Exercícios adicionais de Dinâmica Populacional

Mod 13 . Crescimento com regulação dependente da densidade – a equação logística

1. A equação logística pode ser escrita na forma diferencial e na forma integral (assim chamada porque se obtém integrando a forma diferencial), respectivamente:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad \text{e} \quad N_t = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$$

Considere uma população que cresce desta forma com r=0,4 e K=100.

a) Explique o significado biológico de r e de K

b) Explique porque razão se diz que K é um ponto de equilíbrio de N.

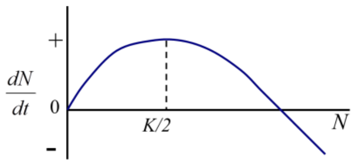
c) Se inicialmente houver 5 indivíduos, quantos haverá quando t=10 ?

2. A equação logística tem várias simplificações em relação ao mundo real. Uma delas é a noção de que em níveis muito baixos de N_t, quando a população está à beira da extinção, a sua taxa de crescimento seria máxima (~rN) . Uma descrição mais rigorosa devia prever que existe uma população mínima, N=E, abaixo da qual a população entra em colapso. Uma forma simples de resolver este problema seria acrescentar um novo factor à equação:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)\left(1 - \frac{E}{N}\right)$$

a) Explique porquê. Considere, por exemplo, o que acontece a dN/dt quando N < E, N está entre E e K, e N > K.

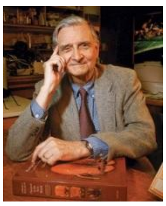
b) Recorde o gráfico da logística na forma diferencial:



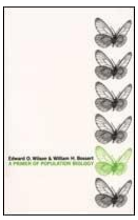
Modifique este gráfico por forma a ter em atenção o novo ponto N=E

c) N tem um ponto de equilíbrio em N=E. Porquê ? classifique-o devidamente.

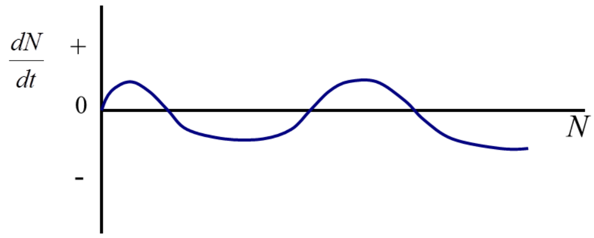
Nota: Esta modificação da logística é conhecida por equação Wilson-Bossert, pois apareceu no livro pioneiro “A Primer of Population Biology” (1971) destes autores. Wilson notabilizou-se como o maior especialista mundial em formigas e é por vezes conhecido como fundador da ‘sociobiologia’. Bossert visitou Portugal em 1980, tendo oferecido um curto curso de Biologia Populacional no IGC.


Edward Wilson


William Bossert


“A Primer of Pop Biol”

3. A equação logística pressupõe que a natalidade (b) e a mortalidade (d) variam linearmente à medida que N aumenta. No mundo real, é muito mais provavel que b e/ou d exibam relações não lineares com N. Se assim for, pode acontecer que o gráfico da variação instantânea da população (dN/dt) contra a própria população (N) seja bem mais complicado que a parábola da logística e isso pode estar subjacente a uma dinâmica populacional com algumas surpresas. Considere por exemplo uma população com o seguinte gráfico:



a) Quantos pontos de equilíbrio tem esta população ?
b) Quantos são equilíbrios não-triviais ? algum é estável ?
c) Quantos pontos de equilíbrio estáveis tem esta população ?
d) Quantos são equilíbrios globalmente estáveis ?
e) Quantos K's tem esta população ?

4. A equação logística $\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ representa a variação instantânea de uma grande população de reprodutores contínuos (lado esquerdo da equação), decorrente de se assumir que as taxas de natalidade e sobrevivência diminuem linearmente à medida que N aumenta. Deve haver uma forma discreta (por oposição a contínua) da equação logística, ou seja, uma equação às diferenças que traduza os mesmos pressupostos mas com o tempo a avançar em intervalos discretos e unitários Δt=1 (por oposição à equação diferencial para instantes infinitésimais *dt*). Deduza a forma discreta da equação logística:
N_{t+1} = ?

Ajuda: Recorde que a variação dN/dt obtem-se a partir da variação absoluta $\Delta N = N_{t+\Delta t} - N_t$ na situação limite em que a Δt é infinitamente pequeno. Comece por substituir dN/dt por $\Delta N/\Delta t$ e depois desenvolva.

5. Na sua forma discreta a equação logistica é uma equação às diferenças, no seu lado esquerdo está $\Delta N/\Delta$. De certo modo é mais realista que a equação diferencial, porque não pressupõe que a população cresce continuamente ou que se autoregula continua e instantâneamente. Nos reprodutores sazonais, por exemplo, faz mais sentido pensar em crescimento 'aos soluços' e a resposta da reprodução ao efectivo N só ocorre na Primavera. O preço por este maior realismo, contudo, é menor estabilidade do equilíbrio K. Simule a evolução da equação logística às diferenças numa folha excel. Fixe K=100, inicie com N_0=5, faça o tempo avançar em intervalos discretos: t=0, 1, 2, ... e investigue o que acontece quando:
a) $0 < r < 1$
b) $1 < r < 2$
c) $2 < r < 3$
d) $r > 3$
O que é que se está a passar ?

6. *[só alunos com nervos de aço]*. Uma população explorada comercialmente que crescesse de acordo com a equação logística $\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ deveria ser mantida num nivel de abundância que maximizasse a “produção de biomassa” expressa por dN/dt.

a) Prove que esse nível é N=K/2.

b) Quando a população se encontra nesse nível N=K/2, qual é a quantidade de biomassa que pode ser retirada continuamente e de forma sustentada ?

Ajuda para b): Designando por H a quantidade de biomassa que é retirada continuamente, a equação pode-se escrever: $\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - H$. Para esta remoção ser sustentada, é necessário que dN/dt=0. Qual é o valor de H que satisfaz esta condição quando N=K/2 ?