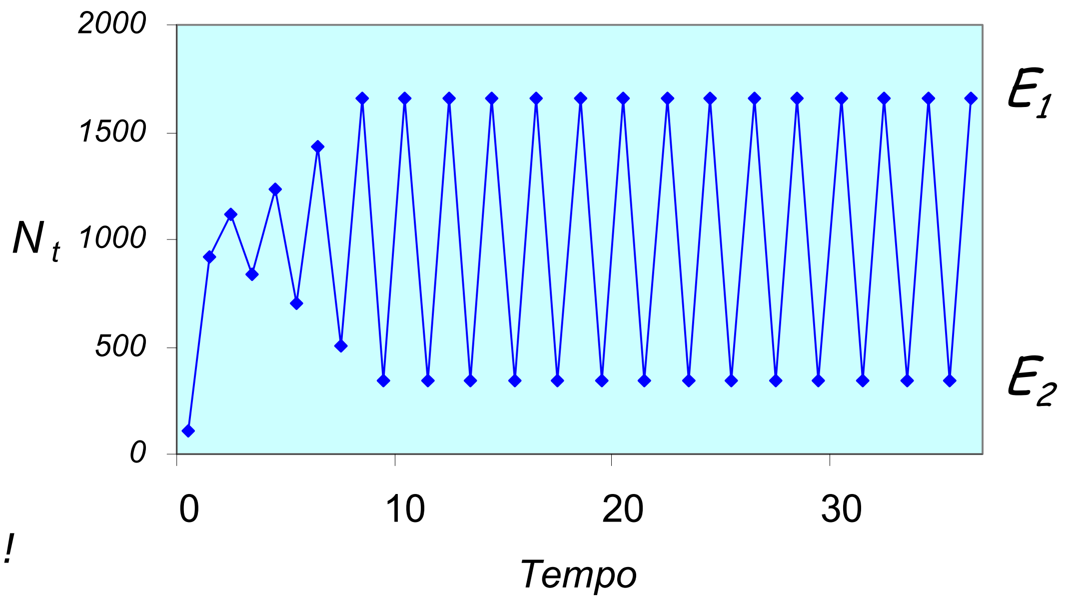
... que se tornam oscilações sustentadas

$r = 2.1$



K bifurca-se em dois equilíbrios

$r = 2.4$



Surge um equilíbrio cíclico

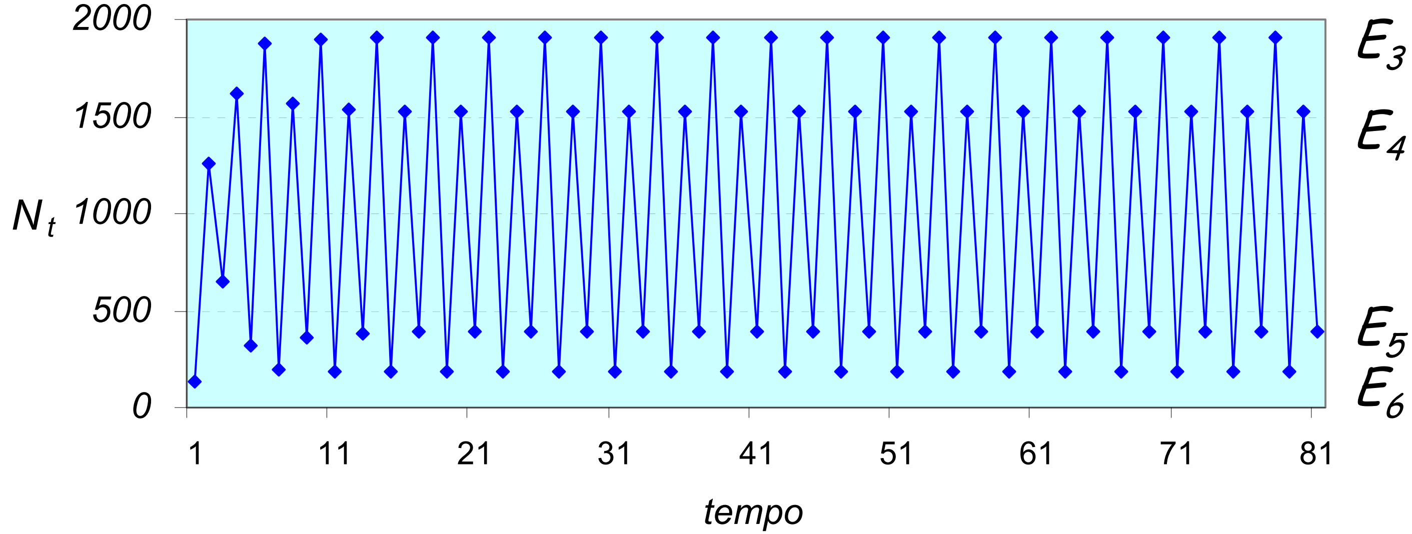
Uma população pode oscilar mesmo em ambiente constante !

Os pontos de equilibrio bifurcam-se de novo

$r = 2.6$

$E_1 \rightarrow E_3, E_4$

$E_2 \rightarrow E_5, E_6$

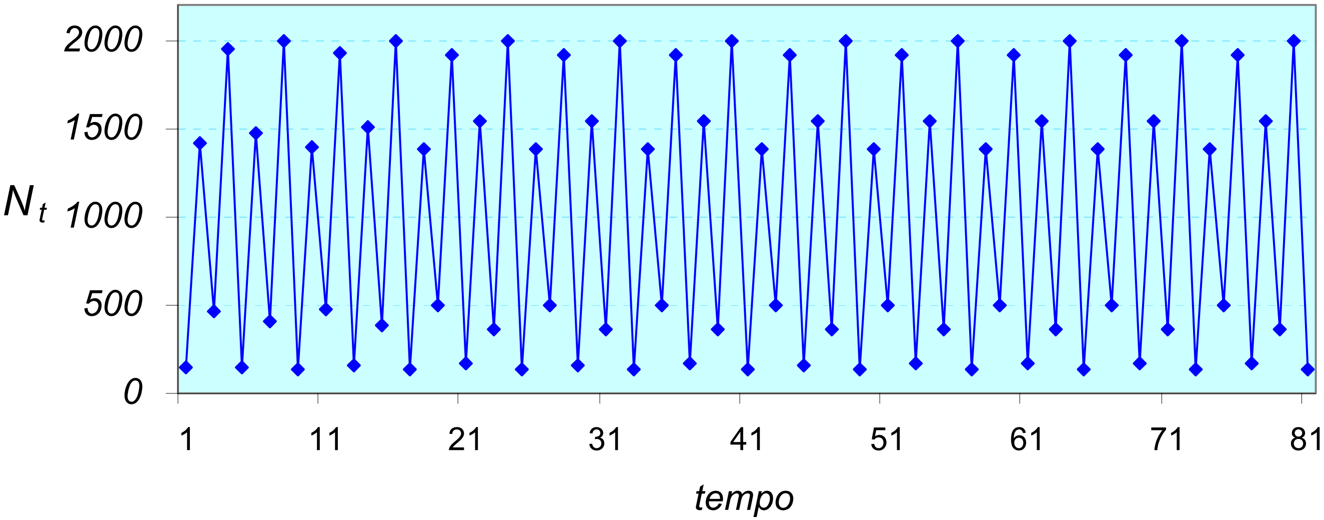


$$2^1 \longrightarrow 2^2$$

Período = número de intervalos de tempo para N_t se repetir

Ciclos de período = 2^n, $n \rightarrow +\infty$

$r = 2.68$



Periodo 2^3

Segue-se $n \rightarrow +\infty$

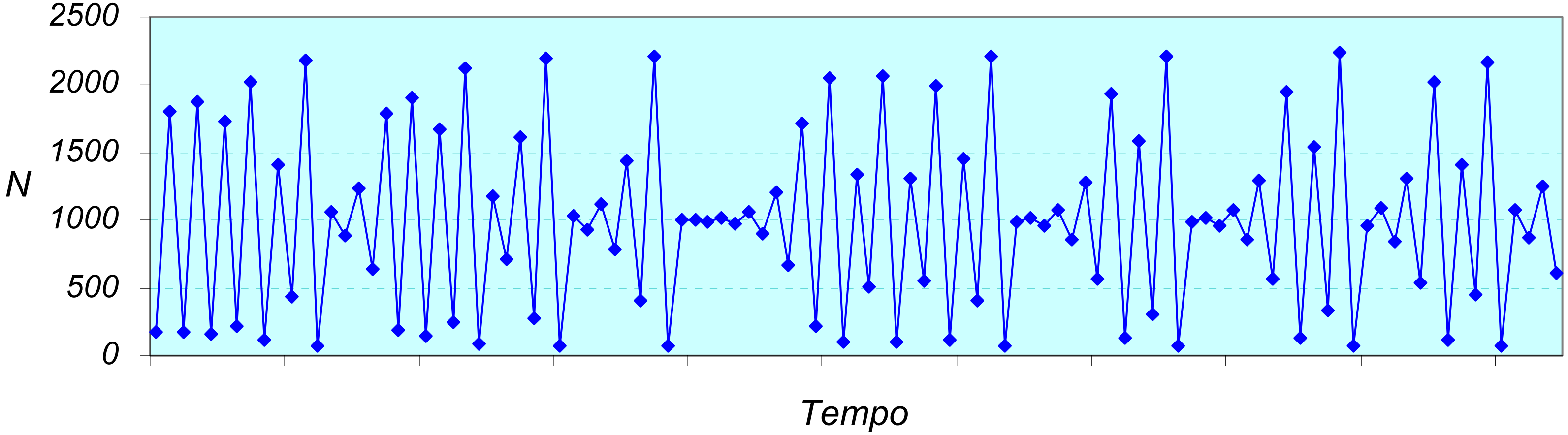
Períodos ímpares

Caos !

Número infinito de pontos de equilíbrio

Trajectórias entram numa região delimitada dentro da qual parecem ruído aleatório

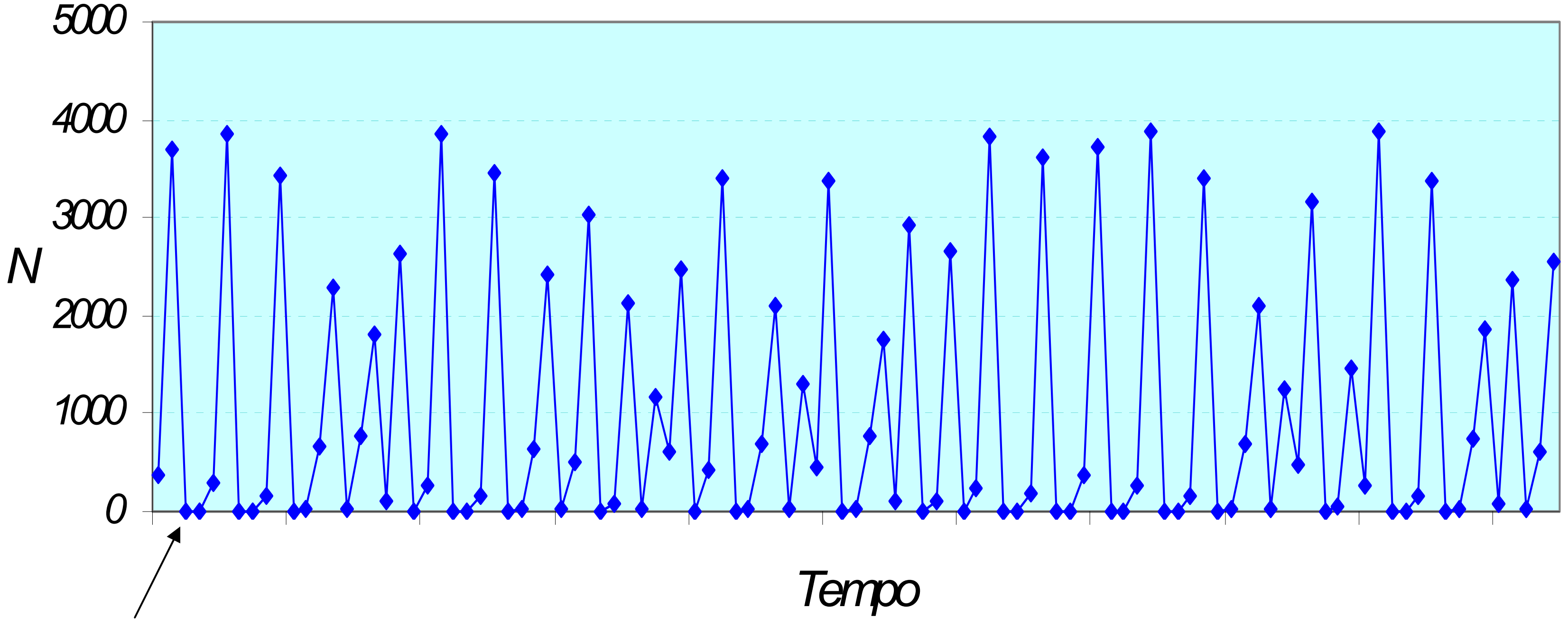
$r = 2.94$



Completa irregularidade das oscilações

Extrema sensibilidade às condições iniciais

Extinção



$r = 3.65$

Características do regime caótico

Não se consegue distinguir de uma série de números aleatórios (completa falta de regularidade).

Contudo, a sucessão não é aleatória: existe uma equação totalmente determinística que gera os sucessivos N_t

N permanece dentro dum intervalo delimitado de valores.

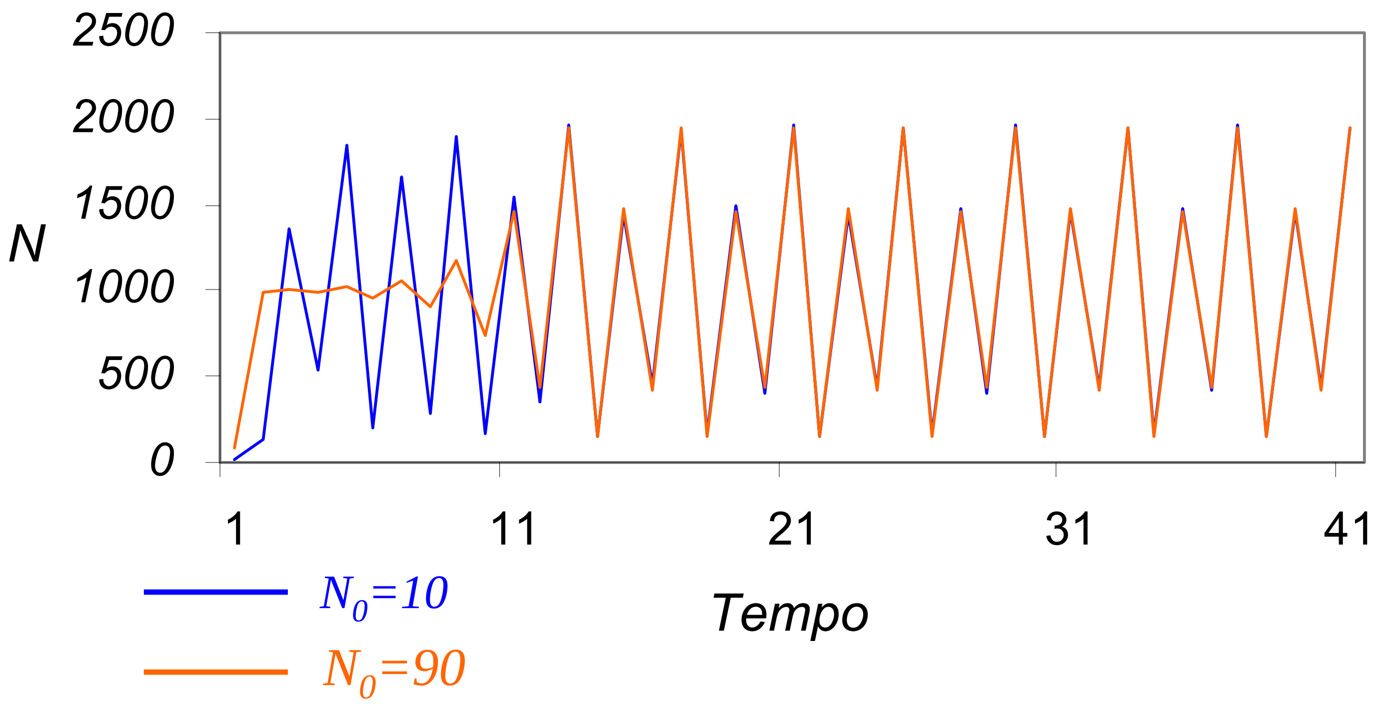
Este intervalo é um "atractor" de N, porém, uma vez lá dentro, N é imprevisível. Um atractor caótico designa-se por "atractor estranho".

As trajectórias de N dentro do atractor são altamente sensíveis às condições iniciais (N_0). (Pequenos desvios em N_0 são imediatamente amplificados)

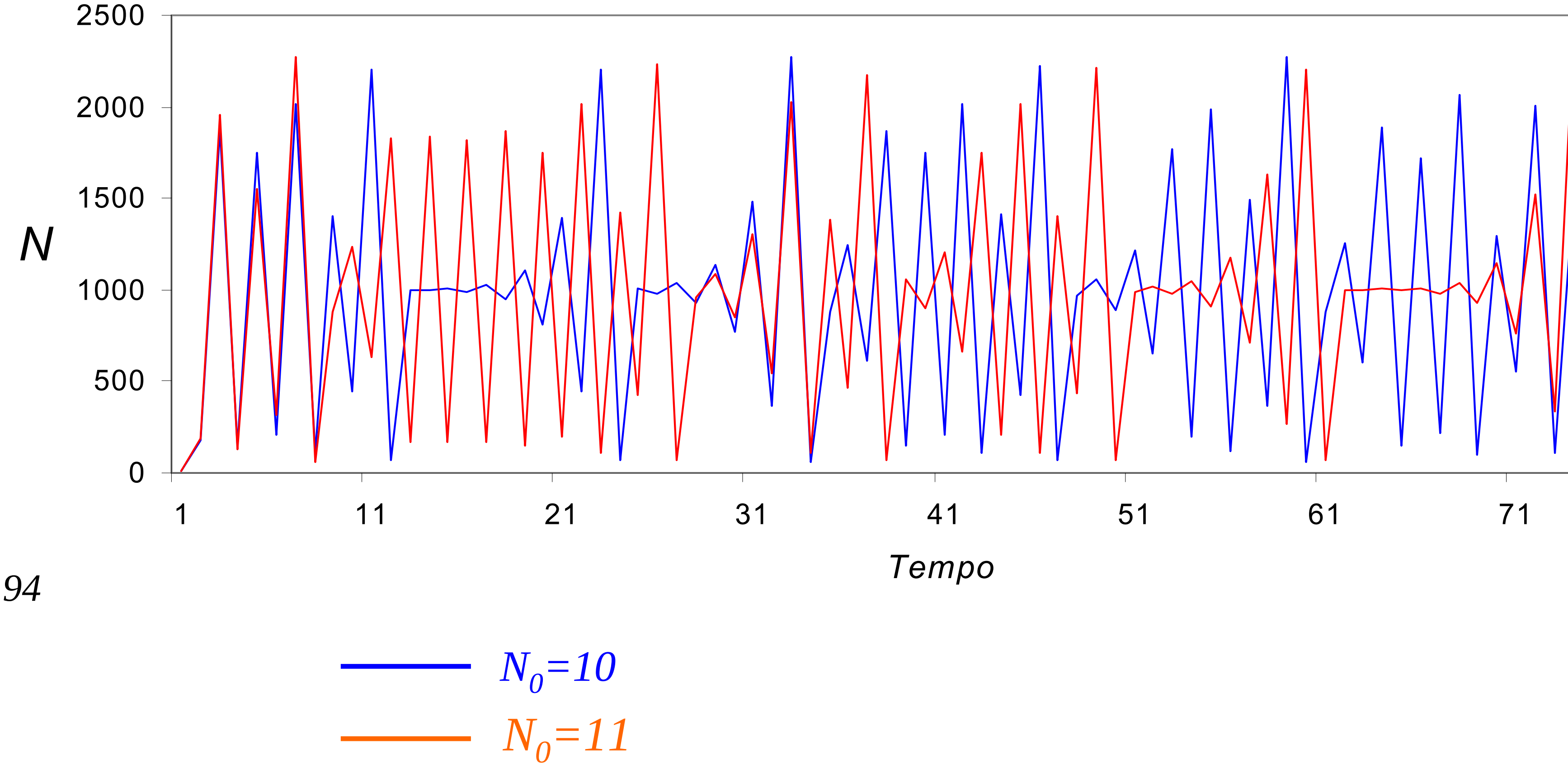
Os equilíbrios cíclicos não são sensíveis às condições iniciais

A trajectoria cíclica atrai qualquer N_0

$r = 2.65$

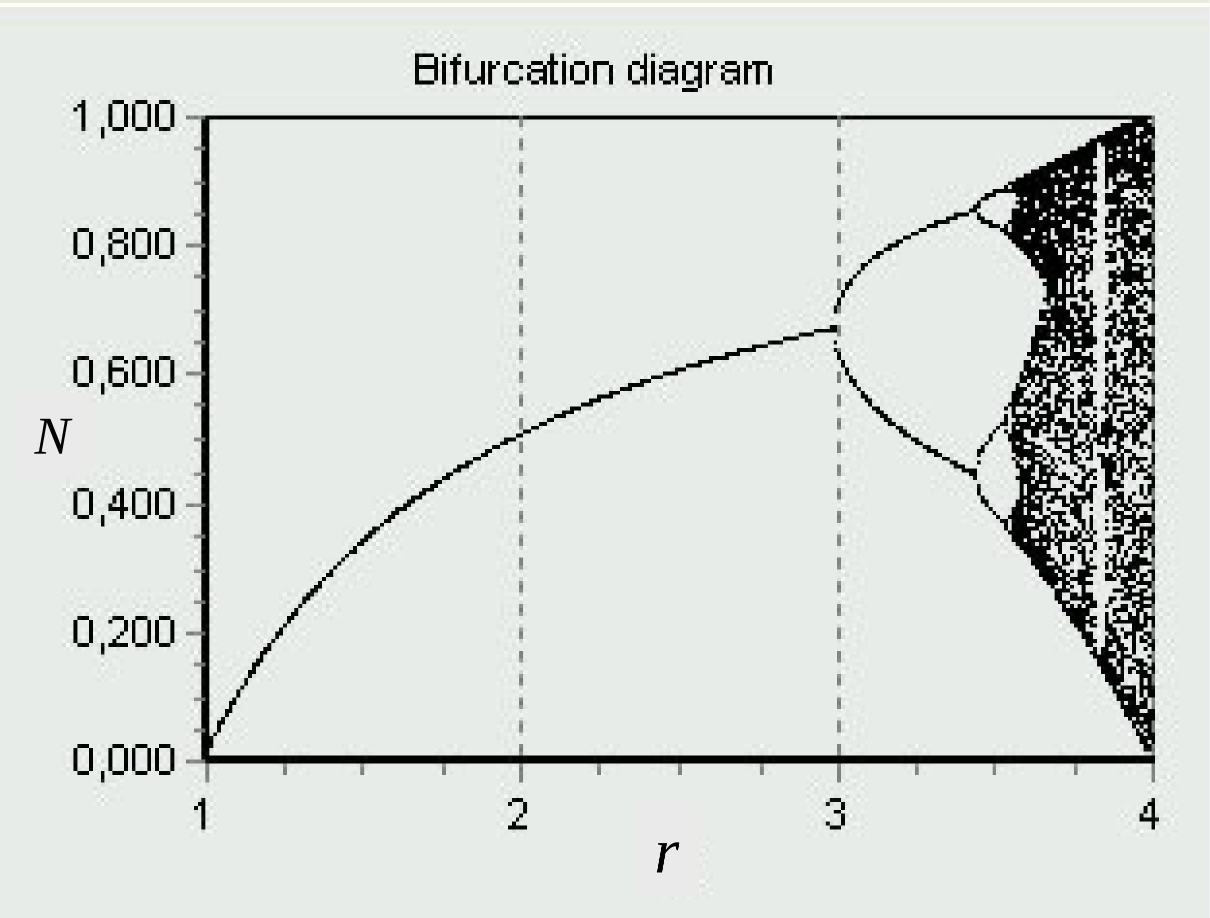


Caos: alta sensibilidade às condições iniciais



r = 2.94

Diagrama de bifurcações



Equações simples com dinâmicas muito complicadas

Ex^{plos} de eqs com potencial para dinâmicas complexas:

$$N_{t+1} = N_t \, e^{r\left(1 - \frac{N}{K}\right)}$$ Eq. de Ricker

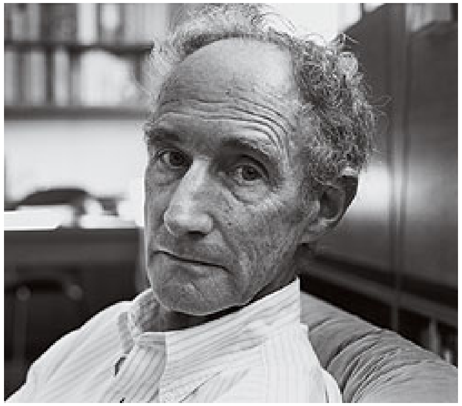
$$N_{t+1} = \frac{c_1 N_t}{1 + c_2 N_t}$$ Eq. de Beverton-Holt

$$N_{t+1} = N_t + rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$ Logistica discreta

Maior realismo biológico ➔ Equações mais complicadas ➔ Maior propensão para complexidade (= maior espaço paramétrico conducente ao caos)

Li, Yorke e May





O caos é descoberto:

Li, TY, and JA Yorke. 1975. Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly* **82**:985-992

E parece uma realidade *possivel* em Ecologia:

May, RM. 1975. Biological populations obeying difference equations: stable points, stable cycles, and chaos. *Jour. Theoretical Biology* **51**:511-524.

May, RM. 1976. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature* **261**:459-467.

Caos e biologia

Exemplos de dinâmica complexa em:

Genética populacional
Fisiologia celular
Neurofisiologia
Fisiologia cardíaca
Modelos contínuos com 2 ou mais espécies em interacção
etc.

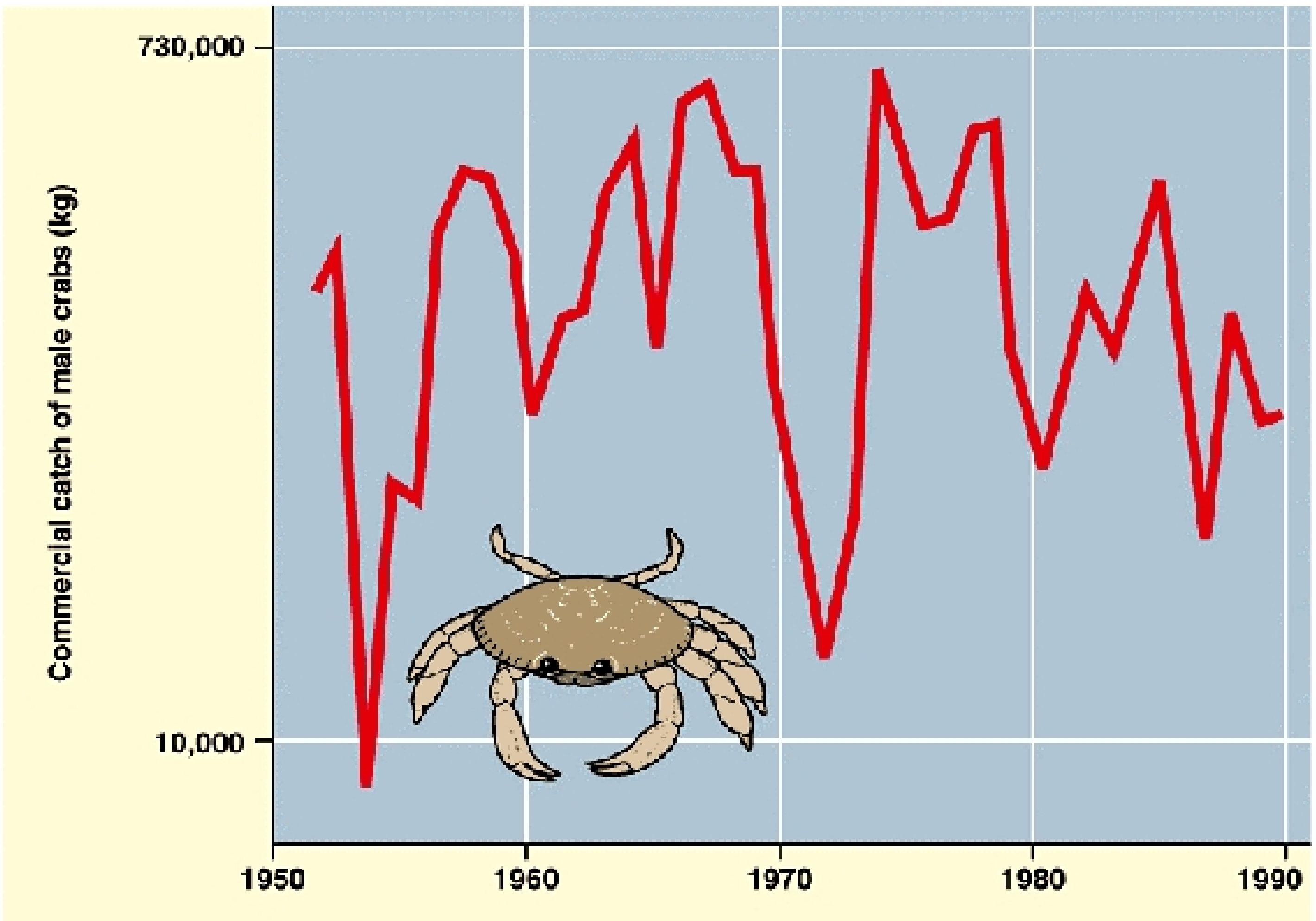
Um atentado às nossas expectativas mundanas:

Processos determinísticos simples devem conduzir a dinâmicas simples

Pequenas perturbações nos sistemas biológicos induzem pequenas alterações na sua dinâmica

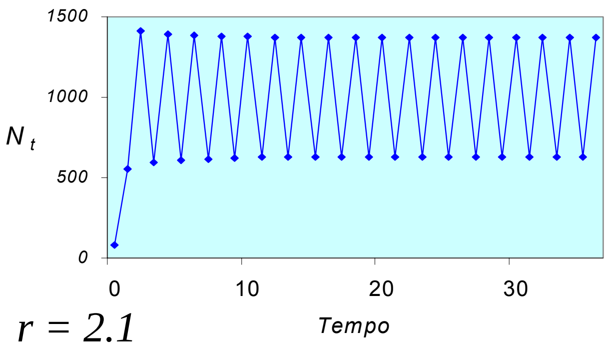
Há populações reais caóticas ?

Figure 52.19 Marked population fluctuations



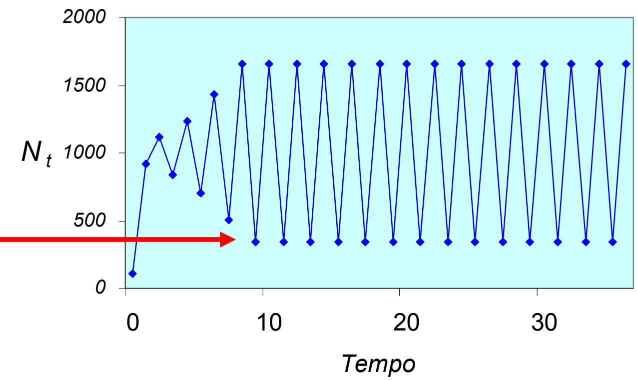
As populações reais são caóticas ?

Detecção de caos requer séries temporais muito longas e precisas

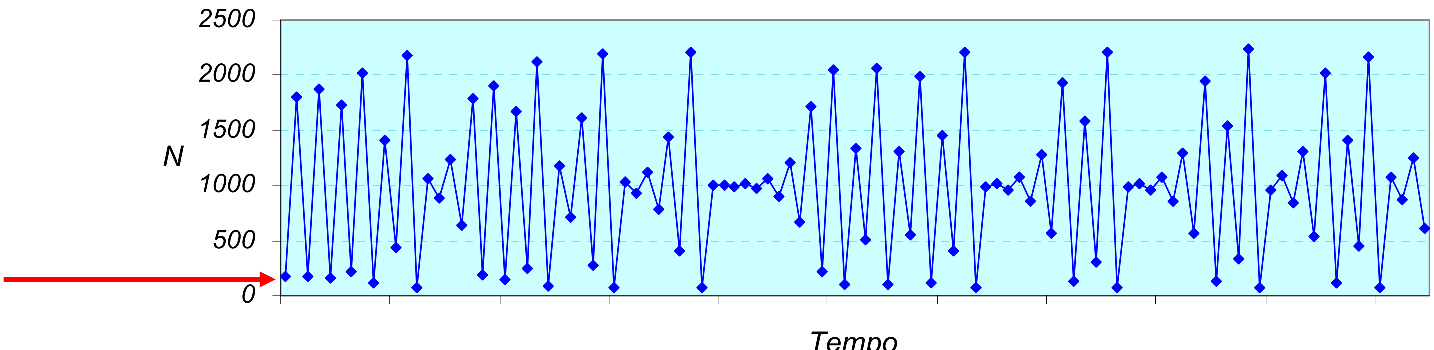


$r = 2.1$

Valores de N
mto baixos



$r = 2.4$



$r = 2.94$