Modelos Biomatemáticos - aulas Teórico-Práticas

2005/2006

1 Capítulo 3

1. Para cada uma das seguintes funções f determine explicitamente $f^2(x) = f \circ f(x)$.

   a) $f(x) = x$; *b)* $f(x) = x^3$; *c)* $f(x) = x^2 - 2$; *d)* $f_c(x) = x^2 + c, \ c \in \mathbb{R}$;

   e) $f_r(x) = rx(1-x), \ r \in \mathbb{R}$.

2. Determine explicitamente a solução da equação linear $x_{n+1} = rx_n, \ x_0 = 2$ com $r = -3, \ r = -1, \ r = -\frac{1}{2}, \ r = \frac{1}{2}, \ r = 2$. Em cada caso represente qualitativmente x_n como função de n para $n = 0, \cdots, 5$.

3. Utilize o método gráfico para discutir as soluções da equação linear $x_{n+1} = rx_n$ quando $r \leq -1, \ -1 < r < 0,$ e quando $r \geq 1$.

4. A equação às diferenças

   $$N_{n+1} = \frac{rN_n}{N_n + A}, \quad r, A > 0,$$

   foi sugerida por Verhulst em 1845 para descrever o crescimento de uma população cujas gerações não se sobrepoêm e cuja taxa de crescimento se satura para grandes dimensões da população. A mesma equação foi considerada em 1957 por Beverton e Holt no âmbito dos modelos de stock-recrutamento.

   i) Esboce para $x \geq 0$ o gráfico de $f(x) = \dfrac{rx}{x+A}$. Quanto vale $f'(0)$?

   ii) Utilize o método gráfico para analizar as soluções da equação. (**Sugestão:** considere separadamente os casos $r \leq A$ e $r > A$.)

   iii) Estude a estabilidade dos equilíbrios da equação usando, quando possível, o critério de linearização.

5. Mostre que para as três funções seguintes o critério de linearização no ponto fixo $x_0 = 0$ é inconclusivo e utilize o método gráfico para determinar a natureza desse ponto.

   $$a) \ f(x) = x - x^3; \ \ b) \ f(x) = x + x^2; \ \ c) \ f(x) = x + x^3.$$

6. (*) Seja x_0 um ponto fixo de f tal que $f'(x_0) = 1$ e $f''(x_0) < 0$. Mostre que x_0 é um ponto fixo neutralmente estável.

7. Uma equação que se encontra frequentemente em dinâmica populacional para populações de peixes é a *equação de Ricker*:

$$N_{n+1} = f(N_n) = N_n e^{r(1-N_n/K)}.$$

i) Recorde como se chega à sua construção no âmbito dos modelos de stock-recrutamento;

ii) Esboce o gráfico da função $f(N) = Ne^{r(1-N/K)} \quad N \geq 0.$

iii) Mostre que a equação de Ricker tem o equilíbrio

$$\bar{N} = K.$$

iv) Utilizando o critério de linearizaçâo, mostre que $\bar{N}$ é estável se $|1 - r| < 1$.

8. Uma população cresce segundo a lei

$$x_{n+1} = x_n e^{3-x_n}.$$

a) Mostre que todos os equilíbrios são instáveis.

b) A população da alínea a) é estabilizada removendo uma fracção p $(0 < p < 1)$ em cada período depois de terem ocorrido todos os nascimentos e todas as mortes. O modelo correspondente é :

$$x_{n+1} = (1-p)x_n e^{3-(1-p)x_n}.$$

Para que valores de p a população tem um equilíbrio positivo assimptoticamente estável (isto é um poço) ?

9. (*) a) Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ contínua em $[0,1]$. Mostre que f admite um ponto fixo em $[0,1]$. (**Sugestão:** considere a função $g(x) = f(x) - x$).

b) Nas hipóteses da alínea anterior, suponha que f é diferenciável em $]0,1[$ e que $0 < f'(x) < 1$, $\forall x \in]0,1[$. Mostre que f admite um único ponto fixo em $[0,1]$ e prove (sem usar o critério de linearização) que esse ponto é um poço. (**Sugestão:** recorde o teorema de Lagrange).

10. Represente com o método gráfico o $3-$ciclo $\{0,1,2,0,1,2,\cdots\}$ da função $h(x) = \dfrac{(2-x)(3x+1)}{2}$.

11. Determine todos os equilíbrios e os 2-ciclos da função $f(x) = -x^3$. Represente os 2-ciclos com o método gráfico.

12. (*) Mostre que se x_0 é um ponto fixo de f^k mas não de $f^j, 1 \leq j \leq k-1,$ então x_0 é um ponto k-periódico de f.

13. Na família de funções $f_c(x) = x^2 + c$ considere $c = -2$.

a) Mostre que f_{-2} tem dois pontos fixos instáveis e um $2-$ciclo repulsivo.

(*) b) Mostre que f_c tem um $2-$ciclo atractivo se $-\dfrac{5}{4} < c < -\dfrac{3}{4}$. (**Sugestão:** use o facto de $f_c^2(x) - x$ ser um polinómio divisível por $f_c(x) - x$ (porquê?) e, fazendo a divisão, factorize-o.)

14. Considere a seguinte matriz de Leslie que corresponde a uma população dividida em classes etárias de amplitude um ano:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine o número de classes etárias na população, a fracção de fêmeas de um ano de idade que sobrevive até ao fim da estação reprodutora seguinte, e o numero médio de descendentes femininos de uma fêmea de dois anos de idade.

15. Suponha que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz de Leslie para uma população com duas classes etárias.

a) determine os valores próprios;

b) dê uma interpretação biológica do maior valor próprio;

c) determine a distribuição etária estável.

16. Para as seguintes matrizes de Leslie encontre o valor próprio dominante (se houver um), um vector próprio correspondente e a distribuição etária estável.

$$a)\, A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad b)\, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad c)\, A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

17. Uma população tem inicialmente 100 indivíduos de idade zero. Suponha que cada indivíduo de idade zero gera um descendente e que $\dfrac{2}{3}$ sobrevivem até à idade de um ano. Todos os membros de idade um ano geram 3 descendentes e a seguir morrem. Escreva a matriz de Leslie correspondente, encontre o valor próprio dominante e um vector próprio correspondente. Descreva a distribuição etária estável e o comportamento assimptótico da população.

18. (*) Considere a matriz de Leslie

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

[Bernardelli, 1941] que descreve um organismo que chega à maturação em dois anos, se reproduz e depois morre. Comece com uma população inicial de 100 membros em cada classe e determine as densidades populacionais para 5 intervalos de tempo. Interprete o resultado considerando a forma canónica da matriz.

19. Determine a solução das equações às diferenças que satisfazem as condições iniciais indicadas

a) $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0, \;\; x_0 = 2, \; x_1 = 5;$

b) $x_n - x_{n-2} = 0, \;\; x_1 = 3, \; x_2 = 5;$

c) $x_{n+2} - 2x_{n+1} = 0, \;\; x_0 = 10.$

20. Determine a solução geral das seguintes equações:

a) $4x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = 0;$ *b)* $x_{n+2} + x_n = 0$ *c)* $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 3x_n = 0$

21. Algumas plantas produzem γ sementes por planta ao fim da sua época de crescimento (digamos Agosto) e a seguir morrem. Uma fracção σ destas sementes sobrevive ao inverno e uma fracção α das sementes sobreviventes germina em Maio do ano seguinte, gerando uma nova geração de plantas. Das sementes iniciais que não germinaram depois de um ano, uma fracção σ sobrevive ao segundo inverno e uma fracção β das sementes sobreviventes germina em Maio (supõe-se que as sementes que não germinaram após dois anos morrem). Explique porque é que a seguinte equação é adequada para modelar a situação descrita:

$$p_n = \alpha\sigma\gamma p_{n-1} + \beta\sigma(1-\alpha)\sigma\gamma p_{n-2},$$

onde p_n denota o número de plantas na geração n.

Que condições sobre os parâmetros garantem a sobrevivência das plantas?

22. a) Recorde os pressupostos que levam à dedução da lei de Hardy-Weinberg e enuncie essa lei.

    b) Considere uma população em equilíbrio de Hardy-Weinberg em relação a um gene autossómico dialélico. Sabendo que a proporção de heterozigotos na população é H quais são as frequências alélicas p e q?

23. Um alelo recessivo a de um gene autossómico dialélico causa caudas encaracoladas nos ratos. Suponhamos que numa certa população de 400 ratos, 391 tenham a cauda normal e 9 tenham a cauda encaracolada e que a população esteja em equilíbrio de Hardy-Weimberg.

    i. Qual é a frequência do alelo a na população?

ii. Qual a percentagem da população de ratos que é heterozigota em relação a este gene ?

24. Sejam M e F o número de machos e fêmeas numa população e seja $N = M + F$. No caso de considerarmos um gene autossómico dialélico, qual é a relação entre q_a, m_a e f_a? E no caso de considerarmos um gene ligado ao sexo?

25. A equação de Fisher-Wright

$$\rho_0 P^t = \rho_t$$

com $\rho_0 \in M_{1\times(2N+1)}$ e $P \in M_{(2N+1)\times(2N+1)}$ descreve os efeitos evolutivos da finidade populacional.

a) Explique o significado biológico das entradas do vector ρ_t e da matriz P^t.

b) **No que se segue suponha** $N = 1$.

i) Verifique que o vector $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de P^T correspondente ao valor próprio $\lambda_2 = 1/2$.

ii) Seja $\rho_0 = [1/3 \;\; 1/3 \;\; 1/3]$. Recordando que os vectores $v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de P^T correspondentes, respectivamente, aos valores próprios $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$, determine $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\rho_0 = c_0 v_0^T + c_1 v_1^T + c_2 v_2^T.$$

iii) Utilize o resultado da alínea anterior para calcular

$$\lim_{t\to+\infty} \rho_0 P^t$$

e interprete o resultado do ponto de vista biológico.