

Redes



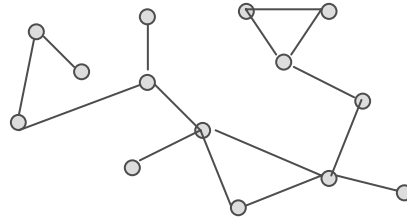
Redes aleatórias

Tópicos

- Breve história da investigação de redes:
 - Redes aleatórias
 - Redes não aleatórias
 - Redes sem escala
- Aplicações: teias tróficas, epidemiologia.



Rede



Conjunto de unidades (pré-definidas) ligadas entre si segundo um critério (pré-definido)

- Unidades / nódulos / vértices
- Ligações / Links / arestas

Dois nódulos são “vizinhos” se houver uma ligação entre eles



Um mundo de redes

REDE	NÓDULOS	LIGAÇÕES
Rodoviária	Cidades	Estradas
Social	Pessoas	Conhecimentos pessoais
Eléctrica	Centrais eléctricas	Linhas alta tensão
Aérea	Aeroportos	Rotas aéreas comerciais
Internet	Computads servidores	Cabos
WWW	Páginas da web	Links (URLs)
Económica	Empresas	Compras / vendas
Trófica	Populações	Predação, competição, etc
Nervosa	Neurónios	Sinapses
Metabólica celular	Moléculas	reacções químicas
Actores	Filmes	partilha de actores



Características da rede

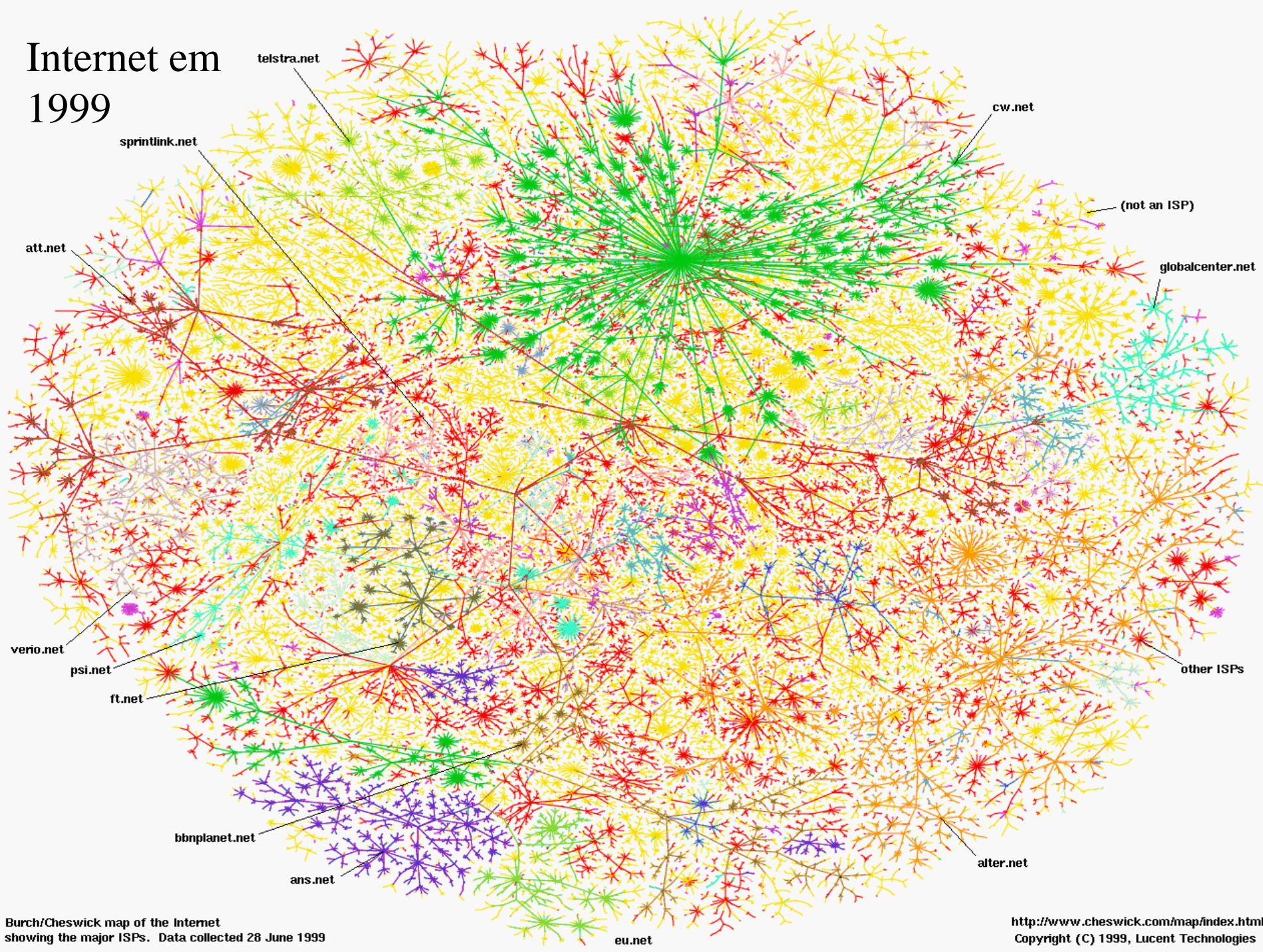
- Número de nódulos (ordem da rede, N)
- Número de ligações (tamanho da rede)
- Distribuição das ligações pelos nódulos
- Grau de “clustering” ou de “connectance”

Investigação de sistemas complexos em...

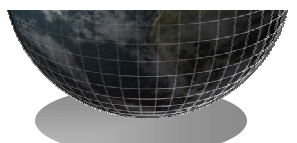
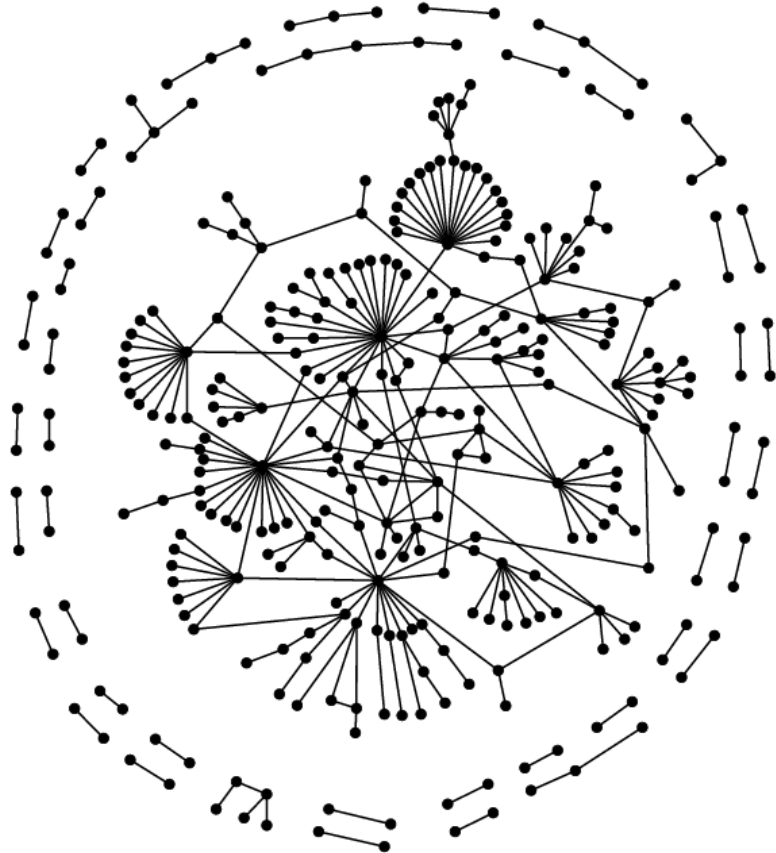
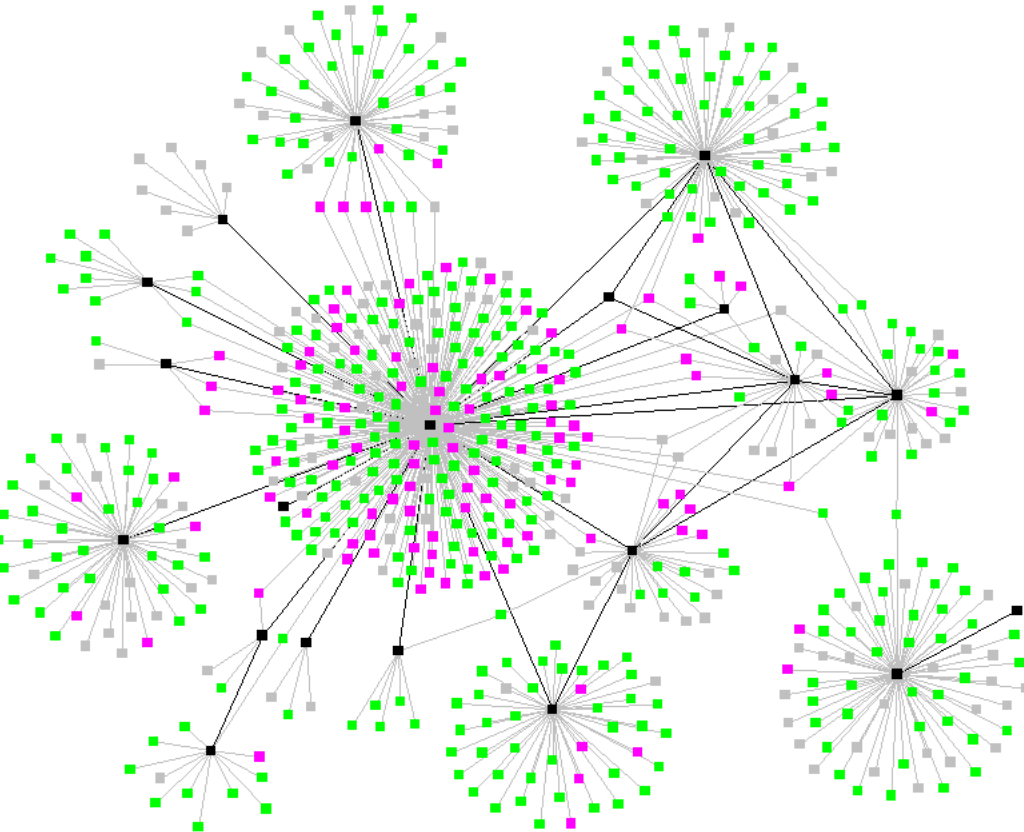
*física, informática, bioquímica, ecologia, fisiologia,
sociologia, epidemiologia de DT's*



Internet em 1999



Contágios com TB; Proteínas numa levedadura



As perguntas

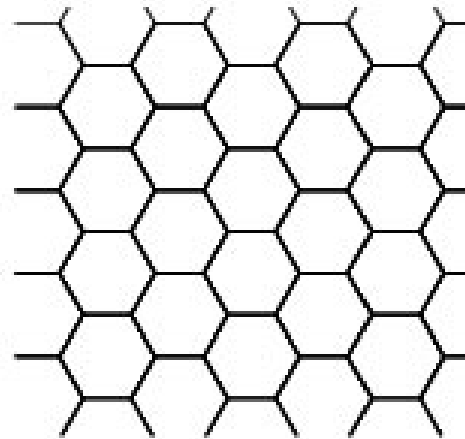
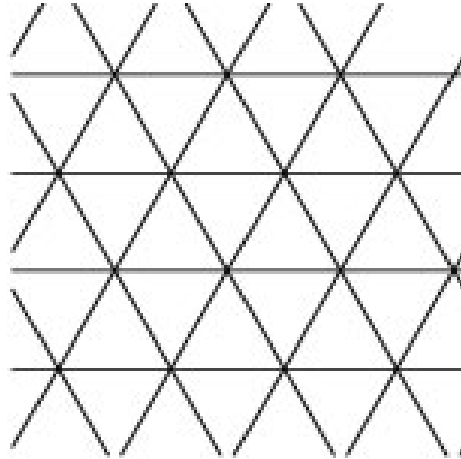
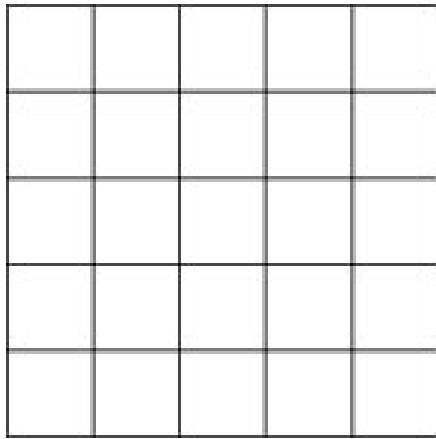
- Será possível descrever a estrutura das redes ?
- Como é que se desenvolve a estrutura observada ?
- Têm propriedades estruturais comuns ?

- Quais as implicações práticas ?



Primeiras teorizações I

– redes regulares



K constante

Teoria de grafos



Primeiras teorizações II

- Paul Erdos e Alfred Rényi, 1959
(matemáticos húngaros)
- Redes aleatórias

Unam-se os nódulos aleatoriamente

Irrealista, mas instrutivo para começar



Resultados em redes aleatórias I

(Erdos & Rényi)

- Se, em média, $K=1$ ligações por nóduo:
Forma-se um “cluster” gigante que inclui quase tudo. Torna-se possível “navegar” de um nóduo para qualquer outro.
- À medida que K aumenta acima de 1:
Número de nóduos fora da cluster gigante diminui exponencialmente



$K \gg 1$ em redes reais

Nas redes reais, em geral, k médio $\gg 1$

Conhecemos 200-5000 pessoas pelo nome

Um neurónio liga-se a dezenas - milhares de outros neurónios

O número médio de links de saída por página www é 7

Uma cidade é servida por muitas estradas de ligação

Uma molécula reage com muitas outras

etc.

Redes muito densas: não há nódulos de fora



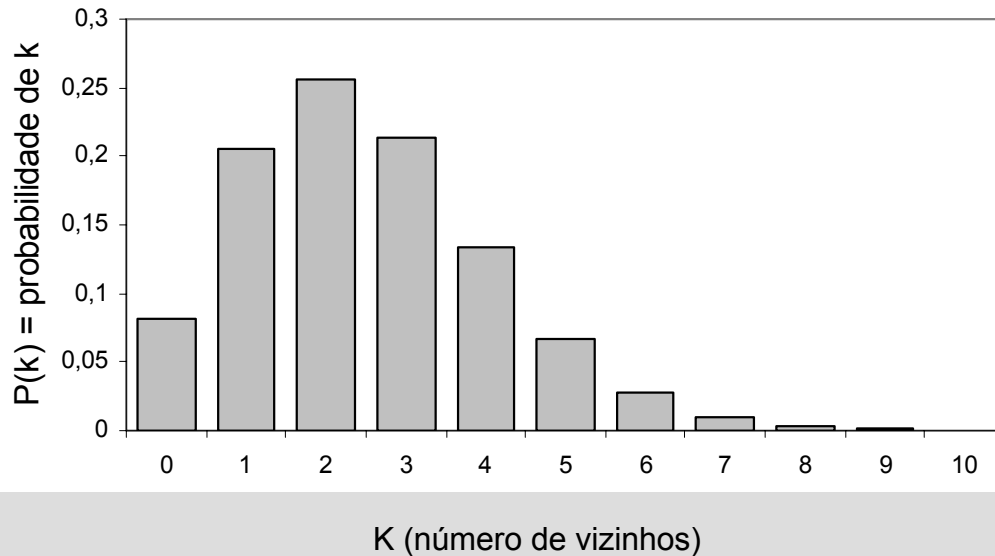
Resultados em redes aleatórias II

(Erdos & Rényi)

- Redes democráticas: cada nóculo tem igual probabilidade de receber uma nova ligação
- k torna-se *aproximadamente igual* para todos os nóculos
- k tem distrib Poisson



K ∩ Poisson



$$P(k) = \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!}$$

$$P(K = 0) = e^{-\mu}$$

$$P(K = 1) = e^{-\mu} \mu$$

$$P(K = 2) = \frac{e^{-\mu} \mu^2}{2}$$

etc

As redes aleatórias têm uma “escala” característica, dada por K



- Quais as consequências de $K \gg 1$?
- Primeiras evidências de que as redes reais não são aleatórias



O fenómeno “small-world”

Qual é o “comprimento” mínimo da cadeia de conhecimentos entre quaisquer duas pessoas no planeta ? Karinthy (1920's)

- **Stanley Milgram** (Univ Harvard) colocou a questão para os EUA
- Um destinatário em Boston
- 160 emissários em pontos longínquos nos EUA
- Cada emissário devia enviar a carta a um amigo que julgasse poder conhecer pessoalmente o destinatário
- Os amigos receberam as mesmas instruções e iam destacando cupons para a Univ Harvard.



“It’s a small world”

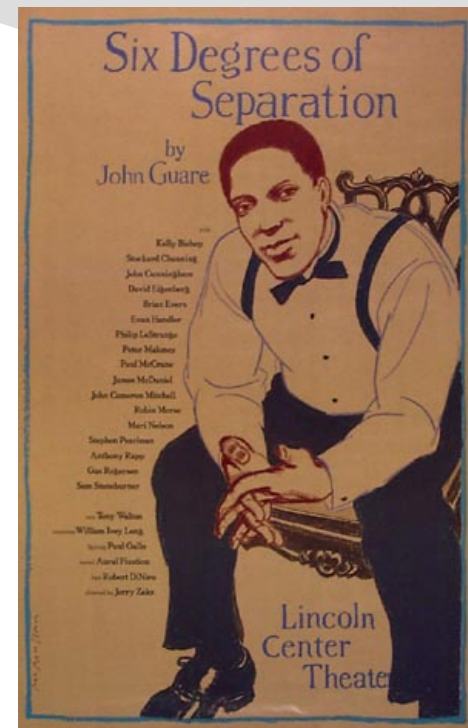


- 42 (de 160) cartas chegaram aos destinatários
- Número de intermediários: 2 a 12, com média de 5,5 !
- Há um caminho entre qquer 2 pessoas (já sabíamos, pois $k \gg 1!$)
- Estamos todos à distância de poucos apertos de mão (não sabíamos)

It’s a small world !



6 graus de separação



- A proximidade entre nódulos é exclusiva da rede social humana ?
- Respostas: só no fim do séc 20 !



Distâncias (mínimas) médias entre nódulos

- WWW: 19 “cliques” entre sites.

Albert, Jeong, Barabási. 1999. Diameter of the World Wide Web. *Nature* **401**:130-131.

- Teias tróficas: média de 2 ligações entre pares de espécies

Williams, Martinez, Berlow et al. 2001. Two degrees of separation in complex food webs. *Sta Fe Inst Working Paper* 01-07-036

- Neurónios no cérebro do nemátode *Caenorhabditis elegans*: média de 14 sinapses

Watts and Strogatz. 1998. Collective dynamics of “small-world” networks. *Nature* **393**: 440-442.



Distâncias (mínimas) médias entre nódulos II

- Moléculas na célula: média de 3 reacções químicas.

Wagner, and Fell. 2001. The small world inside large metabolic networks. *Proc. Roy Soc Lond, series B*, **268**:1803-1810..

- Internet: média de 10 ligações entre servidores

Barabási, A-L. 2003. *Linked*. Plume books, NY

Em geral: distâncias médias entre 2 e 14
(por vezes muitos milhões de nódulos)

As redes reais são small worlds !



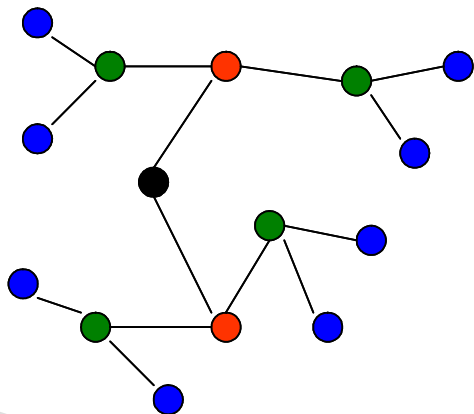
Qual é a distância esperada em redes aleatórias?

- Média de K ligações por nó

Número de nós à distância de 1 ligação: K^1

Número de nós à distância de 2 ligações: K^2

Número de nós à distância de 3 ligações: K^3



$$K=2$$

$$K^1 = 2 \text{ vermelhas}$$

$$K^2 = 4 \text{ verdes}$$

$$K^3 = 8 \text{ azuis}$$



... é muito curta

- Em geral: K^d nódulos à distância de d ligações
- Qual a distância para alcançar todos N nódulos da rede ?

$$K^d = N \quad \text{donde} \quad d = \text{Log } N / \text{Log } K$$

Valores de d

N	K				
	1,1	5	10	15	20
cem	48	3	2	2	2
dez mil	97	6	4	3	3
1 milhão	145	9	6	5	5
100 milhões	193	11	8	7	6
1 bilhão	290	17	12	10	9

Grandes redes reais



Da teoria aleatória à realidade

- Número médio de conhecimentos por pessoa, $K=1000$
- População mundial $N \sim 7000$ milhões
- Teoria:

$$d = \text{Log } N / \text{Log } K; \quad d = 3,28 < 5,5$$

- Número médio de ligações por página WWW, $K=7$
- Número estimado de páginas $N \sim 1000$ milhões
- Teoria:

$$d = \text{Log } N / \text{Log } K; \quad d = 10,65 < 19$$



As redes reais não são aleatórias

- Em redes sociais, biológicas, comunicações, ...
 $d_{real} > \text{Log } N / \text{Log } K$

Ao que se deve o desajuste ?

As redes reais não são aleatórias !

**Mas também não são regulares.
Estão entre a ordem e a desordem !**

