Introdução aos Modelos Biomatemáticos - Alguns pré-requisitos

2006/2007

1 Regra de Ruffini

1. a) Considere a equação
$$-x^3 + 2x - 1 = 0.$$
Determine as soluções da equação. (Descubra a primeira por inspecção directa da equação. Utilize a regra de Ruffini para determinar as outras).

   b) Calcule o quociente e o resto da divisão do polinómio $x^4 - 4x^2 - x + 2$ pelo polinómio $x^2 - x - 2$.

2 Derivadas e gráficos de funções

2. Calcule as derivadas das seguintes funções:

$$a)\ f(x) = 2x - 3x^2;\ \ b)\ f(x) = \frac{x+2}{2x+1};\ \ c)\ f(x) = \frac{2x}{1+x^2};$$
$$d)\ f(N) = \frac{rN}{N+A}\ \ A, r > 0;\ \ e)\ f(N) = 2Ne^{-3N};\ \ f)\ f(x) = \log(2x).$$

3. Esboce o gráfico das funções das alíneas $a)$, $b)$, $e)$ do exercício 2 para $x, N \geq 0$.

4. a) Calcule a aproximação linear $L(x)$ da função da alínea $a)$ do exercício 2 no ponto $x_0 = \frac{2}{3}$.

   b) Faça o mesmo com a função $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $x_0 = 1$ e utilize o resultado para calcular uma aproximação de $\sqrt{1.1}$.

3 Curvas de nível, derivadas parciais, linearização

5. Esboce as curvas de nível $f(x,y) = C, \;\; C = 0, 1, 2,$ das seguintes funções:

$$a)\ f(x,y) = x - 2y, \;\; b)\ f(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4}.$$ [1]

6. Dada a função $f(x,r) = x^2 + r,$ esboce no plano (r,x) a curva de nível $f(x,r) = 0.$

7. Calcule as derivadas parciais das seguintes funções:

$$a)\ f(x,y) = 2x - 6y + 1, \;\; b)\ f(x,y) = x^2 - y, \;\; c)\ f(x,y) = x(80 - x - y),$$

$$d)\ f(x,y) = \frac{xy}{x+1}.$$

8. Seja $f(x,y)$ uma função que admite derivadas parciais em $\mathbb{R}^2$ e tal que, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}, \;\; f(1,y) = 0,$ $f(x,y) < 0$ se $x < 1$ e $f(x,y) > 0$ se $x > 1$. O que pode dizer sobre as derivadas parciais de f nos pontos do tipo $(1, y_0)$?

9. Calcule $DF(x,y)$ para os seguintes campos vectoriais:

$$a)\ F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ \\ x - y \end{pmatrix}, \quad b)\ F(x,y) = \begin{pmatrix} x(80 - x - y) \\ \\ y(120 - x - 3y) \end{pmatrix},$$

$$c)\ F(x,y) = \begin{pmatrix} 3x\left(2 - \dfrac{x}{20}\right) - \dfrac{xy}{x+10} \\ \\ y\left(\dfrac{x}{x+10} - \dfrac{1}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

4 Determinantes, valores e vectores próprios

10. Calcule o determinante das seguintes matrizes:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}, \;\; b)\ A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \;\; c)\ A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

[1] Recorde que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é a equação da elipse com centro na origem, eixos coincidentes com os eixos coordenados e de comprimento $2a$ (o eixo horizontal) e $2b$ (o eixo vertical)

11. Mostre que o vector $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um vector próprio da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$. Qual o valor próprio correspondente ?

12. Calcule os valores próprios das matrizes do exercício 10 e, para cada valor próprio das matrizes das alíneas a), b), calcule um vector próprio.

Bibliografia

C. Nehauser, Calculus for Biology and medicine (PRENTICE HALL)

H. Anton, C. Rorres, Elementary linear Algebra, Applications Version (JOHN WILEY & SONS INC)