

Cálculo infinitesimal II

Aulas teóricas e teórica-práticas

Docente: Nicolas Van Goethem

vangoeth@fc.ul.pt,
Sala 6.2.20.

July 31, 2023

Objectivos de aprendizagem

1. Teoria

- ▶ Objectivos em termos de conteúdo:

PARTE A: 13/2-20/3

Introdução às equações diferenciais ordinárias (EDO)

PARTE B: 24/3-21/4

Funções vectoriais de n variáveis. Introdução às curvas e superfícies.

PARTE C: 26/4-26/5

Integrais de linha, duplos e triplos. Coordenadas polares.

- ▶ Aprender a demonstrar resultados simples.

2. Prática

- ▶ Pôr em prática a teoria realizando exercícios
- ▶ Aprender a calcular
- ▶ Aprender a conceber uma resposta escrita; trabalhar em grupo e participar à dinâmica da turma
- ▶ Nesta cadeira é fundamental a participação nas aulas de TP, onde a matéria vai ser acompanhada semana após semana.

A avaliação tem 3 componentes:

- ▶ **Testes intermédios (avaliação continua):** $\sim 30\%=2$ valores cada (QUIZ ONLINE durante as aulas T dos dias 3/4 (parte A), 5/5 (B) e 26/5 (C). Perguntas de teoria e exercícios (sem demonstrações). Quizz no exame ($15\%=3$ valores).
- ▶ **Arredondamento AC:** participação às T e/ou TP (presenças).
- ▶ **Exame escrito, parte prática:** exercícios vistos nas TPs e/ou próximos dos exercícios feitos nas TPs ($30\%=6$ valores)
- ▶ **Exame escrito de teoria (demonstração):** $25\%=5$ valores.
- ▶ **Relatório** de grupo (de 1 as 5 pessoas) (**dispensa de T e TP do 2/3 ao 6/3**). Este relatório será avaliado pelo vosso professor de TP (I: insuficiente; B: bom; MB: muito bom) e servirá para efeito de arredondamento da nota final (passar de 9.2 a 10 com "MB" ou de 13.6 a 14 com "B"; com "I" não se faz arredondamento por cima, i.e. 9.3 fica em 9).

Apoio e sessões de esclarecimento

- ▶ Durante a aula de TP, depois das apresentações dos exercícios (pode-se conversar além da hora prevista com quem o desejar)
- ▶ Por marcação com o professor de teórica ou o vosso professor de TP.

OS VOSSOS PROFESSORES de TPs:

- ▶ Nicolas Van Goethem (professor & regente da disciplina)
- ▶ Cecília Ferreira (professor)
mcferreira@ciencias.ulisboa.pt
- ▶ Francisco Moreira (assistente convidado, aluno de doutoramento) flmoreira@fc.ul.pt

ESTATÍSTICAS DOS ANOS ANTERIORES:

- ▶ 2021/2022 : passagem: 80,1%

Sugestão de textbooks de apoio

- ▶ Single and Multivariable Calculus (early transcendentals):
James Stewart 2018 (Cengage Learning)
- ▶ Calculus, one and several variables:
Salas, Hille and Etgen 2007 (John Wiley and Sons)
- ▶ Fundamentos de análise infinitesimal:
M. Figueira 2011 (Coleção Textos de Matemática, vol.5, DM FCUL)
- ▶ Cálculo Diferencial e Integral para Funções de Várias Variáveis:
Carlos Sarrico 2009 (Esfera do Caos)

CURSOS ONLINE (OPENCOURSEWARE)

- <https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-03sc-differential-equations-fall-2011>
- <https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/>

Objectivos do curso

1. PARTE A: Ter noção de **Equação com Derivadas Ordinárias** e de modelos matemáticos com base EDOs; identificar e resolver varios tipos de EDO; ter noção de questões de existência e unicidade para EDOs e de problemas com valores iniciais.
2. PARTE B: Ter noção de **curvas e superfícies parametrizadas e do cálculo com funções de n variáveis** tal como limite, continuidade, diferenciabilidade; ter noção de extremos locais e globais e uma introdução à optimização.
3. PARTE C: Ter noção de **integrais de linha** (possivelmente: de superfície), **duplos e triplos**; teoremas de Stokes e Green; introdução às coordenadas polares; derivação e integração em coordenadas polares.

■ Sempre que possível, serão dadas algumas **pequenas demonstrações** de teoremas ou lemas. As mesmas fazem parte da matéria teórica para o exame.

Conteúdo das aulas teóricas

PART A:

- ▶ Aula 1: Introdução às equações diferenciais ordinárias (EDO) (13/2)
- ▶ Aula 2: EDO linear ou não linear, de primeira ordem, separável (17/2)
- ▶ Aula 3: EDO linear de primeira ordem: coeficientes constantes e caso geral (24/2)
- ▶ Aula 4: EDO de primeira ordem: diferenciais exatos (27/2)
- ▶ Aula 5: EDO de primeira ordem: sistema linear (10/3)
- ▶ Aula 6: EDO de segunda ordem: introdução e teoria geral; soluções particulares e solução geral; base de soluções; Wronskiano (13/3)
- ▶ Aula 7: EDO de segunda ordem: Teorema de existência e unicidade; EDO com coeficientes constantes: caso homogêneo e não-homogêneo (17/03)

Conteúdo das aulas teóricas

- ▶ Aula 8: EDO de segunda ordem: soluções particulares (20/3)

PARTE B:

- ▶ Aula 9: Funções vectoriais de n variáveis -1- (24/3)
- ▶ Aula 10: Funções vectoriais de n variáveis -2- (27/3)
- ▶ Aula 11: Quizz de treino (31/3)
- ▶ Aula 12: TESTE INTERMÉDIO 1: EDOs (3/4)
- ▶ Aula 13: Funções vectoriais de n variáveis -3- (14/4)
- ▶ Aula 14: Extremos e Optimização (17/4)
- ▶ Aula 15: Curvas no plano e no espaço (21/4)
- ▶ Aula 16: Representação de superfícies: superfícies parametrizadas (24/4)

Conteúdo das aulas teóricas

PARTE C:

- ▶ Aula 17: Gradiente, divergência e rotor (28/4)
- ▶ Aula 18: TESTE INTERMÉDIO 2: FUNÇÕES DE n VÁRIÁVEIS (5/5)
- ▶ Aula 19: Integral de linha; Integral duplo (8/5)
- ▶ Aula 20: Integral fatiado; Integral de superfície (12/5)
- ▶ Aula 21: Teorema de Green e de Stokes. Integral triplo (15/5)
- ▶ Aulas 22: Coordenadas polares; Gradiente em coordenadas polares. Integração em coordenadas polares (19/5)
- ▶ Aula 23: Revisões parte C (22/5)
- ▶ Aula 24: TESTE INTERMÉDIO 3: INTEGRAIS (26/5)

PARTE A

PARTE A: Equações Diferenciais Ordinárias

AULA 1: (13/2/2023)

Introdução às EDO.

PARTE A: Equações diferenciais ordinárias -1-

Motivação

- ▶ A ciência é construída em primeiro lugar com base e mediante **observações** de alguns fenômenos "naturais" (físicos, químicos, biológicos, etc.)
- ▶ Em segundo, de tentativas de modelização dos mesmos: isto é, da formalização das observações sob a forma de **equações**.
- ▶ Em terceiro, da análise das equações do ponto de vista da matemática (existência e unicidade, análise funcional - análise numérica etc.)
- ▶ Enfim, da validação do modelo quando comparamos as **previsões** obtidas pelos modelos com as observações disponíveis do fenômeno em questão.

PARTE A: Equações diferenciais ordinárias -2-

Conceitos chave

- ▶ Uma **variável** pode ser **independente** (tipicamente: o tempo, a posição, etc.), ou **dependente** (nomeadamente, do tempo, da posição, etc.). Por exemplo:
 - a **temperatura** T (var. dep.) é **função** do tempo (se a posição for fixada) ou da posição (se o tempo for fixado), ou dos dois (logo como função de duas variáveis independentes)
 - a **deformação** de uma mola ou de uma corda u (var. dep.) pode ser função do tempo e/ou do espaço (i.e. da posição)
 - a **velocidade** de um fluido, a **densidade** de população, a **corrente** elétrica, etc.
- ▶ A **taxa de variação** da variável dependente y : de quanto varia y quando a variável independente t varia de uma unidade?
 - A quantidade $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ será modelizada pela derivada da função $t \mapsto y(t)$, ou seja a taxa de variação da variável y é a **função derivada** $t \mapsto y'(t)$.

PARTE A: Equações diferenciais ordinárias -3-

Definição: EDO

Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação cuja incógnita é uma função y (representa a variável dependente do modelo) dependente de uma variável independente (t ou x) pertencente a um domínio I . Uma EDO de primeira ordem é uma equação que depende da variável dependente y , da sua taxa de variação y' , e da variável independente t (ou x).

Uma EDO de segunda ordem contém, além das anteriores, a taxa de variação de y' , i.e. a função y'' . Em geral, será de ordem n se contém as derivadas de y de ordem superior a 1, até n .

Expressão matemática de uma EDO de ordem 1:

Sendo $F(a, b, c)$ uma função de 3 variáveis independentes a, b e c , uma EDO de ordem 1 é a equação: $F(t, y, y') = 0$, i.e. procuramos uma função $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall t \in I : F(t, y(t), y'(t)) = 0$.

PARTE A: Equações diferenciais ordinárias -4-

Sendo $y^{(n)}$ a derivada de ordem n da variável dependente y (e incógnita do problema), a forma mais geral de uma EDO é:

$$F(t, y, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Conforme a expressão de $F(t, y, \dots, y^{(n)})$, definimos

- ▶ a EDO é de **ordem** $n \geq 1$ se a maior derivada de y for $y^{(n)}$
- ▶ o **grau** da EDO é a maior potência na maior derivada $y^{(n)}$
- ▶ a EDO é **explícita** se existe uma função f tal que $F = 0$ re-escreve-se da forma: $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$
- ▶ a EDO é **autónoma** se $y^{(n)} = f(y, \dots, y^{(n-1)})$, ou seja se F (ou f) não depende **explicitamente** do tempo (ou seja, da variável independente)
- ▶ a EDO é **linear** se $F(t, y, \dots, y^{(n)})$ é linear em $(y, \dots, y^{(n)})$ (i.e., se cada derivada tem potência igual a 1)

PARTE A: Equações diferenciais ordinárias -5-

- ▶ a EDO é **linear de ordem n** se $F = 0$ re-escreve-se na forma:
$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = g(t)$$
- ▶ a EDO é linear de ordem n e **homogénea** se:
$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0$$
- ▶ a EDO é linear de ordem n com **coeficientes constantes** se:
$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = g(t)$$
 (i.e., os coeficientes a_i não dependem do tempo).
- ▶ uma solução **particular** da EDO é uma função $y_p : I \mapsto \mathbb{R}$ que satisfaz $F(t, y_p, \dots, y_p^{(n)}) = 0$
- ▶ uma solução **geral** da EDO é a maior família de funções $\{t \mapsto y(t)\}$ que verificam $F(t, y, \dots, y^{(n)}) = 0$.
Uma solução geral contém n "**constantes de integração**", i.e., uma solução geral torna-se particular uma vez fixadas as n constantes, mediante n **condições iniciais** prescritas em $y^{(k)}$, onde $0 \leq k - 1$.

PARTE A: Equações diferenciais ordinárias -6a-

Alguns exemplos:

- ▶ Linear de ordem 2 com coeficientes constantes:
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} - 6y = 2\sin(3t) \text{ (incógnita = } y(t)\text{)}$$
 - Em termos funcionais:
$$F(a, b, c, d) = d + 5c - 6b - 2\sin(3a) = 0$$
 - A EDO corresponde a esta função com
 $a = t, b = y(t), c = y'(t)$, para qualquer t no domínio da EDO.
- ▶ Linear de ordem 2 com coeficientes constantes e homogénea:
$$\frac{d^2i}{dt^2} + 4\frac{di}{dt} + 5i = 0 \text{ (incógnita = } i(t)\text{)}$$
 - Em termos funcionais: $F(a, b, c, d) = d + 4c + 5b = 0$
 - Temos também $a = t, b = y(t), c = y'(t), d = y''(t)$.
- ▶ Linear de ordem 3: $u^{(3)} + x^3u = e^{-2x}$ (incógnita = $u(x)$)
 - Em termos funcionais: $F(a, b, c, d, e) = e + a^3b - e^{-2a} = 0$
 - Aqui, $a = t, b = y(t), c = y'(t), d = y''(t), e = y^{(3)}(t)$.

PARTE A: Equações diferenciais ordinárias -6b-

Alguns exemplos (cont.):

- ▶ Não linear de ordem 3: $y^{(3)} + xy^3 = e^{-2x}$ (incógnita = $y(x)$)
 - Em termos funcionais: $F(a, b, c, d, e) = e + ab^3 - e^{-2a} = 0$ é não linear (nomeadamente, em b)
 - Aqui, $a = t, b = y(t), c = y'(t), d = y''(t), e = y^{(3)}(t)$.
- ▶ Não linear de ordem 1 e grau 2: $y(y')^2 + 2ty' - y = 0$ (incógnita = $y(t)$, forma não explícita)
 - Neste último caso, existe uma forma explícita de resolver a equação polinomial em y' de maneira a obter 2 equações explícitas de ordem e grau 1: $y'(t) = \frac{-t + \sqrt{t^2 + y^2(t)}}{y(t)}$ e $y'(t) = \frac{-t - \sqrt{t^2 + y^2(t)}}{y(t)}$
 - Em termos funcionais: $F(a, b, c) = bc^2 + 2ac - a = 0$ é não linear (nomeadamente, em c)
 - A EDO corresponde a esta função com $a = t, b = y(t), c = y'(t)$, para qualquer t no seu domínio.

PARTE A: Equações diferenciais ordinárias -7-

Alguns exemplos vindos das ciências naturais:

- ▶ Conservação do momento linear (lei de Newton):
 $mx''(t) = f(t, x)$ (força f linear ou não linear)
- ▶ Movimento harmónico simples (mola): $x''(t) = -kx(t)$
- ▶ Movimento harmónico com atrito de Coulomb:
 $x''(t) = -k(x')x(t)$
- ▶ Circuito eléctrico RLC: $i''(t) + \frac{R}{L}i'(t) + \frac{i(t)}{LC} = \frac{1}{L}E'(t)$
- ▶ Tamanho de uma população:
 - lei de Malthus: $P'(t) = rP(t)$, onde $r > 0$ é constante
 - lei de Verhulst (eq. logística): $P'(t) = r(P)P(t) + q(t)$
- ▶ Deformação de vigas: $EIy^{(4)}(x) = q(x)$
- ▶ Reflexão da luz: $y'(x) = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2(x)}}{y}$

PARTE A: Equações diferenciais ordinárias

TP1 -1-

□ **EXERCÍCIO 1:** Determinar o tipo de EDO e as variáveis dependentes e independentes em cada exemplo da página 19.

□ **EXERCÍCIO 2** Para cada exemplo da página 19, escrever a EDO em termos funcionais, i.e., determinar a função $F(a, b, \dots)$ com a a variável independente, e (b, \dots) a variável dependente e todas as suas derivadas até o ordem da EDO. (ii) Escrever a EDO em termos de F . (iii) Dizer se a EDO correspondente é linear ou não linear.

PARTE A: Equações diferenciais ordinárias

TP1 -1-

□ **EXERCÍCIO 3:** Consideremos a EDO $y'(x) = \frac{y(x)}{x}$. (i) O que significa y' ? (ii) Quais são a variável dependente e a variável independente? (iii) De que tipo de EDO se trata? (iv) Qual das duas funções $y(x) = 2x$ ou $y(x) = x^2$ é solução? (v) Verificar que $y(x) = Cx$ é uma solução geral desta EDO, qualquer seja o valor da constante C . (vi) Como fixamos a constante de integração?

□ **EXERCÍCIO 4** Seja a EDO $x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = 0$. (i) O que significam $x'(t)$ e $x''(t)$? (ii) Quais são a variável dependente e a variável independente? (iii) De que tipo de EDO se trata? (iv) Verificar que $x(t) = e^{-2t}$ e $x(t) = e^{-3t}$ são soluções da EDO. (v) Verificar que e^{4t} não é solução. (vi) Verificar que $x(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t}$ é uma solução qualquer sejam os valores das constantes C_1 e C_2 . (vii) Determinar as constantes C_1 e C_2 .

PARTE A: Equações diferenciais ordinárias

TP2 -1-

Um exemplo de modelização: a lei de resfriamento de Newton

 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA:

Derramamos uma quantidade de café com temperatura inicial 75° numa chávena que se encontra a temperatura ambiente de $T_a = 20^\circ$ e, numa segunda experiência, $T_a = 6^\circ$.

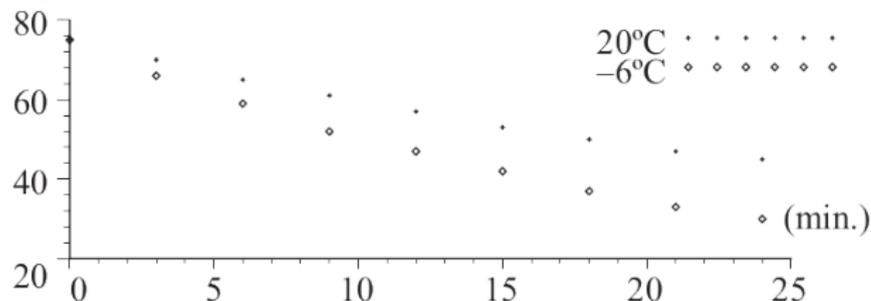
Questão: como evolui a temperatura do líquido com o tempo?

 OBSERVAÇÕES:

tempo (em minutos)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
temperatura (ar a 20°)	75	70	65	61	57	53	50	47	45
temperatura (ar a 6°)	75	66	59	52	47	42	37	33	30

PARTE A: Equações diferenciais ordinárias

TP2 -2-

□ **MODELIZAÇÃO:**

Em primeiro, escolhemos a variável dependente: será a **temperatura** T , como função da variável independente **o tempo** t . Ora, pelo gráfico, observemos que a taxa de variação da temperatura, i.e., o declive da curva *temperatura/tempo* aumenta (em valor absoluto) quando a diferença $(T - T_a)$ entre a temperatura do líquido e a temperatura do ar ambiente aumenta.

PARTE A: Equações diferenciais ordinárias TP2 -3-

Por outro lado o declive é negativo, pelo que podemos propor uma lei (i.e., uma relação dada por uma equação - por determinar) do tipo

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

com $k > 0$ um parâmetro estritamente positivo (por determinar).

□ ANÁLISE:

Re-escrevemos a equação como: $T' + kT = kT_a$. É uma equação linear com coeficientes constantes e não homogénea. Encontramos primeiro uma solução particular: $T_0 = T_a$ (verifique esta afirmação). Resolvemos depois a equação homogénea $T' + kT = 0$ ou seja $\frac{d}{dt} \ln T = -k$, pois que pela derivação em cadeia temos $\frac{d}{dt} \ln T = \left(\frac{d}{dT} \ln T\right) \frac{dT}{dt} = \frac{1}{T} T'$. Logo temos uma equação **diretamente integrável** $\frac{d}{dt} \ln T = -k$ com solução **geral** $T = Ce^{-kt}$ onde C e k são duas constantes por determinar.

PARTE A: Equações diferenciais ordinárias

TP2 -4-

ANÁLISE: (cont.) Atenção: em termos de modelo as duas

constantes têm um significado diferente: C é chamada constante de integração e será determinada fixando um **valor inicial**: no nosso caso $T(0) = 75$, enquanto k é um **parâmetro do modelo** que depende das propriedades físicas do líquido.

Portanto, para determinar k temos duas opções: ou é um dado do modelo (experiência anterior, tabela de propriedades dos fluidos etc.); ou, em alternativa, determinamos k com os dados que observámos. No nosso caso, com a temperatura ambiente de 20° , obtivemos por exemplo $T(3) = 70^\circ$.

□ Recapitulando: temos uma solução particular do problema não homogéneo $T_p(t) = T_a = 20$ e uma solução geral do problema homogéneo. Veremos mais a frente que a solução da equação é única e é a soma das duas, i.e. $T(t) = T_a + Ce^{-kt}$.

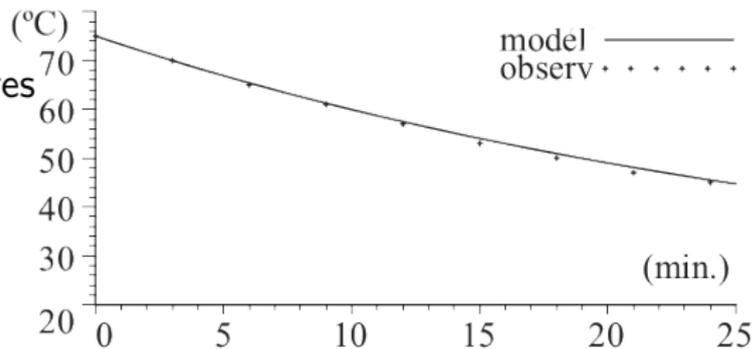
PARTE A: Equações diferenciais ordinárias

TP2 -5-

ANÁLISE: (cont.) Ora, é fácil, mediante uma mera substituição, obter C e k a partir de $T(0) = 75$ e $T(3) = 70$, i.e., obtemos $C = T_0 - T_a = 55$ e $k = \ln(55/50)/3 \approx 0.032$. Logo a solução geral da equação não homogénea é: $T(t) = 20 + 55e^{-0.032t}$.

□ COMPARAÇÃO:

Falta comparar as previsões (i.e., os valores obtidos com a solução da EDO) com as observações. Pelo gráfico, vemos uma ótima correspondência entre os dois.



PARTE A: Equações diferenciais ordinárias

TP2 -6-

□ **ANÁLISE (EXERCÍCIO 4):** podemos escrever a EDO $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$ na forma seguinte (sob a forma de diferenciais):

$$\frac{dT}{T_a - T} = kdt.$$

Ora a resolução da EDO consiste apenas em integrar (primitivar) os membros a esquerda e a direita.

Resolver esta EDO e mostrar que a solução corresponde à obtida anteriormente. O que é que se pode dizer da unicidade da solução?

Indicação: supor que existem duas soluções T e \tilde{T} que verificam a EDO; obter a EDO correspondente a $T - \tilde{T}$; resolver o problema homogéneo; encontrar o valor da constante de integração mediante a condição inicial verificada por $T - \tilde{T}$. Concluir.

□ **EXERCÍCIO extra:** Suponhamos que no modelo o parâmetro k não é uma constante mas uma função do tempo, por exemplo tome $k(t) = kt, k > 0$. Encontrar uma solução geral desta EDO.

PARTE A: Equações diferenciais ordinárias

TP2 -7-

Relatório (prazo: 6 de Março 2023 a Meia Noite)

Neste trabalho de casa é pedido escrever um relatório sobre um exemplo de modelização vindo do vosso campo de estudos (de preferência). Sigam a metodologia vista na TP sobre a lei de resfriamento, excepto pela parte de resolução da EDO. Devem

- ▶ encontrar um problema para modelizar por uma EDO
- ▶ mostrar como o modelo é construído: escolha das variáveis dependente e independente, dedução/ construção da equação matemática correspondente a EDO (esta é a parte principal)
- ▶ dizer que tipo de EDO é obtida
- ▶ falar das condições iniciais ou de limite, e o papel das mesmas
- ▶ motivação e estória do modelo (citar os nomes de quem abordou este problema e/ou encontrou a EDO associada)

NOTA: O trabalho pode ser feito em grupos de 1 a 5 pessoas.

AULA 2: (17/2/2023)

EDO não lineares e método de separação de variáveis.

PARTE A: EDO não lineares

-1-

O objetivo desta aula sobre EDO não lineares é mostrar como alguns casos particulares podem ser resolvidos, quer qualitativamente, quer quantitativamente. Neste último caso existem soluções sob forma implícita ou explícita.

A primeira classe de equações não lineares que se consegue analisar são as equações autónomas.

EDO não linear autónoma

Uma EDO $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ em forma *explícita* (ou $F(t, y, y') = 0$ em forma *implícita*, com F uma função de 3 variáveis) é autónoma se não depende do tempo (i.e. da variável independente). Neste caso

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad \text{ou} \quad F(y, y') = 0.$$

Significa então que a taxa de variação da variável dependente apenas depende da variável dependente, sem depender do tempo.

PARTE A: EDO não lineares

-2-

Uma EDO autónoma tem as seguintes características:

- modelizam fenómenos que são constantes no tempo, mas que dependem do valor da variável dependente.
- Portanto, suas soluções podem ser translataadas (*shift*) no tempo, i.e., $y(t)$ e $y(t - t_0)$ são soluções para qualquer $t_0 > 0$.
- São sempre separáveis (vê mais a frente), mas podem não ser facilmente integráveis.
- podemos sempre fazer um estudo qualitativo das soluções.

Um caso importante deste tipo de equações são as equações "logísticas" que serão estudadas na TP4. Referência para a TP4:

https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-03sc-differential-equations-fall-2011/unit-i-first-order-differential-equations/first-order-autonomous-differential-equations/MIT18_03SCF11_s10_1text.pdf

PARTE A: EDO não lineares

-3-

Domínio de uma solução

Consideremos a EDO não linear e autónoma

$$\frac{dy}{dt} = 2\sqrt{y}.$$

Consideremos também o candidato solução:

$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto y(t) = (t - c)^2, c > 0$. Com efeito verifica-se

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t - c)^2 = 2(t - c).$$

por outro lado

$$2\sqrt{y} = 2\sqrt{(t - c)^2} = 2|t - c|.$$

Logo $(t - c)^2$ é solução apenas se $t \geq c$ uma vez que apenas neste caso $|t - c| = t - c$. O **domínio** da solução é o intervalo $[c; +\infty]$.

PARTE A: EDO não lineares

-4-

Soluções em formas explícitas e implícitas

Consideremos a EDO não linear

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y},$$

com expressão implícita correspondente $ydy + xdx = 0$ Tem uma expressão explícita $y' = f(x, y)$, mas a sua solução geral é dada por uma expressão implícita $x^2 + y^2 = c$, com c uma constante.

Com efeito,

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 2x + 2y \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}c = 0 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}.$$

Daí conseguimos extrair duas soluções sob uma forma explícita, i.e.

$$y(x) = \pm \sqrt{c - x^2}.$$

PARTE A: EDO não lineares

-5-

Definição

Seja a EDO da primeira ordem $F(x, y, y') = 0$ com x a variável independente e y a variável dependente. Dizemos que $G(x, y) = 0$ é uma **solução implícita** da EDO definida em $I \subset \mathbb{R}$, se

$$\frac{d}{dx}G(x, y(x)) = 0 \iff F(x, y(x), y'(x)) = 0, \forall x \in I.$$

A solução pode ser expressada sob forma explícita se existir uma função f tal que

$$G(x, y) = 0 \iff y = f(x), \forall x \in I.$$

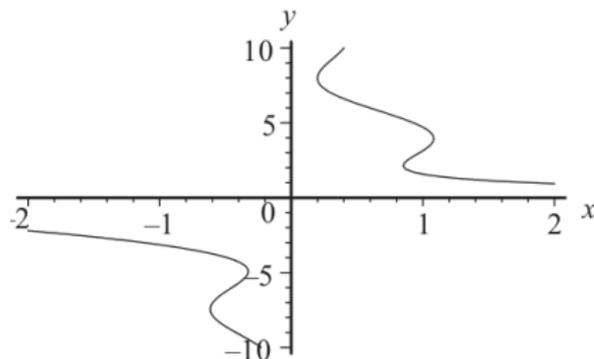
Uma solução implícita é muitas vezes chamada **curva integral** cuja justificação vem do exemplo a seguir.

PARTE A: EDO não lineares

-6-

Nem sempre se consegue encontrar uma solução explícita a partir duma implícita. Por exemplo não se consegue extrair y algebricamente da expressão $2xy + \pi \sin(y) = 2\pi$.

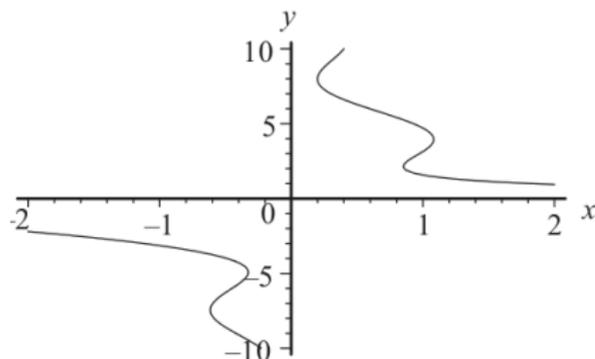
No entanto, olhando pela figura onde consta a curva $2xy + \pi \sin(y) - 2\pi = 0$, observemos que existem soluções explícitas definidas apenas em subintervalos de \mathbb{R} e nenhuma na totalidade de $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para além existem subintervalo onde a solução não é única.



Exercício: Indicar na figura os intervalos onde a solução existe e é única, e os onde existem mais do que uma solução. Para quais valores de x não existe nenhuma solução. Justifique.

PARTE A: EDO não lineares

TP3 -1-



□ **EXERCÍCIO 5:** Indicar na figura os intervalos onde a solução existe e é única, e os onde existem mais do que uma solução. Para qual valor de x não existe nenhuma solução. Justifique.

□ **EXERCÍCIO 6:** Mostrar que $x^2y + \ln(y) - 5 = 0$ é uma curva

integral da EDO $y' = \frac{-2xy^2}{x^2y+1}$. Mediante um software de desenho de curvas, traçar a curva integral e proceder como no exercício anterior.

PARTE A: EDO não lineares

-7-

EDO não linear separável - Método de separação das variáveis

A EDO $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ é separável se existem funções F de x e G de y tais que

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \iff G(y)dy = F(x)dx \iff f(x, y) = \frac{F(x)}{G(y)}.$$

O método de separação das variáveis consiste em integrar (primitivar) cada lado, caso F e G sejam de facto primitiváveis:

$$\mathcal{G}(y) = \int G(y)dy = \int F(x)dx = \mathcal{F}(x) + C,$$

onde C é uma constante de integração. Após integração, temos uma solução implícita $\mathcal{G}(y) - \mathcal{F}(x) - C = 0$. Com efeito,

$$\frac{d}{dx} (\mathcal{G}(y) - \mathcal{F}(x) - C) = \frac{d\mathcal{G}(y)}{dy} \frac{dy}{dx} - \frac{d\mathcal{F}(x)}{dx} = G(y) \frac{dy}{dx} - F(x) = 0.$$

PARTE A: EDO não lineares

-8-

A partir de representação implícita, podemos encontrar uma solução explícita

$$y = \mathcal{G}^{-1}(\mathcal{F}(x) + C),$$

caso \mathcal{G} for invertível. Senão, a solução é apenas uma curva integral.

□ *Não demonstramos o seguinte teorema que nos diz quando o método pode ser aplicado, i.e. quando P e Q são funções contínuas.*

■ **TEOREMA A. 1.** Uma função real e contínua admite uma primitiva.

□ **EXEMPLO 1:** Seja a EDO $xdy + ydx = 0$. Pode ser re-escrita sob forma separada: $dy/y = -dx/x$. Logo integrando cada membro, vem $\ln |y| = -\ln |x| + C = \ln 1/|x| + C$. Tomando a exponencial de cada membro vem $|y| = k/|x|$, i.e. $y = k/x$ com $k = \pm e^C$ uma constante não nula.

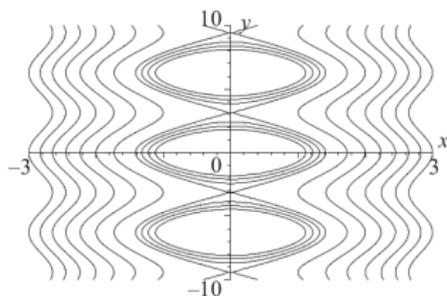
Note que uma outra solução é $x = 0$.

PARTE A: EDO não lineares

-9-

□ **EXEMPLO 2:**

Caso as variáveis estejam já separadas como em $2x dx + \sin(y) dy = 0$. Integrando temos $x^2 - \cos(y) = C$ sob forma implícita, e $y = \arccos(x^2 - C)$ sob forma explícita.



(a forma implícita dá mais informações do que a explícita)

□ **EXEMPLO 3:**

No caso da EDO $2xy dx + y \sin(y) dy = 0$ as variáveis ainda não são separadas. Multiplicando por $I(y) = y^{-1}$ obtemos a equação anterior $2x dx + \sin(y) dy = 0$, a sua vez integrável.

A função $I(y)$ com a qual multiplicámos a equação de tal maneira que se torne integrável é chamada **fator integrante** (vê mais a frente a sua utilização sistemática).

PARTE A: EDO não lineares

-10-

Sumário do caso não linear -1-

Recapitulando, no caso de uma EDO não linear, existe um método geral, o da separação das variáveis (que também se aplica se a EDO for linear), caso a EDO for separável. Além disto, a solução pode ser implícita sob a forma de uma curva integral, ou explícita, ou os dois. Salientamos que como vimos existem em geral mais do que uma solução, e cada uma costuma ser "local", i.e. definida num sub-intervalo de \mathbb{R} . Além do caso separável, existem EDO não lineares com formas particulares que sabemos resolver como por exemplo as de Lagrange, Clairaut e Bernoulli.

Existem também EDO não lineares que se podem tornar lineares mediante uma mudança de variável.

Em ambos os casos são apenas EDO com formas particulares que conseguimos resolver.

PARTE A: EDO não lineares

-11-

□ **EXEMPLO 4:** A EDO não linear $\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)y \ln(y)$ transforma-se, com a mudança $v = \ln(y)$, em uma EDO linear: $\frac{dv}{dx} - Q(x)v = -P(x)$ que veremos mais a frente como resolver.

Equações de Lagrange e de Clairaut

Uma equação de Lagrange tem a forma

$$x(t) = tf(x'(t)) + g(x'(t))$$

onde f e g são funções não lineares definidas em $J \subset \mathbb{R}$. A mesma é dita "de Clairaut" se $f(u) = u$, i.e., se tem a forma $x = tx' + g(x')$. Existem soluções particulares para essas EDO, i.e., as funções afins

$$x(t) = mt + g(m),$$

onde $m \in J$ é raiz de $f(x) = x$ ($\forall m \in J$ no caso de Clairaut).

PARTE A: EDO não lineares: homogeneidade -12-

Definição de uma função homogénea

Uma função $f(x, y)$ é dita homogénea de grau $n \geq 0$ se para qualquer $\lambda > 0$ vale $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$. Se for homogénea de grau 0, $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$, logo a função de duas variáveis f depende apenas da fração $\frac{y}{x}$ e portanto podemos escrever $f(x, y) = F(\frac{y}{x})$ para uma certa função de uma variável, $z \mapsto F(z)$.

Definição de uma EDO homogénea

Uma EDO $y' = f(x, y)$ é dita homogénea se f é uma função homogénea de grau 0.

□ **Observação:** Existe alguma ambiguidade na utilização do termo *homogéneo* nas EDO, pois que no caso de uma EDO linear significa que não tem forçagem, i.e., não tem no membro a direita nenhum termo dependente apenas da variável independente. Logo dizemos *linear homogéneo* neste último caso,

PARTE A: EDO não lineares: homogeneidade -13-

e apenas *homogéneo* no caso geral.

□ **EXEMPLO 5:** A EDO $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$ é homogénea pois que re-escreve-se como $y' = \frac{y}{x}(\frac{y}{x} - 1) = F(\frac{y}{x})$. A função $f(x, y) = \frac{y}{x}(\frac{y}{x} - 1)$ é homogéneo de grau 0. Aqui $F(z) = z(z - 1)$.

□ **EXEMPLO 6:** A EDO $xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$ também é homogénea de grau 0 pois que re-escreve-se como $y' = \sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}$ caso $x > 0$.

Aqui $F(z) = \sqrt{1 + z^2}$.

□ **EXEMPLO 7:** A EDO $yy' = 1 - \frac{y}{x}$ não é homogénea.

Propriedade das EDO homogéneas

Se uma EDO $y' = F(x, y)$ for homogénea, logo é com variáveis separadas. Com efeito, mediante a mudança de variável $z := \frac{y}{x}$ vem $y' = \frac{d}{dx}(zx) = z + xz'$ e portanto $x \frac{dz}{dx} = F(z) - z$ é com variáveis separadas, sendo que re-escreve-se como: $\frac{dz}{F(z) - z} = \frac{dx}{x}$. Sabemos portanto resolver uma EDO não-linear e homogénea.

PARTE A: EDO não lineares

-14-

Sumário do caso não linear -2-

Famílias de EDO não lineares que conseguimos resolver e como:

- ▶ EDO sob forma implícita: acontece que algumas manipulações dessem para obter uma solução sob forma implícita, e eventualmente explícita. Vê o exemplo página 33, o exemplo 3 página 39, os exercícios 6, 9, 10(i) e 12(iii).
- ▶ EDO com variáveis separadas: o método de resolução consiste em primitivar os dois membros (a esquerda a variável de integração é y , a direita é x). Vê os exemplos 1 e 2 páginas 38 e 39, os exercícios 8, 9(iii), 11 e 12.
- ▶ Fazendo uma mudança de variável apropriada: exemplo 4 p. 41 ou no caso das EDO homogêneas (exemplos 5 e 6 p. 43).
- ▶ Para algumas famílias de EDO particulares como as de Lagrange et Clairaut (página 41).
- ▶ Para as EDO autónomas: vê estudo analítico na TP4.

PARTE A: EDO não lineares

TP3 -2-

- **EXERCÍCIO 7:** (i) Verificar que as funções afins definidas acima são soluções da equação de Lagrange e de Clairaut. (ii)* Encontrar uma outra solução (HINT: o envelope convexo das afins). (iii) Aplicar este método a EDO $(y'(x))^2 - 2y'(x) - y(x) = -x$. (Este exercício é repetido na TP8)

- **EXERCÍCIO 8:** Dizer se as seguintes EDOs são separáveis: (i) $x' + x = 3 \cos(2t)$; (ii) $x' = \frac{2x^2}{xt^2 - 4x}$; (iii) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$; (iv) $y' = e^{x+y}$; (v) $y' = \ln(2xy)$; (vi) $xy' + y^2 = 4$.

- **EXERCÍCIO 9:** Escrever as EDOs (i) $(x - y)dy + (x^2 - y^2)dx = 0$ e (ii) $xy' - 3x = 2ye^x$ sob forma explícita (sem as resolver); (iii) dizer se são separáveis.

PARTE A: EDO não lineares

TP3 -3-

□ **EXERCÍCIO 10:** (i) Encontrar a solução geral sob forma implícita da EDO $2yy' - x = 2$. (ii) Encontrar a solução particular que satisfaz a condição inicial $y(0) = 4$. (iii) Expressar a solução sob forma explícita e encontrar a única solução particular positiva.

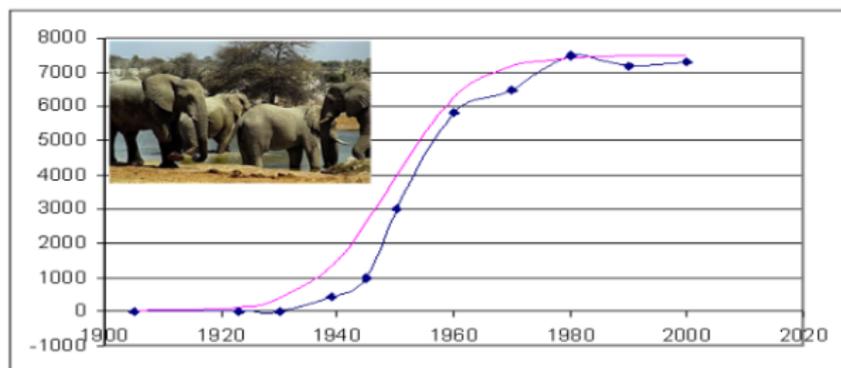
□ **EXERCÍCIO 11:** Resolver a EDO $x' = \frac{2t}{1+\cos(x)}$; pode se exprimir a solução sob forma explícita?

□ **EXERCÍCIO 12:** Resolver as seguintes EDOs por separação da variável: (i) $2tdx + e^{-3x}dt = 0$; (ii) $L\frac{di}{dt} + Ri = 0$ onde L, R são constantes; (iii) $(2xy^2 + 2x)dx + (x^2y + 4y)dy = 0$ (HINT: fatorizar as expressões nas parênteses e dividir por um produto de 2 polinômios de maneira a simplificar; primitivar os dois membros).

PARTE A: EDO não lineares autónomas

TP4 -1-

Motivação do problema: o crescimento populacional



- **Contexto:** O elefante africano da savana (*Loxodonta africana*) contava-se em milhões de indivíduos até desaparecer completamente devido à caça. No final do século 19, tinha desaparecido da África do Sul, pelo que foi decidido a criação do Parque Kruger na fronteira com Moçambique em 1900.

PARTE A: EDO não lineares autónomas

TP4 -2-

- ▶ Em 1910 foi observado um grupo de 10 elefantes, provavelmente provindos de Moçambique.
- ▶ Sendo o parque protegido, permitiu-se um crescimento natural da população, cujos dados são reportados na figura acima.
- ▶ Observa-se um crescimento relativamente lento até aos anos 30, mais rápido até aos anos 60, e outra vez mais lento depois, até chegar a uma espécie de planalto entre os 80 e o final do século.
- ▶ Como a interação entre os elefantes e o ecossistema começava a tornar-se crítica, foi decidido regular o crescimento.
- ▶ Para isso, era preciso modelizar o problema para perceber qual era o valor do planalto, e por consequência, prever uma matança controlada.
- ▶ Os modelos existentes de crescimento populacional existem e são devidos a Euler, Malthus e Verhulst.

PARTE A: EDO não lineares autónomas

TP4 -3-

Um pouco de História

- ▶ Os primeiros trabalhos conhecidos sobre o assunto são devidos ao matemático suíço Leonard Euler (1707-1783)



- ▶ Euler observou a população de uma cidade e propôs a lei discreta $p_{n+1} = k_0 p_n$ com $k_0 > 1$ e p_n a população no tempo t_n , isto é, obteve com este modelo um crescimento muito rápido do tipo "sucessão geométrica".

PARTE A: EDO não lineares autónomas

TP4 -4-

- ▶ A versão contínua deste modelo foi proposta pelo Economista Inglês Thomas Robert Malthus (1766-1834) postulando simplesmente que a taxa de variação do tamanho da população p podia ser proporcional a p , ou seja $\frac{p'(t)}{p(t)} = k_0$ com k_0 uma constante positiva.
- ▶ Como vimos na TP1, isto corresponde também à lei de resfriamento de Newton, pelo que sabemos que as soluções são exponenciais.
- ▶ Serem exponenciais, no caso de uma população pode não ser muito realístico, como consta no exemplo dos elefantes:

t	1905	1923	1930	1939	1945	1950	1960	1970	1980	1990	2000
$10e^{0,15(t-1905)}$	10	149	425	1640	4034	8541	38276	171542	768799	3445519	15441745

Se for este o modelo, estaríamos demasiado longe das observações, logo procura-se algo mais adequado.

PARTE A: EDO não lineares autónomas

TP4 -5-

- ▶ O passo seguinte foi realizado pelo matemático belga Pierre-François Verhulst (1804-1849). Ele procurou um modelo onde o crescimento não fosse exponencial mas sim com assintota horizontal no planalto.
- ▶ Seja K o valor do planalto. Logo $(1 - \frac{p(t)}{K})$ é uma função que tende a 0 quando p se avizinha ao valor limite K . Portanto se no lugar da lei $p' = k_0 p$ tivéssemos a lei $p' = k_0 p (1 - \frac{p(t)}{K})$,

t	1905	1923	1930	1939	1945	1950	1960	1970	1980	1990	2000
$N^{obs}(t)$	10	13	29	450	980	3010	5800	6500	7400	7200	7310
$N(t)$	10	146	402	1346	2623	3994	6271	7186	7428	7484	7496

Essas previsões ($p = N$ na tabela) mostram uma boa correspondência com as observações, a partir dos anos 60, enquanto até aos anos 40 não desvia muito do crescimento malthusiano. Com efeito quando $p \rightarrow 0$ o coeficiente de crescimento $k(p) := k_0(1 - \frac{p}{K})$ tende a k_0 .

PARTE A: EDO não lineares autónomas

TP4 -6-

- ▶ A constante K chamada "capacidade biótica" enquanto o coeficiente $(1 - \frac{p(t)}{K})$ é a porção da capacidade biótica ainda disponível no tempo t .
- ▶ A equação $\frac{dp}{dt} = k_0 p(1 - \frac{p}{K})$ com k_0 uma constante positiva é chamada equação logística ou modelo de crescimento populacional de Verhulst.

Estudo quantitativo: resolução da equação logística

Sendo que vale a identidade $\frac{1}{p(1-\frac{p}{K})} = \frac{1}{p} + \frac{1/K}{1-p/K}$, podemos re-escrever a EDO não-linear sob forma de variáveis separadas,

$$\frac{dp}{p(1 - \frac{p(t)}{K})} = \frac{dp}{p} + \frac{(1/K)dp}{1 - p/K} = \frac{dp}{p} - \frac{d(1 - p/K)}{1 - p/K} = k_0 dt.$$

Sabemos resolver esta equação primitivando os dois membros.

PARTE A: EDO não lineares autónomas

TP4 -7-

A primitivação é fácil pois vem

$$\log p - \log(1 - p/K) = k_0 t + C$$

Tomando a exponencial dos dois membros temos (verificar)

$$\frac{p}{1 - p/K} = e^{k_0 t} e^C$$

□ **EXERCÍCIO 13:** Verificar que a condição inicial permite determinar que $C = \log \frac{p(0)K}{K-p(0)}$ e que portanto a solução geral do problema é

$$p(t) = \frac{p(0)K}{p(0) + e^{-kt}(K - p(0))}.$$

PARTE A: EDO não lineares autónomas

TP4 -8-

A equação logística é um caso particular da família de EDO de primeira ordem, autónomas,

$$y' = f(y).$$

Com efeito, a função f não depende explicitamente do tempo. Apenas depende de t via $y(t)$. Já analisámos o caso linear, $f(y) = k_0 y$, e quadrático, $f(y) = yk(y)$. No primeiro caso, já tinha sido estudado na TP1 no exemplo da lei de resfriamento de Newton: trata-se do crescimento exponencial. Salientamos que uma mesma EDO pode servir como modelo para dois problemas completamente diferentes. Por exemplo a EDO autónoma

$$y' = yk(y) + q$$

pode modelizar, em vez de uma população, o rendimento de uma conta bancária onde a taxa de juro depende do montante na conta y à qual é acrescentado um valor fixo q (não é homogénea).

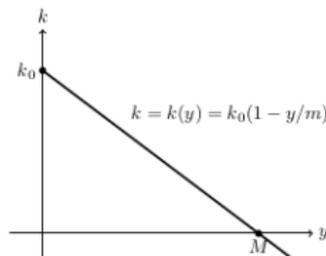
PARTE A: EDO não lineares autónomas

TP4 -9-

Sempre que a EDO for autónoma podemos fazer um estudo qualitativo.

Estudo qualitativo

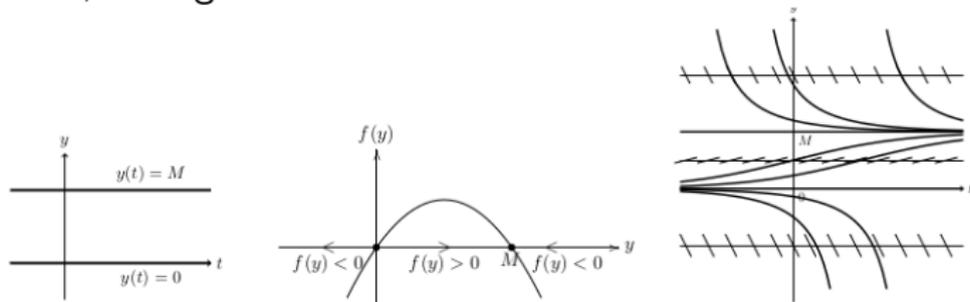
- ▶ Definimos um ponto crítico de EDO ou valores de equilíbrio os valores de y que verifiquem $f(y) = 0$, pois neste caso a taxa de variação $y' = 0$ e chegamos a um equilíbrio do sistema.
- ▶ No caso da equação logística os pontos de equilíbrio são os valores de y tal que $yk(y) = 0$. Queríamos é determinar a função $y \mapsto k(y)$ tal que $k(0) = k_0$ (assim, se $y = 0$, também $y' = 0$) e $k(M) = 0$ (existência de um planalto com valor M). A solução é obviamente uma reta:



PARTE A: EDO não lineares autónomas

TP4 -10-

- ▶ Ora, vejamos o comportamento de y . Em primeiro, os valores de equilíbrio 0 e M como na figura a esquerda: são valores assintóticos das soluções no sentido em que quando y chega a um tal valor, a taxa tende para zero e portanto não há mais evolução do sistema. Analisamos também quando a taxa de variação é positiva ou negativa, i.e., quando o polinómio f se anula, ver figura do meio:



- ▶ Finalmente, desenhamos pequenos segmentos com o declive desejado e traçamos as curvas soluções (figura a direita).

AULA 3: (24/2/2023)

EDO lineares de primeira ordem.

PARTE A: EDO linear de ordem 1

-1-

Caso dos coeficientes constantes

Seja f uma função contínua. Uma EDO de primeira ordem linear com coeficientes constantes tem a expressão seguinte:

$$y'(x) + ay(x) = f(x), \text{ com } a \text{ uma constante.}$$

■ **TEOREMA A. 2.** A solução geral da equação homogénea (= sem forçamento) $y'(x) + ay(x) = 0$ é $y_h(x) = Ce^{-ax}$, $C \in \mathbb{R}$.

A solução geral de $y'(x) + ay(x) = f(x)$ é a soma da solução geral da EDO homogénea, y_h e de uma solução particular y_p .

• **demonstração:** Por separação de variáveis, vem $\frac{d}{dx} \ln |y_h| = \frac{y'_h}{y_h} = -a$, logo primitivando vem $\ln |y_h(x)| = -ax + \text{const}$, i.e., $y_h(x) = \pm Ce^{-ax}$ com $C > 0$. Seja y_p uma solução particular, logo $y'_p(x) + ay_p(x) = f(x)$. Usando a linearidade da EDO, a soma $y_p + y_h$ é solução geral, pois que $(y_p + y_h)' = -a(y_p + y_h) + f$.

PARTE A: EDO linear de ordem 1

-2-

• **demonstração (continuação):** Acabamos de demonstrar que a soma $y_{hp} := y_h + y_p$ é sempre solução. Falta demonstrar que uma solução geral qualquer tem necessariamente de ter essa forma. Com efeito, seja \tilde{y} uma solução geral; logo $\tilde{y}' + a\tilde{y} = f$. Mas, temos também $y'_{hp} + ay_{hp} = f$; logo, substraindo as duas equações vem $(\tilde{y} - y_{hp})' + a(\tilde{y} - y_{hp}) = 0$. Portanto a função $\tilde{y} - y_{hp}$ é solução da equação homogénea, logo é da forma $\tilde{y} - y_{hp} = \pm \tilde{C}e^{-ax}$, onde $\tilde{C} > 0$. Deduzimos que $\tilde{y} = y_{hp} + \tilde{C}e^{-ax} = y_p + (C + \tilde{C})e^{-ax}$, logo é da forma " $y_h + y_p$ ". QED. ■

□ **EXEMPLO 1:** A solução de $y' - 2y = 3$ é $y = Ce^{2x} - 3/2$.

Função linear de duas variáveis (definição)

Uma função afim de 2 variáveis tem a expressão $F(u, v) = a_0u + a_1v + a_2$ onde a_0, a_1 e a_2 são constantes. Se $a_2 = 0$ é dita "linear", enquanto se $a_2 \neq 0$ é simplesmente "afim".

PARTE A: EDO linear de ordem 1

-3-

Forma geral

Uma EDO linear de 1.^a ordem tem uma das expressões seguintes:

$$F(y', y) = a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)$$

ou, dividindo por $a_0 \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x).$$

- Estamos a procura de uma solução $x \mapsto y(x)$.
- Em geral esta EDO não será separável e não conseguimos portanto integrar os 2 membros. Com efeito não se consegue primitivar $\int dy + yP(x)dx$, já que y é ainda incógnita logo não tem uma expressão em função de x que desse para integrar.

PARTE A: EDO linear de ordem 1 -4-

Seja $\mathcal{P}(x) = \int P(x)dx$ uma primitiva de P . Logo $P(x) = \frac{d\mathcal{P}}{dx}$.

■ **TEOREMA A. 3.** Sejam P e Q duas funções contínuas em I . A solução geral da equação homogénea $y'(x) + P(x)y(x) = 0$, $x \in I$ é $y_h(x) = Ce^{-\mathcal{P}(x)}$, $C \in \mathbb{R}$. A solução geral de $y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)$, $x \in I$, é a soma da solução geral da EDO homogénea, y_h e de uma solução particular y_p : $y = y_h + y_p$.

• **demonstração:** Seja y_h a solução da equação homogénea $y'_h(x) + P(x)y_h(x) = 0$, logo satisfaz $(\ln |y_h|)' = \frac{y'_h}{y_h} = -P(x)$. Primitivando os dois membros vem $y_h = Ce^{-\mathcal{P}(x)}$, $C \in \mathbb{R}$. Seja y_p uma solução particular, logo $y'_p(x) + P(x)y_p(x) = Q(x)$. Pela linearidade da EDO, vem que a soma $y_{hp} := y_h + y_p$ é solução geral da EDO. De outro lado, seja \tilde{y} uma (outra) solução qualquer. Raciocinando como na demonstração anterior, $y := \tilde{y} - y_{hp}$ é solução da EDO homogénea, logo satisfaz $(\ln |y|)' = \frac{y'}{y} = -P(x)$.

PARTE A: EDO linear de ordem 1

-5-

Primitivando os dois membros vem

$$\tilde{y} = y_p + (C + \tilde{C})e^{-\mathcal{P}(x)}, \quad C, \tilde{C} \in \mathbb{R}, \text{ a tese. QED.} \quad \blacksquare$$

□ **Nota:** verificar apenas que $y_h = Ce^{-\mathcal{P}(x)}$ é uma solução da equação homogénea, i.e,

$$y'_h(x) = -Ce^{-\mathcal{P}(x)} \frac{d\mathcal{P}(x)}{dx} = -Ce^{-\mathcal{P}(x)} \mathcal{P}(x) = -\mathcal{P}(x)y_h(x),$$

não é propriamente demonstrar que é solução geral da mesma.

Para o efeito, devemos mesmo resolvê-la por separação de variável, como feito na demonstração. Depois, há de demonstrar a unicidade desta solução: procede-se também como na demonstração, supondo que existe outra e mostrando que necessariamente tem de ter a mesma forma $\tilde{C}e^{-\mathcal{P}(x)}$, $\tilde{C} \in \mathbb{R}$.

PARTE A: EDO linear de ordem 1

-6-

□ Se quisermos procurar soluções particulares, precedemos na seguinte maneira: tomemos um palpite da forma $y_p(x) = c(x)e^{-\mathcal{P}(x)}$, em que $c(x)$ é uma função por enquanto ainda incógnita, e averiguemos sob qual condição em $x \mapsto c(x)$ será solução da EDO:

$$y_p'(x) + P(x)y_p = c'(x)e^{-\mathcal{P}(x)} = Q(x) \iff c'(x) = Q(x)e^{\mathcal{P}(x)}.$$

Logo, para obter $x \mapsto c(x)$, temos de primitivar (integrar) $x \mapsto c'(x)$, i.e., encontrar uma primitiva de $Q(x)e^{\mathcal{P}(x)}$,

$$c(x) = \int Q(x)e^{\mathcal{P}(x)} dx.$$

A solução será portanto

$$y_p(x) = e^{-\mathcal{P}(x)} \int Q(x)e^{\mathcal{P}(x)} dx.$$

PARTE A: EDO linear de ordem 1

-7-

Método do fator integrante (ou da variação da constante)

Tomemos o exemplo seguinte (tome $P(x) = 2$),

$$\frac{dy}{dx} + 2y = Q(x).$$

Multiplicando a EDO por $e^{\int P(x)dx} = e^{2x}$, vem

$$e^{2x} \left(\frac{dy}{dx} + 2y \right) = \frac{dy}{dx} e^{2x} + 2y e^{2x} = \frac{d}{dx} (y e^{2x}) = Q(x) e^{2x},$$

logo $\frac{d}{dx} (y e^{2x})$ pode ser integrado facilmente. Ora, é suficiente calcular $\int Q(x) e^{2x} dx$, como já observámos anteriormente.

□ **EXEMPLO 2:** tome $Q(x) = 3x$. A EDO re-escreve-se como

$$\frac{d}{dx} (y e^{2x}) = 3x e^{2x}.$$

PARTE A: EDO linear de ordem 1

-8-

Integrando por partes o membro a direita, calculamos a primitiva

$$\begin{aligned}\int 3xe^{2x} dx &= \int \frac{3x}{2} \frac{d}{dx} e^{2x} dx = \int \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{3x}{2} e^{2x} \right) - e^{2x} \frac{d}{dx} \left(\frac{3x}{2} \right) \right) dx \\ &= \int \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{3x}{2} e^{2x} \right) - \frac{3}{2} e^{2x} \right) dx = e^{2x} \left(\frac{3x}{2} - \frac{3}{4} \right) + C,\end{aligned}$$

com C uma constante arbitrária. Ora, integrando os dois termos da EDO, saí

$$ye^{2x} = e^{2x} \left(\frac{3x}{2} - \frac{3}{4} \right) + C,$$

pele que a solução geral da EDO é obtida multiplicando por e^{-2x} , i.e.,

$$y(x) = \overbrace{\frac{3x}{2} - \frac{3}{4}}^{=y_p} + \underbrace{C e^{-2x}}_{= \text{sol. geral da homogénea}}.$$

PARTE A: EDO linear de ordem 1 -9-

O exemplo generaliza-se pois, considerando a forma geral

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x), \quad a \leq x \leq b.$$

temos (em analogia com a página 4, mas generalizando)

$$e^{\int P dx} \left(\frac{dy}{dx} + yP(x) \right) = \frac{dy}{dx} e^{\int P dx} + yP(x) e^{\int P dx} = \frac{d}{dx} \left(y e^{\int P dx} \right).$$

A função $u(x) := e^{\int P dx}$ é chamada fator integrante.

Ora, falta só calcular a primitiva $\int Q(x)u(x)dx$.

□ **Observação:** u é definida modulo uma constante multiplicativa. Seja $\mathcal{P}(x) := \int P dx$, a primitiva de P com a constante de primitivação igual a 0, i.e. $\frac{d\mathcal{P}}{dx} = P$.

Mas, na verdade, uma primitiva qualquer de P é obtida como $\int_a^x P(z)dz = \mathcal{P}(x) - \mathcal{P}(a)$. Logo $u(x) = e^{\mathcal{P}(x)} e^{-\mathcal{P}(a)}$.

PARTE A: EDO linear de ordem 1

-10-

Metodologia geral com o factor integrante

Seja a EDO

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Etapa 1 Calcular o factor integrante $u(x) = e^{\int P dx} = e^{\mathcal{P}(x)}$

Etapa 2 Calcular o integral indefinido $\int_a^x Q(\xi)u(\xi)d\xi$

Etapa 3 A EDO re-escreve-se como

$$\frac{d}{dx} (y(x)u(x)) = Q(x)u(x),$$

logo, caso $u \neq 0$, a solução é

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} \int_a^x Q(\xi)u(\xi)d\xi + \frac{C}{u(x)} = e^{-\mathcal{P}(x)} \left(\int_a^x Q(\xi)u(\xi)d\xi + C \right),$$

com C uma constante arbitrária.

PARTE A: EDO de ordem 1

-11-

Problema com valor inicial (ou Problema de Cauchy)

Sempre que damos uma condição inicial (se a variável independente for o tempo), ou limite (se a variável tiver outro significado) a EDO linear da primeira ordem tem uma solução única.

■ **TEOREMA A. 4.** Seja a EDO

$$\forall t \in I : x'(t) + P(t)x(t) = Q(t)$$

(ou $\forall x \in I : y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)$), onde P e Q são funções contínuas e com a prescrição do valor inicial $x(0) = x_0$ (onde $0 \in I$). Então existe uma solução única que verifica $x(0) = x_0$.

• **demonstração:** Seja $u(x) := e^{\int P dx}$ e $v(t) := \int Q(t)u(t)dt$. Vimos que a solução geral é $x(t) = e^{-P(t)}(v(t) + C)$. Impondo $x(0) = x_0 = e^{-P(0)}(v(0) + C)$ permite-nos determinar o valor da constante: $C = e^{P(0)}x_0 - v(0)$. QED. ■

PARTE A: EDO de ordem 1

-12-

Determinação de uma solução particular

Seja a EDO

$$y'(x) + ay(x) = f(x) = p_n(x)\text{trig}(\omega x) \exp(-kx),$$

em que $p_n(x)$ é um polinómio de grau n , $\text{trig}(\omega x)$ uma função do tipo seno ou coseno da variável ωx , com $\omega \in \mathbb{R}$ e $\exp(-kx) = e^{-kx}$, com $k \in \mathbb{R}$.

- Procura-se uma particular do mesmo tipo caso $a \neq k$ e $a \neq 0$:

$$y_p(x) = q_n(x) (\alpha \sin(\omega x) + \beta \cos(\omega x)) \exp(-kx),$$

em que $q_n(x)$ é um polinómio de grau n e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ coeficientes por determinar.

- Caso $a = k \neq 0$, procura-se uma particular do tipo

$$y_p(x) = q_{n+1}(x) (\alpha \sin(\omega x) + \beta \cos(\omega x)) \exp(-kx),$$

em que $q_n(x)$ é um polinómio de grau $n + 1$.

PARTE A: EDO linear de ordem 1: EDO não homogénea com coeficientes constantes

TP5 -1-

□ **EXERCÍCIO 14:** Considere $y'(x) + ay(x) = f(x)$.

Encontrar uma solução geral caso (a) $f(x) = k$ e $a \neq 0$, (b)

$f(x) = k$ e $a = 0$; (c) $f(x) = 2x + 3$ e $a \neq 0$ (procure como solução particular um polinómio do mesmo grau), (d)

$f(x) = 2x + 3$ e $a = 0$ (procure um polinómio do grau +1); (e)

$f(x) = (2x + 3)e^{-kx}$ e $a \neq 0$ (procure um polinómio do mesmo grau vezes a exponencial se $a \neq 0$ e $a \neq k$, de grau +1 senão), (f)

$f(x) = (2x + 3)e^{-x}$ e $a = 0$ (procure um polinómio do grau +1 vezes a exponencial).

• **Resposta parcial (e) caso $a = k$:** procura-se uma particular do tipo $y_p(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{-kx}$. Obtem-se $\alpha = 1$ e $\beta = 3$.

Nota: não há valor para γ porquê? Porquê γe^{-kx} é solução da homogénea, logo já absorvida na solução geral da homogénea y_h .

PARTE A: EDO linear de ordem 1: EDO não homogénea com coeficientes constantes

TP5 -2-

□ EXERCÍCIO 15:

Encontrar a forma das soluções particluares das EDOs

(a) $y' - 4y = \cos(3t)$; (b) $2y' + 4y = (t^2 + t + 1)e^{-t}$; (c) $y' + y = e^{-x}$; (d) $y' + y = (x + 1)e^{-x}$.

HINT: procure como solução particular: (a) uma função do tipo seno, coseno com mesma frequência; (b) um polinómio do mesmo grau vezes a exponencial; (c) e (d) polinómio de grau $n + 1$ vezes exponencial (explicar porquê o grau tem de ser $n + 1$).

□ EXERCÍCIO 16: (i) Dizer se as EDO seguintes da primeira ordem são lineares e de que tipo; dizer se são lineares e homogéneas; dizer se são não lineares e homogéneas*; dizer com qual método se resolvem: (a) $\frac{dy}{dx} + y \cos(2x) = \frac{2x}{e^x}$; (b) $2t \frac{dx}{dt} + 3 \sin(t) = 4x$; (c) $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = \frac{t}{x}$. (ii) Resolver a (b).

PARTE A: EDO linear de ordem 1: fator integrante

TP5 -3-

□ **EXERCÍCIO 17:** Seja a EDO $\frac{dy}{dx} + 3x^2e^{-2x} = \frac{2y}{x}$. (i) Escrever a mesma como $\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)$; (ii) Resolver.

HINT: pode utilizar um software de cálculo simbólico (ex. "Online Integral Calculator").

□ **EXERCÍCIO 18:** Dizer de que tipo de EDO se trata e resolver as EDO (a) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 3 \cos(10x)$, com $x > 0$; (b) $xy' - x^3e^x = 2y$, com $x > 0$; (c) $\frac{dr}{d\theta} - \frac{2}{\theta}r = \theta^3e^{-2\theta}$, com $\theta > 0$. (Nota: este exercício pode ser feito na TP6).

PARTE A: EDO linear de ordem 1

TP6

- **EXERCÍCIO 19:** A lei de decaimento radioativo é $\frac{dQ}{dt} = -kQ$, $k > 0$ onde $Q(t)$ é a quantidade de elemento radioativo (em gramas). (i) Resolver a equação, onde Q_0 é a quantidade inicial. (ii) Deduzir o tempo t_m de meia vida do elemento, i.e. o tempo quando $Q(t_m) = 1/2Q(t_0) = 1/2Q_0$.
- **EXERCÍCIO 20:** (i) Qual'é o tempo de meia vida de um elemento radioativo se 15% do mesmo precisa de 15 dias para se desintegrar. (RESP. 63,954 dias). (ii) Sendo que 20% de um substância radioativa se desintegra em 200 dias, quanto tempo será necessário para sobrar 20% da mesma (RESP. 1442 dias).
- **EXERCÍCIO 21:** Resolver as EDO com valores iniciais seguintes: (a) $\frac{di}{dt} + 4i = e^{-5t}$ com $i(0) = 5$ e com $i(0) = 0$; (b) $\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t} = \sin(t)$ com $x(1) = 2$. Neste último caso identificar a solução do problema homogéneo, e uma família de soluções particulare. (Nota: o integral pode ficar com integral indefinido).

AULA 4 (27/2/2023)

EDO de primeira ordem: diferenciais exatos.

PARTE A: EDO de ordem 1: Diferenciais exatos -1-

Diferencial exato

Seja a EDO

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

□ Estamos à procura de uma função $x \mapsto y(x)$ que satisfaça $M(x, y(x))dx + N(x, y(x))dy = 0$, $\forall x \in I$.

□ A questão é a de determinar se existe uma função $V(x, y)$ t.q.

$$dV(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Neste caso a solução (implícita) da EDO é $V(x, y) = C$, com C uma constante, pois que

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dV(x, y) = dC = 0.$$

□ Falta definir o que é o diferencial de V , dV , de x , dx e de y , dy .

PARTE A: EDO de ordem 1: Diferenciais exatos -2-

Diferencial de uma função: uma primeira abordagem

□ Seja V uma função de duas variáveis (x, y) .

• A derivada parcial de V com x em (x_0, y_0) é a derivada da função de uma variável $x \mapsto V(x, y_0)$ em $x = x_0$ (repare que o valor de y é fixado: $y = y_0$); esta função é calculada como uma derivada de uma função de uma variável só:

$$x \mapsto V'_y(x) := \frac{dV}{dx}(x, y_0) =: \frac{\partial V(x, y_0)}{\partial x}.$$

Substituindo y_0 por y (é o "descongelamento": desta vez, variável outra vez), na verdade temos uma função de duas variáveis

$$\partial_x V(x, y) := V'_y(x),$$

chamada derivada parcial de V em ordem x .

PARTE A: EDO de ordem 1: Diferenciais exatos -3-

- A derivada parcial de V com y em (x_0, y_0) é a derivada da função de uma variável $y \mapsto V(x_0, y)$ em $y = y_0$ (repare que o valor de x é fixado: $x = x_0$); esta função é calculada como

$$y \mapsto V'_{x_0}(y) := \frac{dV}{dy}(x_0, y) =: \frac{\partial V(x_0, y)}{\partial y}.$$

Analogamente,

$$\partial_y V(x, y) := V'_x(y).$$

- **Nota:** A significação da função derivada parcial em ordem x , no ponto $(x, y(x))$, $x \mapsto \frac{\partial V(x, y(x))}{\partial x}$ é a seguinte ("congelar em y_0 e descongelar em $y(x)$):

$$x \mapsto \frac{\partial V(x, y(x))}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x}(x, y(x)) := (V'_{y_0}(x))_{y_0=y(x)}$$

(análogo para a derivada parcial com ordem y).

PARTE A: EDO de ordem 1: Diferenciais exatos -4-

- Se as funções derivadas parciais de V , nomeadamente $\partial_x V$ e $\partial_y V$, forem funções contínuas de x e de y numa vizinhança de (x_0, y_0) , então a função $V(x, y)$ é dita **diferenciável** em (x_0, y_0) .
- Suponhamos agora que V seja uma função de 2 variáveis (x, y) diferenciável em $A \subset \mathbb{R}^2$. O diferencial de V em (cada ponto de) A é a "forma"

$$dV(x, y) = \frac{\partial V(x, y(x))}{\partial x} dx + \frac{\partial V(x, y(x))}{\partial y} dy.$$

- Aqui, ha de ver dx como um elemento infinitesimal ao longo do eixo dos x , i.e. $\forall a = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, temos $dx[a] = u$, e $dy[a] = v$. Ou seja $dx[a]$ é a projecção do vetor a no eixo dos x . Analogamente, $dy[a]$ é a projecção do vetor a no eixo dos y .

PARTE A: EDO de ordem 1: Diferenciais exatos -5-

□ **Observação:** Suponhamos que y seja uma função de x , i.e., temos $y(x)$ e consideremos a função de uma variável, x ,

$$x \mapsto V(x, y(x)).$$

Ora, derivemos $V(x, y)$ com ordem x (pela regra da cadeia):

$$\frac{d}{dx}V(x, y(x))dx = \frac{\partial V(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial V(x, y(x))}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

"Multiplicando" por dx obtemos a forma "diferencial de V em $(x, y(x))$,"

$$dV(x, y) = \frac{d}{dx}V(x, y(x))dx = \frac{\partial V(x, y(x))}{\partial x}dx + \frac{\partial V(x, y(x))}{\partial y}dy.$$

PARTE A: EDO de ordem 1: Diferenciais exatos -6-

□ Gostaríamos de igualar as derivadas parciais $\frac{\partial V(x,y(x))}{\partial x}$ e $\frac{\partial V(x,y(x))}{\partial y}$ com as funções $M(x, y)$ e $N(x, y)$, respectivamente, para pudermos escrever

$$dV(x, y) = \frac{\partial V(x, y(x))}{\partial x} dx + \frac{\partial V(x, y(x))}{\partial y} dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

e obter assim uma solução a nossa EDO.

• Mas, nem todas as expressões $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ correspondem a um potencial $V(x, y)$ tal que $dV(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$.

Alias, a maioria não tem nenhum potencial associado.

□ O teorema seguinte permite averiguar quando tal potencial existe.

PARTE A: EDO de ordem 1: Diferenciais exatos -7-

■ **TEOREMA A. 5.** Seja a EDO sob forma implícita

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2,$$

onde M e N admitem derivadas parciais que são funções contínuas em A . Suponhamos também que A seja um retângulo do plano. Se M e N satisfizerem

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad (\star),$$

então existe um potencial $(x, y) \mapsto V(x, y)$ tal que

$$dV(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

logo tal que $V(x, y) = C$ é solução de $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$. Se valer (\star) o diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é dito exato.

PARTE A: EDO de ordem 1: Diferenciais exatos -8-

□ **EXEMPLO 2:** Seja $(2y^2 + \sin x)dx + 4xydy = 0$. Existe um potencial pois que $\frac{\partial}{\partial x}(4xy) = 4y$ e $\frac{\partial}{\partial y}(2y^2 + \sin x) = 4y$.

Verifica-se que o potencial é $V(x, y) = 2xy^2 - \cos x + C$, com C uma constante. Com efeito, $dV(x, y) = (2y^2 + \sin x)dx + 4xydy$.

□ **Método geral de resolução (aplicado ao exemplo 2):**

Etapa 1 Primitivamos $x \mapsto M(x, y) = (2y^2 + \sin x)$ e escrevemos $V(x, y) = \int M(x, y)dx + c(y) = \int (2y^2 + \sin x)dx + c(y)$ onde $y \mapsto c(y)$ é ainda uma função incógnita da variável y . Logo vem $V(x, y) = 2y^2x - \cos x + c(y)$.

Etapa 2 Queremos que $\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = \frac{d}{dy} \int M(x, y)dx + c'(y) = N(x, y)$ para conseguirmos identificar c . No exemplo, $N(x, y) = 4xy$, logo vem $4xy + \frac{dc}{dy} = 4xy$, e deduzimos que $c'(y) = 0$, logo $c(y) = C$ com C uma constante arbitrária.

PARTE A: EDO de ordem 1: Diferenciais exatos -9-

Etapa 3 Concluimos que $V(x, y) = \int M(x, y)dx + c(y) = 2y^2x - \cos x + C$ é a solução implícita da EDO.

□ **Método geral de resolução (diferencial exato):**

Etapa 1 Primitivamos $x \mapsto M(x, y)$ e escrevemos

$$V(x, y) = \int M(x, y)dx + c(y),$$

onde $y \mapsto c(y)$ é ainda uma função incógnita da variável y .

Etapa 2 Queremos que $\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = \frac{d}{dy} \int M(x, y)dx + c'(y) = N(x, y)$ para conseguirmos identificar c . Para o efeito, primitiva se a função

$$y \mapsto c'(y) = N(x, y) - \frac{d}{dy} \int M(x, y)dx$$

para obter a função $y \mapsto c(y)$, modulo uma constante,

Etapa 3 Concluimos que $V(x, y) = \int M(x, y)dx + c(y) = C, \forall C \in \mathbb{R}$ é a solução implícita da EDO.

PARTE A: EDO de ordem 1: Diferenciais não exatos

□ Acontece que mesmo que a forma $Mdx + Ndy$ não seja exato, a EDO $Mdx + Ndy = 0$ tenha solução por outro método. Muitas vezes, é preciso encontrar "truques" antes de aplicar um método. Um deste é mudar de variável. Outro, o fator integrante.

1. Mudança de variável

□ **EXEMPLO 3:** Seja a EDO $xdt - (t^3x + t)dx = 0$ por resolver. Observemos que não é exata. Observemos também que $xdt - tdx = -t^2d(\frac{x}{t})$. Logo, dividindo a EDO por t^2 , a mesma re-escreve-se como $d(\frac{x}{t}) + txdx = 0$.

HINT: Efetuemos a mudança de variável $v := \varphi(t, x) = \frac{x}{t}$. Logo re-escreve-se como uma EDO com variáveis separadas, $dv + \frac{x^2}{v}dx = 0$, (resolve-na!).

PARTE A: EDO de ordem 1: EDO homogêneas de grau n

2. Fator integrante

Seja $Mdx + Ndy$ não exata e suponhamos que existe $x \mapsto \mu(x)$ tal que $\mu(x)(Mdx + Ndy)$ seja exata. Logo, a solução desta última é também solução da primeira sempre que $\mu(x) \neq 0$.

NOTA: alternativa é $y \mapsto \mu(y)$ t.q. $\mu(y)(Mdx + Ndy)$ é exata.

Função homogênea de grau n (cf. páginas 42 & 43)

Lembrete: dizemos que $(x, y) \mapsto f(x, y)$ é homogênea de grau n se existir um inteiro $n \in \mathbb{N}$ t.q. $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}_*$.

□ **EXEMPLO 4:** x/y é de grau 0, $x + y$ de grau 1, xy de grau 2.

EDO homogénea de grau n

A EDO $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ é homogénea de grau n se M e N forem ambas funções de grau n . Logo pode-se re-escrever como $y' = -M(x, y)/N(x, y) = f(x, y)$, onde f é uma função homogénea de grau 0. Verifica-se que

$$f(x, y) = f(1, y/x) = F(y/x) = -M(1, y/x)/N(1, y/x).$$

□ **EXEMPLO 5:** $xy/(x^2 + y^2) = (y/x)/(1 + (y/x)^2) = F(y/x)$

Resolução de uma EDO homogénea de grau n

Etapa 1 Escrever $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ como $\frac{dy}{dx} = F(y/x)$.

Etapa 2 Efetuar a m.d.v. $v = \frac{y}{x}$, logo $y = vx$ e $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$.

Etapa 3 Resolver $v + xv' = F(v)$, i.e. integrar $dv/(F(v) - v) = dx/x$.

PARTE A: EDO de ordem 1: Diferenciais exatos

TP7

□ **EXERCÍCIO 22:** Dizer se as EDO são exatas: (a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + xe^{-y}}{y - x^2 e^{-y}}; \text{ (b) } (2t \cos x - 2xe^{-2t})dt - (t^2 \sin x - e^{-2t})dx = 0;$$

$$\text{(c) } \frac{2e^{2x}}{y} dx - (4y + \frac{e^{2x}}{y^2}) dy = 0; \text{ (d) } (\frac{2}{x} + \frac{e^y}{x^2}) dx + \frac{e^y}{x} dy = 0; \text{ (e)}$$

$$(2x \ln |y| - ye^{-x}) dx + (\frac{x^2}{y} + e^{-x} + 2y) dy = 0.$$

□ **EXERCÍCIO 23:** Resolver as EDO exatas do Ex. 22 com o método geral acima.

□ **EXERCÍCIO 24:** Mostrar que $\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)$ não é exata, exepcto se $P = 0$. Encontrar o potencial neste último caso.

□ **EXERCÍCIO 25:** Sem utilizar o método geral, encontrar o potencial e a solução geral das EDO seguintes: (a) $xdt + tdx = 0$; (b) $\frac{xdt - tdx}{x^2} = 0$; (c) $\frac{dx}{x} = 0$; (d) $2txdt + t^2dx - x^2dx = 0$.

HINT: expressar $2txdt + t^2dx$ e x^2dx como diferenciais exatos.

PARTE A: EDO de ordem 1: Truques

TP8 -1-

- **EXERCÍCIO 26:** No caso do Ex. 22 (d), multiplicar a equação por x^2 e verificar que a nova EDO é exata. Resolver esta e (d).
- **EXERCÍCIO 27:** (i) Verificar que $(x + tx^2)dt - tdx = 0$ não é exata. (ii) Multiplicar por $\frac{1}{x^2}$, verificar que é exata, e resolver. (iii) Verificar que a mesma é solução da EDO original. (iv) Qual será uma outra solução da EDO original?
- **EXERCÍCIO 28:** Resolver a EDO $xdt - (t^3x + t)dx = 0$. (facultativo: é o Exemplo 3 p.82).).
- **EXERCÍCIO 29:** Resolver a EDO $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$.
HINT: inverter o papel das variáveis dependente e independente.
- **Solução:** $\ln(x + y + 1) = y + C$

PARTE A: EDO de ordem 1: Truques

TP8 -2-

□ **EXERCÍCIO 30:** Seja a EDO $\frac{dy}{dx} = 1 - (x - y)^2$ com $y(0) = 2$. Verificar que não é nem com variáveis separadas, nem linear, nem exata. Efetuando a mudança de variável $v = x - y$, re-escrever a EDO em termos de v e x e resolver.

• **Solução:** solução geral: $(y - x)(x + C) = 1$ e solução particular $(y - x)(2x + 1) = 2$.

□ **EXERCÍCIO 31:** Dizer se são homogêneas de que grau das funções: (a) $x \cos(y/x)$; (b) $x^3 + y^2$; (c) $x^2 + 18y^2$; (d) $3xy^2$.

□ **EXERCÍCIO 32:** Dizer se a EDO $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$ é homogênea, exata, qual é seu grau e resolver. Mostrar que a solução pode ser escrita como $2y^3 - x^3 = kx$ com k constante.

PARTE A: EDO de ordem 1: Truques

TP8 -3-

HINT: pode utilizar um software de cálculo simbólico, ou primitivar $\frac{6v^2}{2v^3-1}$ (imediato por mudança de variável); em alternativa pode escrever a EDO como $x^2 df(x, y) = 0$ onde $f(x, y) = \frac{y^3}{x} - \frac{x^2}{2}$.

□ **EXERCÍCIO 33:** Seja a EDO $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$ com $y(1) = 2$. Dizer quais são os 2 métodos de resolução. Escolher um, e resolver.

• **Solução:** solução geral sob forma implícita:

$$y^2 + 2xy - x^2 = C, \quad \forall C \in \mathbb{R}; \text{ solução particular: } C = 7.$$

□ **EXERCÍCIO 34:** Seja a **equação de Bernoulli**:

$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^n Q(x)$, $n \in \mathbb{N}_*$. (i) Mostrar que a mudança de variável $v = y^{1-n}$ torna a EDO não linear em a EDO linear $\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$ com coeficientes não constante.

PARTE A: EDO de ordem 1: Truques

TP8 -4-

(ii) Explicar como se resolve.

(iii) Aplicar a resolução da EDO $\frac{y'}{x} - y - 2x^2y^3 = 0$.

• **Solução:** $\frac{1}{y^2(x)} = -2(x^2 - 1) + Ce^{-x^2}$.

□ **EXERCÍCIO 35:** Resolver $(y'(x))^2 - 2y'(x) - y(x) = -x$.

HINT: verificar se é uma equação de Lagrange/Clairaut.

• **Solução:** $y(x) = x - 1$.

AULA 5 (10/3/2023)

Sistema de EDOs de primeira ordem.

PARTE A: Sistema de EDOs de ordem 1

-1-

Definição e motivação

Consideremos o sistema seguinte de 2 equações com 2 funções incógnitas de t , x_1 e x_2 . Sendo um sistema, estão acopladas:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}, a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Mediante a definição $\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, este sistema escreve-se de forma compacta sob forma matricial,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$$

• **Aplicação importante:** um sistema de EDO de ordem um pode ser obtido a partir de uma EDO de ordem 2 (vê mais a frente).

PARTE A: Sistema de EDOs de ordem 1

-2-

Redução de EDO de ordem 2

Seja a EDO $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$. Efetuamos a mudança de variável $v = y'$. Logo a EDO re-escreve-se como

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -P(x)v - Q(x)y \\ \frac{dy}{dt} = v \end{cases},$$

ou seja mediante a definição $\vec{x} := \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$, $A := \begin{pmatrix} -Q & -P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, escreve-se de forma compacta como um sistema de ordem 1:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$$

Ora consideremos o caso geral: procura-se $t \mapsto \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}, \quad \forall t \quad (\star)$$

PARTE A: Sistema de EDOs de ordem 1 -3-

■ **LEMMA A. 1.** Supomos que a função $t \mapsto A(t)$ seja contínua. Então o espaço de soluções da EDO (\star) tem dimensão igual a dimensão de \vec{x} , i.e. igual a n .

Método de resolução ($n = 2$): caso de coeficientes constantes

Em analogia com as EDOs de ordem 1 escalares (i.e., uma equação apenas), procuremos uma solução da forma $\vec{x} = \vec{u}e^{rt}$. Com efeito, temos o teorema seguinte:

■ **TEOREMA A. 6. (Multiplicidade geométrica = 2, caso homogéneo)** Seja A uma matriz 2×2 invertível, i.e., $\det A \neq 0$. Supomos que A tenha dois vetores próprios $\vec{u}_1 \neq \vec{u}_2$, e dois valores próprios associados, r_1 e r_2 (que podem ser iguais). Então a solução geral do sistema $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ é da forma $\vec{x} = c_1\vec{u}_1e^{r_1t} + c_2\vec{u}_2e^{r_2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

PARTE A: Sistema de EDOs de ordem 1 -4-

- **demonstração:** Procuremos uma solução da forma $\vec{x} = \vec{u}e^{rt}$, i.e., calculemos

$$\frac{d}{dt}\vec{u}e^{rt} = r\vec{u}e^{rt} = A\vec{u}e^{rt} \implies (r\vec{u} - A\vec{u})e^{rt} = 0.$$

Logo, obtemos a igualdade $A\vec{u} = r\vec{u}$, ou seja \vec{u} é o vetor próprio da matriz A , e r o valor próprio associado. Como a matriz tem dimensão 2×2 e é invertível, logo os 2 vetores próprios são independentes, pelo que quer $\vec{u}_1e^{r_1t}$ quer $\vec{u}_2e^{r_2t}$ são 2 soluções independentes. Pela linearidade da EDO, a combinação linear $c_1\vec{u}_1e^{r_1t} + c_2\vec{u}_2e^{r_2t}$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ é solução da EDO. Para além, é a única solução, uma vez que pelo Lemma A.1, o espaço de soluções é gerado pelos vetores independentes $\vec{u}_1e^{r_1t}$ e $\vec{u}_2e^{r_2t}$. QED. ■

- **Nota:** Aqui a multiplicidade algébrica pode ser 1 ou 2, i.e. se for 1, temos $r_1 \neq r_2$ (por exemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$), e se for 2, $r_1 = r_2$

PARTE A: Sistema de EDOs de ordem 1

-5-

(por exemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

□ **EXEMPLO 1:** Seja o sistema $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \end{cases}$. A matriz

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tem vetores e valores próprios $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e

$r = \pm 1$. Logo a EDO tem como solução geral

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□ Ora consideremos o caso geral não homogéneo; procura-se $x(t) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t), \quad \forall t \quad (**)$$

onde $t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\vec{b}(t) \in \mathbb{R}^n$ são funções contínuas.

PARTE A: Sistema de EDOs de ordem 1 -6-

- Seja A uma matriz 2×2 invertível, i.e., $\det A \neq 0$. Sejam \vec{u}_1, \vec{u}_2 os vetores próprios da matriz A , e r_1, r_2 os valores próprios associados, i.e., temos multiplicidade geométrica igual a 2.

■ **TEOREMA A. 7. (Multiplicidade geométrica = 2, caso não homogéneo)** A solução do sistema $(\star\star)$, com $t \mapsto \vec{b}(t)$ uma forçagem vetorial contínua em I , é da forma $\vec{x} = c_1 \vec{u}_1 e^{r_1 t} + c_2 \vec{u}_2 e^{r_2 t} + x_p(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, onde $t \mapsto x_p(t)$ é uma solução particular da EDO $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = \vec{b}(t)$. As constantes c_1, c_2 estão determinadas se forem prescritas condições iniciais (ou limites) em $t = t_0 \in I$, i.e., $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$. Assim, \vec{x} torna-se a única solução do sistema de ordem 1 não homogéneo e com coeficientes constantes.

- **demonstração:** Sendo uma equação linear não homogénea, já vimos que a solução geral é a soma da solução geral da EDO homogénea (dada no Teorema A.6.) e de uma particular. Segue o resultado. QED. ■

PARTE A: Sistema de EDOs de ordem 1 -6-

□ **EXEMPLO 2:** Seja o sistema
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + 4 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - e^{3t} \end{cases}$$

Procuremos uma solução particular do tipo

$x_{p1} = a_1 + b_1 e^{3t}$, $x_{p2} = a_2 + b_2 e^{3t}$. Por mera identificação temos $\frac{dx_{p1}}{dt} = 3b_1 e^{3t} = a_2 + 4 + b_2 e^{3t}$ e $\frac{dx_{p2}}{dt} = 3b_2 e^{3t} = a_1 + b_1 e^{3t} - e^{3t}$, daí $a_1 = 0$, $a_2 = -4$ e $b_1 = \frac{-1}{8}$, $b_2 = \frac{-3}{8}$. Logo a solução particular

$$\text{é } \vec{x}_p = - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} e^{3t}.$$

A solução geral é, portanto (vê exemplo 1),

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} e^{3t}.$$

□ **EXEMPLO 3:** Considere o mesmo sistema com $\vec{x}(0) = (0, 0)$. Logo fixemos as constantes por identificação, i.e., $c_1 = \frac{9}{4}$ e $c_2 = \frac{17}{8}$.

PARTE A: Sistema de EDOs de ordem 1 -7-

Método de resolução: caso de valores próprios duplos

Supomos que o valor próprio de A , r , tem multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 1. Seja \vec{u} o único vetor próprio. Neste caso temos $A\vec{u} = r\vec{u}$. Como temos apenas um valor próprio em vez de dois, perdemos alguma informação sobre o sistema pelo que temos de procurar uma solução de uma forma mais geral, i.e. tomemos como aposta $\vec{x} = (\vec{v} + t\vec{u})e^{rt}$ onde \vec{v} é um vetor constante ainda incógnito. Ao inserir \vec{x} na EDO $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ vem

$$r(\vec{v} + t\vec{u})e^{rt} + \vec{u}e^{rt} = A(\vec{v} + t\vec{u})e^{rt} = (A\vec{v} + tA\vec{u})e^{rt}.$$

Portanto, obtemos \vec{v} resolvendo o sistema linear $(A - r\mathbb{I})\vec{v} = \vec{u}$. Mas, $\forall c \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \neq c\vec{u}$ pois caso contrário teríamos $A\vec{u} = (cr + 1)\vec{u}$, uma contradição. Portanto $\vec{u}e^{rt}$ é uma solução independente de $(\vec{v} + t\vec{u})e^{rt}$, logo a solução geral do sistema de EDO homogénea é

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{u}e^{rt} + c_2(\vec{v} + t\vec{u})e^{rt}, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

PARTE A: Sistema de EDOs de ordem 1

-8-

Método de resolução: caso de coeficientes não constantes -1-

Seja $t \mapsto A(t)$ uma matriz 2×2 contínua e invertível, i.e., $\det A(t) \neq 0$ no intervalo I . Sejam $t \mapsto \vec{u}_1(t), \vec{u}_2(t)$ os vetores próprios da matriz $A(t)$ no tempo t , e $t \mapsto r_1(t), r_2(t)$ os valores próprios associados (possivelmente duplos) no tempo t .

■ **DEFINIÇÃO 1:** Sejam $t \in I \mapsto \vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$ duas soluções de $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}$. Seja $B(t) = (\vec{x}_1(t) | \vec{x}_2(t))$ a matrix cujas colunas são as duas soluções \vec{x}_1, \vec{x}_2 no tempo t . Diremos que \vec{x}_1, \vec{x}_2 são independentes se $\det B(t) \neq 0, \forall t \in I$.

- Em alguns casos particulares, pode-se encontrar uma solução facilmente ao problema com coeficientes não constantes.

□ **EXEMPLO 4:** Tome $A(t) = z(t)A$, onde A é uma matriz constante e $t \mapsto z(t)$ uma função real derivável. Temos que resolver $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} = z(t)A\vec{x}$. Efetuamos uma mudança de

PARTE A: Sistema de EDOs de ordem 1

-9-

Método de resolução: caso de coeficientes não constantes -2-

variável $s(t) = \int_0^t z(\tau)d\tau$ de maneira que $\frac{ds}{dt} = z(t)$. Seja $\vec{x}(t) = \vec{y}(s(t)) = (\vec{y} \circ s)(t)$ onde \vec{y} é a nova função vetorial incógnita em vez de x da nova variável s , em vez de t . Pela derivação em cadeia, a EDO em x re-escreve-se

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{y} \circ s) = \frac{d}{ds}(\vec{y} \circ s) \frac{ds}{dt} = \frac{d}{ds}(\vec{y} \circ s) z(t) = z(t)A(\vec{y} \circ s).$$

Simplificando por $z(t)$, a nova EDO em termos da incógnita y é

$$\frac{d\vec{y}(s)}{ds} = A\vec{y}(s).$$

Ora, sendo a EDO com coeficientes constantes, a solução é dada pelo teorema 7. Uma vez que obtivemos $s \mapsto \vec{y}(s)$ é fácil obter a solução do problema inicial em \vec{x} , já que $\vec{x}(t) = \vec{y}(s(t))$ com $s(t) = \int_0^t z(\tau)d\tau, t \in I$. (Nota: é suposto que $0 \in I$).

PARTE A: Sistema de EDOs de ordem 1 -10-

Método de resolução: caso de coeficientes não constantes -3-

□ Vimos como se obtinha uma solução de um sistema de EDO com coeficientes não constantes e homogénea, num caso particular. Enunciamos agora um teorema que garante a solução do sistema de EDO caso fosse não homogéneo. A demonstração é similar às anteriores e vem da linearidade do problema.

■ **TEOREMA A. 8.** A solução do sistema $\frac{d\vec{x}}{dt} - A(t)\vec{x} = \vec{b}(t)$, com $t \mapsto \vec{b}(t)$ uma força vetorial contínua em I , é da forma $\vec{x} = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) + x_p(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, onde $t \mapsto \vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$ são duas soluções independentes da EDO homogénea, e $t \mapsto x_p(t)$ é uma solução particular da EDO $\frac{d\vec{x}}{dt} - A(t)\vec{x} = \vec{b}(t)$. As constantes c_1, c_2 estão determinadas se forem prescritas condições iniciais (ou limites) $\vec{x} = \vec{x}_0$ em $t = t_0 \in I$. Assim, a solução \vec{x} torna-se a única solução do sistema de EDO de ordem 1 não homogéneo.

PARTE A: Sistema de EDOs de ordem 1

-11-

Método de resolução: caso de coeficientes não constantes -4-

□ Vejamos agora como obter uma solução ao problema homogéneo e não homogéneo no caso geral.

□ **Caso homogéneo.** Seja $t \mapsto B(t)$ a matriz cujas colunas são soluções do sistema de EDO homogéneo. Logo $B'(t) = A(t)B(t)$. Suponhamos que $\det B(t) \neq 0, \forall t \in I$, i.e., que todas as soluções são independentes. Portanto podemos invertir a matriz B e vem $B'(t)B^{-1}(t) = A(t)$: é um sistema de EDO não linear que tem solução única, $t \mapsto B(t)$. Porém, é geralmente difícil de resolver.

□ **Observação:** caso A seja uma matriz simétrica, temos uma solução da forma $B(t) = e^{\int_0^t A(\tau) d\tau}$. Aqui o sentido de exponencial de uma matriz é: $e^X := \sum_0^\infty \frac{1}{k!} X^k$. Com efeito, repare que $B' = Ae^{\int_0^t A(\tau) d\tau}$ e $B^{-1} = e^{-\int_0^t A(\tau) d\tau}$, logo $B'(t)B^{-1}(t) = A(t)$.

PARTE A: Sistema de EDOs de ordem 1 -12-

Método de resolução: caso de coeficientes não constantes -5-

□ **Caso não homogéneo.** Calculemos em primeiro a matriz solução do sistema homogéneo, $B(t)$. Procuremos então uma solução do sistema não-homogéneo sob a forma duma combinação linear $\vec{x}_p(t) = B(t)\vec{c}(t)$ das soluções da homogénea com coeficientes não constantes dados pelo vetor incógnito $t \mapsto \vec{c}(t)$. Falta encontrar tais coeficientes. Para o efeito, calculemos

$$\vec{x}'_p(t) = A(t)\vec{x}_p + b(t) \implies B'(t)\vec{c}(t) + B(t)\vec{c}'(t) = A(t)B(t)\vec{c}(t) + \vec{b}(t).$$

Sendo que $B'(t) = A(t)B(t)$, simplifica-se, e vem $B(t)\vec{c}'(t) = \vec{b}(t)$. Invertindo B , obtemos os coeficientes pretendidos integrando $\vec{c}'(t) = B^{-1}(t)\vec{b}(t)$, i.e. (a constante arbitrária C é fixada pelas condições iniciais),

$$\vec{c}(t) = \int_0^t B^{-1}(\tau)\vec{b}(\tau)d\tau + C,$$

PARTE A: Sistema de EDOs de ordem 1 -13-

□ **Questão:** este procedimento limita-se a sistemas de ordem 1? Não, consideremos o sistema de EDO de ordem 2 seguinte:

$$\begin{cases} x''(t) - 4y(t) = e^t \\ y''(t) + t^2 x'(t) = \sin t \end{cases}$$

Introduzimos as novas variáveis

$$x_1(t) = x(t), x_2(t) = x'(t), x_3(t) = y(t), x_4(t) = y'(t),$$

logo o sistema re-escreve-se na forma

$$\begin{cases} x_2'(t) - 4x_3(t) = e^t \\ x_4'(t) + t^2 x_2(t) = \sin t \end{cases}$$

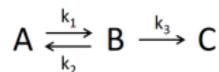
i.e., com $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -t^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

PARTE A: Sistema de EDOs de ordem 1

TP9 -1-

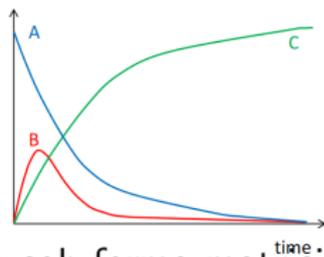
□ **EXERCÍCIO 36:** Uma reação química envolvendo solventes é descrita como abaixo, onde $[E]$ é a concentração do solvente E e k_1, k_2, k_3 são constantes relativas à quinética da reação :



$$d[A]/dt = -k_1[A] + k_2[B]$$

$$d[B]/dt = k_1[A] - (k_2 + k_3)[B]$$

$$d[C]/dt = k_3[B]$$



(i) Escrever o sistema sob forma matricial. (ii) Resolver no caso de $k_3 = 0$. (iii)* Resolver no caso geral e traçar as curvas.

□ **EXERCÍCIO 37:** Efetuar uma mudança de variável e re-escrever o sistema de EDO de ordem 2 em um sistema de ordem 1:

$$\begin{cases} 2x''(t) - y'(t) + 3y(t) & = -\ln t \\ y''(t) + e^t x'(t) - x(t) + y(t) & = 0 \end{cases} .$$

PARTE A: Sistema de EDOs de ordem 1

TP9 -2-

EXERCÍCIO de TEÓRICA-PRÁTICA (Sistema de Lotka-Volterra:) Sejam y o número de indivíduos da população de algum predador (exemplo: lobo) e x o número da indivíduos da população da sua presa (exemplo coelho). Construímos o modelo "de presas-predadores":

1) *Presas extintas*: se as presas forem extintas, como o modelo considera que se trata do único alimento dos predadores, a população de predadores deve extinguir-se também, com uma taxa proporcional a sua população atual. Sendo : γ a constante de

proporcionalidade e t o tempo, temos:
$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -\gamma y, \gamma > 0. \end{cases}$$

2) *Predadores extintos*: se os predadores forem extintos, a população da presa cresce a uma taxa proporcional a população atual. A constante α representa essa proporção, temos:

PARTE A: Sistema de EDOs de ordem 1

TP9 -3-

$$\begin{cases} y & = & 0 \\ \frac{dx}{dt} & = & \alpha x, \alpha > 0. \end{cases}$$

3) *Ambas populações existem:*

Os encontros entre presa e predador, que levam a morte de uma presa, é diretamente proporcional ao produto das suas populações. Entendendo melhor, se tivéssemos os indivíduos a e b da população de presas e c e d da população de predadores, os seus encontros

$$- \quad a \quad b$$

seriam: $c \quad ac \quad bc$, logo, o produto das duas populações. Como

$$d \quad ad \quad bd$$

os encontros tendem a gerar morte da presa e alimentação do predador, temos alterações nas populações. No caso do modelo, temos duas constantes positivas de proporcionalidade envolvidas nesse produto, sendo que β representa taxa de predação e δ de conversão da caça em novos predadores.

PARTE A: Sistema de EDOs de ordem 1

TP9 -4-

Temos:

- ▶ População da presa sofre redução: $: -\beta xy, \beta > 0$
- ▶ População do predador sofre aumento: $: +\delta xy, \delta > 0$

4) *Caso geral*: Considerando todas as três hipóteses, temos como equação desse modelos o que segue (chamado sistema de Lotka-Volterra):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy, \end{cases}$$

com $\alpha, \gamma, \beta, \delta > 0$ os 4 parâmetros da cinética das interações entre presas e predadores.

5) *Solução analítica*: **EXERCÍCIO 38**: Resolver o sistema (dar a solução sob forma implícita).

HINT: eliminar o tempo no sistema e escrever uma EDO para $\frac{dy}{dx}$. Resolver por separação de variável e primitivar. (*Fonte: wikipedia*).

AULA 6 (13/3/2023)

EDO de segunda ordem: introdução e teoria geral; base de soluções; Wronskiano.

PARTE A: EDO de ordem 2

-1-

EDO de ordem 2: a Lei de Newton

A lei de Newton é expressa num referencial inercial (i.e., um observador com velocidade constante) e diz o seguinte: *a soma das forças exteriores atuando num corpo de massa m é igual a massa vezes a aceleração do corpo:*

$$F = \sum_i F_i = ma,$$

onde $a = \frac{d}{dt}v = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, com x e $v := \frac{dx}{dt}$ = a posição e a velocidade do corpo com respeito à origem do referencial.

Logo temos uma EDO de segunda ordem

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F,$$

onde a força F pode ser linear ou não linear e depender de x e $\frac{dx}{dt}$.

PARTE A: EDO de ordem 2

-2-

□ **EXEMPLO 1.** Movimento gravitacional.

$F = F_g(x) = -\frac{g(x-x_0)}{\|x-x_0\|}$ com x_0 a posição do centro da terra. A EDO de ordem 2 correspondente,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{mg}{\|x-x_0\|}(x-x_0) = 0,$$

só faz intervir a derivada segunda de x (a posição), e x sob a forma $(x-x_0)$.

□ **EXEMPLO 2.** Movimento gravitacional com atrito de Coulomb.

$F = \tilde{F}_g(x, \frac{dx}{dt}) = F_g(x) - \eta(\frac{dx}{dt} - v_0)$ com x_0 a posição do centro da terra e v_0 uma velocidade de referência do sistema (o vento por exemplo) e $\eta > 0$ um coeficiente de atrito. Neste caso a força diminui com a velocidade do corpo, pois a resistência do ar aumenta proporcionalmente com a velocidade.

PARTE A: EDO de ordem 2

-3-

A EDO de ordem 2 não linear correspondente é

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - \eta \frac{dx}{dt} - \frac{mg}{\|x - x_0\|} (x - x_0) = \eta v_0,$$

tendo as derivadas primeira e segunda da posição x , e x sob a forma $(x - x_0)$, mais um termo de *forçagem* $R = \eta v_0$. Observamos que o coeficiente de $\frac{dx}{dt}$ é constante, enquanto o de $(x - x_0)$ depende de x .

□ **EXEMPLO 3.** *Oscilador harmonico de tipo mola.* A força que atua numa mola fixada em x_0 é dada por $F_m = -\kappa(x - x_0)$, onde κ é o modulo de elasticidade, ou coeficiente de Lamé.

A EDO de ordem 2 linear correspondente é

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \kappa x = -\kappa x_0.$$

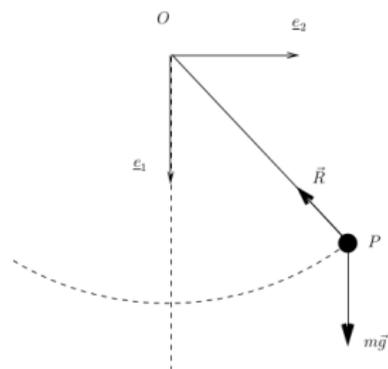
Sem derivada 1.^a de x , e com coeficiente e forçagem constante.

PARTE A: EDO de ordem 2

-4-

□ **EXEMPLO 4.** Oscilador harmônico de tipo pêndulo.

Seja um pêndulo de comprimento ℓ com uma massa m .



Pela conservação do momento linear:

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP} \times m\vec{v}) = \overrightarrow{OP} \times (\vec{R} + m\vec{g}) = \overrightarrow{OP} \times m\vec{g}, \text{ onde } v = \ell\dot{\theta} \text{ e}$$

$$\overrightarrow{OP} = \ell \cos \theta \underline{e}_1 + \ell \sin \theta \underline{e}_2 \implies \ell\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0.$$

□ É uma EDO não linear de ordem 2 com variável dependente o ângulo θ .

PARTE A: EDO de ordem 2

-5-

EDO linear de ordem 2: definição

Uma EDO de segunda ordem tem a expressão

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \quad (\star)$$

onde a incógnita é a função $x \mapsto y(x)$.

É dita homogênea (ou sem forçagem) se $R = 0$.

□ **EXEMPLO 5:** $\frac{d^2y}{dx^2} - 3x^2 \frac{dy}{dx} + \frac{4}{x}y = 2e^{3x}$.

O teorema de existência da EDO de ordem 1 permite demonstrar o seguinte teorema de existência.

■ **TEOREMA A. 9.** A EDO (\star) tem solução única no intervalo I se P, Q e R forem funções contínuas em I e se $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = v_0$ com $x_0 \in I$ e $y_0, v_0 \in \mathbb{R}$.

□ A demonstração da existência e unicidade segue do resultado de existência anterior para sistemas de EDO de primeira ordem.

PARTE A: EDO de ordem 2

-6-

Soluções independentes no caso $R = 0$ (homogéneo).

Duas soluções y_1 e y_2 são independentes se para quaisquer constantes C_1, C_2 , $C_1y_1 + C_2y_2 = 0 \implies C_1 = C_2 = 0$.

Solução geral no caso $R = 0$ (homogéneo).

■ **LEMA A. 1.** A solução geral da equação $(*)$ com $R = 0$ é dada por $y = C_1y_1 + C_2y_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, onde y_1 e y_2 são duas soluções independentes.

• **demonstração:** Pela linearidade temos, para quaisquer soluções y_1 e y_2 , e quaisquer reais $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $C_1y_1'' + PC_1y_1' + QC_1y_1 = 0$ e $C_2y_2'' + PC_2y_2' + QC_2y_2 = 0$, logo adicionando as duas equações, a função $y = C_1y_1 + C_2y_2$ é também uma solução. Por outro lado, o espaço das soluções de uma EDO de ordem 2 tem dimensão 2, logo se y_1 e y_2 são independentes, as mesmas vão gerar o espaço na sua totalidade. Segue a tese. QED. ■

PARTE A: EDO de ordem 2

-7-

Wronskiano.

O Wronskiano em x , $w(x)$, é o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}, \text{ i.e. } w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x).$$

■ **LEMA A. 2.** Seja $R = 0$. Temos $w'(x) = -Pw(x)$, logo

$$w(x) = w(x_0)e^{-\int_{x_0}^x P(\xi)d\xi}. \text{ Para além,}$$

$$w(x) \neq 0, \forall x \iff w(x_0) \neq 0.$$

• **demonstração:** Calculemos $w' = y_1'y_2' - y_2'y_1' + y_1y_2'' - y_2y_1'' = y_1(-Py_2' - Qy_2) - y_2(-Py_1' - Qy_1) = P(y_2y_1' - y_1y_2') = -Pw$.

Logo $\frac{d}{dx} \ln w = -P$ e $w(x) = Ce^{-\int_{x_0}^x P(\xi)d\xi}$ com C constante. Em $x = x_0$ temos $w(x) = w(x_0) = C$. Portanto se $w(x_0) = C \neq 0$, temos também $w(x) \neq 0$, já que multiplicamos por $e^u > 0, \forall u$. A outra implicação é imediata, segue a tese. QED. ■

PARTE A: EDO de ordem 2

-8-

■ **TEOREMA A. 10.** Seja $R = 0$. Duas soluções y_1 e y_2 são independentes sse $w(x_0) \neq 0$ (ou sse $w(x) \neq 0, \forall x$).

● **demonstração:** Pelo Lema A.1, sabemos que se y_1 e y_2 são independentes, a solução geral escreve-se como $y = C_1y_1 + C_2y_2$ com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Seja as condições limites $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = v_0$. Pelo Teorema A.9, sabemos que neste caso a solução existe e é única: é $y = C_1y_1 + C_2y_2$ para um único par de números reais $\{C_1, C_2\}$ (podem ser igual a 0). Logo, $y_0 = y(x_0) = C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0)$ e $v_0 = y'(x_0) = C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0)$. Pela álgebra linear sabemos que isto se verifica sse podemos inverter a matriz 2×2 na equação $\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, ou seja, se e somente se o determinante da mesma não é nulo, ou seja, se e somente se $w(x_0) \neq 0$. Mas pelo lema 2, isto acontece também em todos os x , logo $w(x) \neq 0$. Segue a tese. QED ■

AULA 7 (17/3/2023)

EDO de segunda ordem: soluções particulares e solução geral; teorema de existência e unicidade; EDO com coeficientes constantes: caso homogêneo e não-homogêneo.

PARTE A: EDO de ordem 2

-9-

■ **TEOREMA A. 11.** A solução geral y de (\star) é a soma da solução de (\star) com $R = 0$, mais uma solução particular y_p de (\star) , i.e., $y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_p$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, onde y_1 e y_2 são soluções independentes da EDO homogénea. A solução é única uma vez prescritas condições iniciais.

• **demonstração:** Pelo Lema A.1. temos que $y_h := C_1y_1 + C_2y_2$ é a solução geral da EDO homogénea: $y_h'' + Py_h' + Qy_h = 0$. Por outro lado, $y_p'' + Py_p' + Qy_p = R$. Somando, $y = y_h + y_p$ é solução de (\star) , pela linearidade do operador derivada e da EDO. Se forem prescritas condições iniciais, i.e. $y(0) = y_0$ e $y'(0) = v_0$ esta solução é única. Com efeito, suponhamos que existem duas soluções y e \bar{y} de (\star) . Logo a função $\tilde{y} := y - \bar{y}$ é solução da EDO homogénea com condições limite $\tilde{y}(x_0) = y(x_0) - \bar{y}(x_0) = 0$ e $\tilde{y}'(x_0) = y'(x_0) - \bar{y}'(x_0) = 0$. Vimos no Teorema 9 que a mesma tem uma única solução. Mas $\tilde{y} = 0$ é solução da EDO homogénea,

PARTE A: EDO de ordem 2

-10-

logo é a única solução e concluimos que $y = \bar{y}$. Segue a tese.
QED. ■

Símbolos dos operadores diferenciais

Definimos o símbolo "derivada em ordem x ", D , como $Dy = \frac{dy}{dx}$.

Da mesma forma, a derivada segunda será representada pelo símbolo D^2 : $D^2y = \frac{d^2y}{dx^2}$.

□ **EXEMPLO 6:** $D(2e^{-3x}) = -6e^{-3x}$, $D^2(2e^{-3x}) = 18e^{-3x}$.

□ **EXEMPLO 7:** A EDO $y'' + Py' + Qy = R$ escreve-se como $\varphi(D)y = R$ onde $\varphi(D) := (D^2 + PD + Q)$.

□ **EXEMPLO 8:** A EDO correspondente à $(D^2 + 2xD + 5)y = 3 \sin 2x$ é $y'' + 2xy' + 5y = 3 \sin 2x$.

□ **EXEMPLO 9:** A EDO $x''(t) + 4x'(t) + 3 \sin(2\pi t)x(t) = 0$ escreve-se em símbolos como $(D^2 + 4D + 3 \sin(2\pi t))x = 0$.

PARTE A: EDO de ordem 2: coeficientes constantes -11-

O resultado seguinte é evidente, segue da linearidade da derivada enquanto operador diferencial.

■ **LEMA A. 3.** O operador D é linear.

Equação homogénea com coeficientes constantes: método geral

Seja a EDO de segunda ordem

$$\varphi(D)y = ay'' + by' + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

definida no intervalo I . Chamemos o polinómio característico o polinómio

$$\varphi(u) = au^2 + bu + c = 0, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Calculemos o seu discriminante e as suas raízes:

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad u = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

PARTE A: EDO de ordem 2: coeficientes constantes -12-

□ A solução geral da EDO homogénea depende do sinal do discriminante. O teorema seguinte discrimina os casos.

■ **TEOREMA A. 12.** Seja a EDO $\varphi(D)y = 0$. Temos:

Caso $\Delta > 0$: Seja u_1, u_2 as duas raízes reais e distintas de $\varphi(u) = 0$. A solução geral é da forma
$$y_h(x) = \lambda_1 e^{u_1 x} + \lambda_2 e^{u_2 x}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Caso $\Delta = 0$: Seja u_0 a única raiz reais dupla de $\varphi(u) = 0$. A solução geral é da forma
$$y_h = (\lambda + \mu x)e^{u_0 x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Caso $\Delta < 0$: Seja $r - i\omega$ e $r + i\omega$ as duas raízes complexas e distintas de $\varphi(u) = 0$, com $r, \omega \in \mathbb{R}$. A solução geral é da forma
$$y_h = (\lambda \sin(\omega x) + \mu \cos(\omega x))e^{rx}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

PARTE A: EDO de ordem 2: coeficientes constantes -13-

• **demonstração (casos reais apenas):** No caso de 2 raízes reais distintas, verifiquemos que e^{u_1x} é solução (será similar para e^{u_2x}). Com efeito, $De^{ux} = ue^{ux}$, $D^2e^{ux} = u^2e^{ux}$ e portanto $\varphi(D)e^{ux} = 0$ implica $au^2 + bu + c = 0$, uma vez que $u = u_1, u_2$ são raízes do polinómio. Ora, o Wronskiano

$$\begin{vmatrix} e^{u_1x} & e^{u_2x} \\ u_1e^{u_1x} & u_2e^{u_2x} \end{vmatrix} = e^{(u_1+u_2)x}(u_2 - u_1) \neq 0,$$

pelo que e^{u_1x} e e^{u_2x} são duas soluções independentes.

• No caso de u ser a única raiz dupla, temos de um lado $y_1 := e^{ux}$ solução. Do outro, tomemos $y_2 = ve^{ux}$ com $x \mapsto v(x)$ uma função (por enquanto ainda) incógnita. Calculemos $Dy_2 = v'e^{ux} + vue^{ux}$ e $D^2y_2 = v''e^{ux} + v'ue^{ux} + v'ue^{ux} + vu^2e^{ux}$. Logo temos $\varphi(D)y_2 = av''e^{ux} + v'(2au + b) + v\varphi(u)e^{ux} = 0$. Mas, sendo a raiz única, $u = \frac{-b}{2a}$, e $\varphi(u) = 0$. Logo $\varphi(D)y_2 = 0$ implica $v'' = 0$, logo $v = Ax + B$. Portanto, uma segunda solução

PARTE A: EDO de ordem 2: coeficientes constantes -14-

é $y_2 := (Ax + B)e^{ux}$. Uma vez que o Wronskiano das mesmas é não nulo, são independentes e a solução geral é combinação linear das duas, logo vem $y_h(x) = (\lambda x + \mu)e^{ux}$ com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. QED. ■

□ **EXEMPLO 9:** Seja $\varphi(D) = D^2 + 2D + 1 = (D + 1)^2$, logo a raiz é dupla e é $u = -1$. A EDO $\varphi(D)y = 0$ escreve-se $y'' + 2y' + y = 0$ e tem solução $y(x) = (Ax + B)e^{-x}$. (Verifique).

□ **EXEMPLO 10:** Seja $\varphi(D) = D^2 + 1$, logo a raiz é complexa, e é $u = \sqrt{-1} =: i$. A EDO $\varphi(D)y = 0$ escreve-se $y'' + y = 0$ e tem solução $y = (A \cos x + B \sin x)e^{0x} = A \cos x + B \sin x$, pois que $\omega = 1$ e $r = 0$. Com efeito $(\cos x)'' = -\cos x$ e $(\sin x)'' = -\sin x$.

□ **EXEMPLO 11:** Seja $\varphi(D) = D^2 + 6D + 25$. As raízes de $\psi(u) = 0$ são $\frac{-6 \pm \sqrt{-64}}{2} = -3 \pm 4i$. A EDO homogénea $\varphi(D)y = 0$ escreve-se $y'' + 6y' + 25y = 0$. Tem como solução geral $y(x) = e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$, pois que $\omega = 4$ e $r = -3$.

AULA 8 (20/3/2023)

**EDO de segunda ordem com coeficientes constantes:
soluções particulares.**

PARTE A: EDO de ordem 2: coeficientes constantes -15-

Equação não homogénea: soluções particulares

Seja a EDO $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$. A solução geral será $y = y_h + y_p$ com y_h determinada como acima e y_p uma solução particular. No caso dos coeficientes constantes, podemos apostar e depois determinar a forma da mesma em alguns casos particulares de forçagem $x \mapsto R(x)$.

Antes de mais, introduzimos o conceito de função essencial.

■ **DEFINIÇÃO 2:** uma função essencial é do tipo $e^{\pm kx}$, $\sin(\omega x)$, $\cos(\omega x)$, ou um polinómio de grau m , $p_m(x)$. O produto de duas funções essenciais é também uma função essencial.

Equação não homogénea: método geral

Quando a forçagem consiste numa combinação linear de funções essenciais, a solução particular será uma combinação linear

PARTE A: EDO de ordem 2: coeficientes constantes -16-

das mesmas funções essenciais e eventualmente das suas derivadas de todos as ordens (e as vezes suas primitivas), com constantes multiplicativas por determinar. Isto será realizado inserindo o candidato na EDO e identificando os termos. Alguns casos particulares de forçagem $x \mapsto R(x)$ são os seguintes:

Caso 1: Seja $R(x) = Ce^{kx}$, $C, k \in \mathbb{R}$.

Neste caso, procuremos uma solução particular da forma $y_p(x) = p(x)e^{kx}$, (é o **mesmo** k).

Caso k não é raiz de $\varphi(u) = 0$ Então $p(x) = p_0(x) = A$
(é do mesmo grau, logo a derivada dá outra vez a mesma função essencial da mesma forma).

Caso k é raiz simples Então $p(x) = p_1(x) = Ax + B$
(é de um grau superior).

Caso k é raiz dupla Então $p(x) = p_2(x) = Ax^2 + Bx + C$
(é de dois graus superior).

PARTE A: EDO de ordem 2: coeficientes constantes -17-

Caso 2: Seja $R(x) = a \sin \omega x + b \cos \omega x$, $a, b, \omega \in \mathbb{R}$. Neste caso, se $\pm i\omega$ não for raiz de $\varphi(u) = 0$ (em particular se $\varphi(u)$ não tem raiz imaginária), a boa aposta é uma função da forma $y_p(x) = c + A \sin \omega x + B \cos \omega x$.

(As derivadas dão outra vez a mesma função essencial).

Caso 3: Seja

$R(x) = (C + a \sin \omega x + b \cos \omega x)e^{kx}$, $a, b, C, \omega \in \mathbb{R}$. Assim, se $k \pm i\omega$ não for raiz de $\varphi(u) = 0$, a aposta é uma função da forma $y_p(x) = (A \sin \omega x + B \cos \omega x)e^{kx}$, $A, B, c \in \mathbb{R}$.

(As derivadas dão outra vez a mesma função essencial).

Caso 4: Seja $R(x) = p_1(x)e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$ onde p_1 é um polinómio de grau 1 ($p_1(x) = ax + b$). Aqui k pode ser igual a 0. A solução particular é a mesma exponencial vezes um polinómio cujo grau depende das raízes de φ . Procuremos uma solução particular da forma $y_p = p(x)e^{kx}$, com

PARTE A: EDO de ordem 2: coeficientes constantes -18-

Caso k não é raiz de $\varphi(u) = 0$ Então $p(x) = p_1(x) = Ax + B$
(é do mesmo grau).

Caso k é raiz simples Então $p(x) = p_2(x) = Ax^2 + Bx + C$
(é de um grau superior).

Caso k é raiz dupla Então $p(x) = p_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
(é de dois graus superior).

(Sempre com A, B, C, D e E reais possivelmente nulos).

Caso 5: Seja $R(x) = p_2(x)e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$ onde p_2 é um polinómio de grau 2 ($p_2(x) = ax^2 + bx + c$).

Procuremos uma solução particular da forma $y_p = p(x)e^{kx}$, com

Caso k não é raiz de $\varphi(u) = 0$: $p(x) = p_2(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Caso k é raiz simples: $p(x) = p_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

Caso k é raiz dupla: $p(x) = p_4(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$.

(Sempre com A, B, C, D e E reais possivelmente nulos).

PARTE A: EDO de ordem 2: coeficientes constantes -19-

Caso 6 (caso geral): Seja

$$R(x) = p_n(x)(C + a \sin \omega x + b \cos \omega x)e^{kx}, \quad a, b, C, \omega, k \in \mathbb{R},$$

onde p_n é um polinómio de grau n . Procuremos uma solução particular da forma $p_m(x)(c + A \sin \omega x + B \cos \omega x)e^{kx}$, $c, A, B \in \mathbb{R}$, onde

Caso $k \pm i\omega$ não é raiz de $\varphi(u) = 0$: grau de p_m igual a n .

Caso $k \pm i\omega$ é raiz de $\varphi(u) = 0$: grau de p_m igual a $n + 1$.

etc.

PARTE A: EDO de ordem 2: coeficientes constantes -20-

Fenómeno de ressonância

Sejam u_1 e u_2 (possivelmente iguais) os valores próprios do polinómio fundamental: são chamados frequências próprias do sistema.

Acontece que quando às frequências próprias do sistema são iguais às da forçagem. i.e., aos coeficientes reais k nas exponenciais, o sistema "entra em ressonância".

Muitas vezes isto é uma singularidade do sistema pois "perde-se" alguma informação.

Daí a necessidade de procurar soluções particulares de grau superior.

Este fenómeno surge em qualquer área das Ciências naturais.

PARTE A: EDO de ordem 2: coeficientes constantes -21-

□ **EXEMPLO 12:** Seja a EDO $y'' + 3y' - 4y = 1 - 2x$. A forçagem escreve-se como $R(x) = (1 - 2x)e^{0x}$, logo temos primeiro que averiguar se 0 é uma raiz do polinómio característico $u^2 + 3u - 4 = 0$.

Sendo que 0 não é raiz (noutras palavras não é uma frequência própria do sistema), determinemos uma solução particular da forma $y_p = Ax + B$.

Inserindo a mesma na EDO segue $3A - 4Ax - 4B = 1 - 2x$, logo saí $3A - 4B = 1$ e $4A = 2$, i.e. $y_p(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$.

D'outro lado a solução geral da EDO homogénea é $y_h(x) = C_1 e^{u_1 x} + C_2 e^{u_2 x}$ com u_1, u_2 raízes de $u^2 + 3u - 4 = 0$ (*exercício: encontrar tais valores*).

Logo a solução geral vai ser $y = y_h + y_p$.

PARTE A: EDO de ordem 2: coeficientes constantes -22-

□ **EXEMPLO 13:** Seja a EDO $y'' + 4y = 2e^{-2x}$. Procuremos uma solução particular da forma $y_p(x) = Ce^{-2x}$, i.e., $2e^{-2x} = 4Ce^{-2x} + 4Ce^{-2x}$, donde $C = \frac{1}{4}$.

(exercício: digam porquê funcionou com um polinómio do mesmo grau, ou seja com uma constante vezes a exponencial. Encontrar a solução geral).

□ **EXEMPLO 14:** Seja $\varphi(D)y = R$ com $R(x) = 5e^{3x} + 2\cos(4x)$. Procuremos uma solução particular da forma $y_p(x) = B\cos(4x) + C\sin(4x) + Ae^{3x}$, caso 3 não é raiz do polinómio fundamental, da forma $y_p(x) = B\cos(4x) + C\sin(4x) + (Ax + B)e^{3x}$, caso 3 é uma das duas raízes distintas, e da forma $y_p(x) = B\cos(4x) + C\sin(4x) + (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$ caso 3 é uma raiz dupla de $\varphi(u) = 0$.

Aqui 3 é a frequência que pode fazer como que o sistema entrasse em ressonância, caso tiver um valor próprio igual à 3.

PARTE A: EDO de ordem 2: coeficientes constantes -23-

□ **EXEMPLO 15:** Seja $\varphi(D)y = R$ com
 $R(x) = 2x^2 - 1 + x^2e^{-1x} = (2x^2 - 1)e^{0x} + x^2e^{-1x}$.

Procuramos uma solução particular da forma

$y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C) + (Dx^2 + Ex + F)e^{-x}$, caso 0 e -1 não são raízes do polinómio fundamental, da forma

$y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C) + (Dx^3 + Ex^2 + Fx + G)e^{-x}$, caso 0 não é raiz e -1 é uma das duas raízes distintas, e da forma

$y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C) + (Dx^4 + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H)e^{-x}$
caso 0 não é raiz e -1 é uma raiz dupla de $\varphi(u) = 0$.

Ora, caso 0 for raiz simples sem -1 ser raiz, procuremos uma particular da forma

$y_p(x) = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) + (Ex^2 + Fx + G)e^{-x}$, e caso 0 é raiz dupla, da forma

$y_p(x) = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E) + (Fx^2 + Gx + H)e^{-x}$.

PARTE A: EDO de ordem 2: coeficientes constantes -24-

(exercício: dizer quais seriam às frequências do sistema para que entre em ressonância com esta forçagem. Dar um exemplo de EDO onde isto acontece).

□ **EXEMPLO 16:** Seja $\varphi(D)y = R$ com $R(x) = 2e^{-x} \sin(3x) + 5xe^{2x}$. Procuremos uma solução particular da forma $y_p = (A \sin(3x) + B \cos(3x))e^{-x} + (Cx + D)e^{2x}$, caso nem 2 nem $-1 \pm 3i$ forem raízes, da forma

$y_p = (A \sin(3x) + B \cos(3x))e^{-x} + (Cx^2 + Dx + E)e^{2x}$, caso 2 é uma das duas raízes distintas sem $-1 \pm 3i$ ser raiz, e da forma $y_p = (A \sin(3x) + B \cos(3x))e^{-x} + (Cx^3 + Dx^2 + Ex + F)e^{2x}$, caso 2 é raiz dupla de $\varphi(u) = 0$, sem -1 ser raiz.

(exercício: completar os casos do exemplo anterior, i.e., quando $-1 \pm 3i$ for raiz).

PARTE A: EDO de ordem 2

TP10 -1-

□ **EXERCÍCIO 39:** Seja a EDO $y'' + 3y' - 4y = 1 - 2x$. (i) Re-escrever esta EDO em símbolos; (ii) verificar que $y_p = \frac{x}{2} + \frac{1}{8}$ é uma solução particular; (iii) verificar que $y_h = 3e^{-4x}$ é solução da EDO homogénea associada (sem forçagem); (iv) verificar que $y_h + y_p$ é solução da EDO: pode ser chamada uma solução geral? (v) verificar que $\tilde{y}_o = e^x$ é outra solução da EDO homogénea; (vi) calcular o Wronskiano e dizer qual será a solução geral da EDO homogénea? (vii) qual sera a solução geral da EDO de partida? (viii) quantas constantes arbitrárias existem e como fixa-las?

□ **EXERCÍCIO 40:** Seja a EDO homogénea $\varphi(D)y = y'' + 4y = 0$. (i) Encontrar 2 soluções independentes e a solução geral. (ii) No caso não-homogéneo $\varphi(D)y = 4$ e $\varphi(D)y = 4 + x$ encontrar uma solução particular e a solução geral. (iii) Dar condições iniciais que permitam determinar as constantes. (iv) No caso $\varphi(D)y = 2e^{-2x}$ encontrar uma solução particular (*resposta: e.g., $y_p = \frac{1}{4}e^{-2x}$*).

PARTE A: EDO de ordem 2

TP10 -2-

□ **EXERCÍCIO 41:** Determinar as soluções homogênea, particular e geral das seguintes EDO:

▶ $y'' - 4y = 8x^2;$

▶ $(D^2 + 4D + 5)y = e^x + 15x;$

▶ $4\frac{d^2i}{dt^2} + i = t^2 + 2\cos(3t).$

□ **EXERCÍCIO 42:** Encontrar os candidatos para serem soluções particulares de:

▶ $y'' - 2y' - 3y = 5x\sin(2x) + 2xe^{3x};$

▶ $(D^2 + 8D + 16)y = 3x^2e^{4x} + 5;$

▶ $\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 12x = 4te^{-3t} + 2\cos(3t).$

Dizer quando o sistema entra em ressonância.

□ **EXERCÍCIO 43:** Resolver as EDO seguintes:

▶ $y'' + 16y = 5\sin(2x)$ com $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1;$

▶ $\frac{d^2i}{dt^2} + 4i = 3\cos(2t)$ com $i(0) = 2$ et $i'(0) = 0.$

└ PARTE B/cálculo vetorial e multivariáveis/

PARTE B

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis. Curvas no plano e no espaço. Superfícies parametrizadas.

└ PARTE B/cálculo vetorial e multivariáveis/

AULA 9 (24/3/2023)

Funções vetoriais de m variáveis:

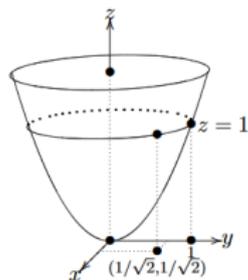
Linhas de nível, gráficos. Limite e continuidade.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -1-

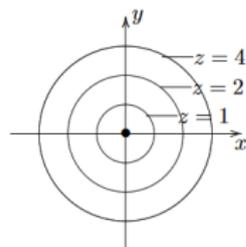
Função escalar de duas variáveis

Uma função é dita "escalar" se toma valores em \mathbb{R} . Até agora só falámos deste tipo de funções: nos EDOS, tratava-se de uma função incógnita, escalar e dependente do tempo t ou do comprimento x . Única exceção: quando falámos de EDO sob forma explícita, $y'(x) = f(x, y)$, introduzimos uma função escalar de duas variáveis $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$, ou nas exátas.

□ **EXEMPLO 1:** $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ ▶ O gráfico de f é o conjunto, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$



Paraboloíde



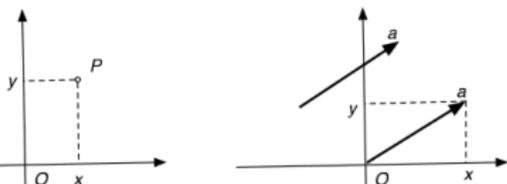
Linhas de nível

▶ No exemplo 1, é um parabolóide: para $z = 1$ a secção do parabolóide é o círculo de raio 1.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -2-

Coordenadas de um ponto e componentes de um vetor no plano

Seja um referencial ortogonal com origem O .



O comprimento de \vec{a} é dado pela norma de \vec{a} :

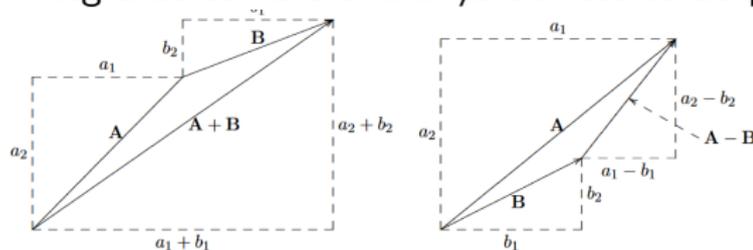
$$\|\vec{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Um vetor unitário tem por definição comprimento igual a 1.

- 1. Coordenadas:** o eixo horizontal é o da coordenada x e o vertical da coordenada y . O ponto P tem (é identificado pelas) coordenadas (x, y) .
- 2. Componentes;** o vetor \vec{a} tem 2 componentes: uma ao longo do eixo dos x , é outra ao longo do eixo dos y , logo as suas componentes são $\langle x, y \rangle$. Um vetor não tem origem, pelo que todas as translações do mesmo terão as mesmas componentes.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -3-

- Um vetor é definido como um elemento dum espaço vetorial: existe uma estrutura linear tal que somas, diferenças, multiplicação por um escalar, existência do vetor nulo, do oposto, etc, são bem definidos.
- Regra de soma e diferença de vetores do plano:



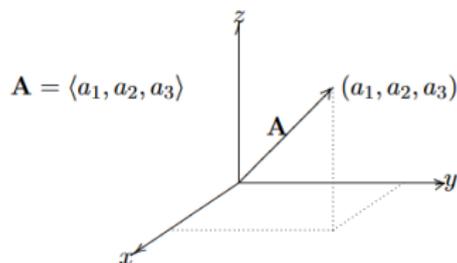
Função vetorial de um escalar

Uma função vetorial é uma função com valores em \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, i.e., $x \mapsto f(x) = \langle f_1(x), \dots, f_n(x) \rangle$ tem n componentes, onde cada componente é uma função escalar do escalar x . O domínio de f é $D \subset \mathbb{R}$, $m \geq 1$. Logo seu gráfico é um conjunto de \mathbb{R}^{1+n} .

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

-4-

- A 3 dimensões, seja um referencial ortogonal com origem 0 e coordenadas x, y e z .



- Um vetor $A = \vec{a}$ tem 3 componentes $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ cada uma ao longo dos eixos dos x, y ou z . Também, pode ser escrito na forma seguinte: $\vec{a} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$.

- Uma função vetorial a 3d $x \mapsto f(x)$ tem 3 componentes, sendo cada uma delas, uma função escalar da variável independente x . Sendo um vetor, tem também uma orientação.

□ **Observação:** A variável x pode ser um escalar ou um vetor de dimensão $m = 1, 2$ ou 3 , possivelmente diferente de n .

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

-5-

Função vetorial multivariáveis

Uma função vetorial multivariáveis é precisamente uma relação $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ quando $m, n \geq 2$, onde D é o domínio de f .

- O domínio D de f é o subconjunto de \mathbb{R}^m onde a função f é definida.

Em particular, a função faz sentido em todos os pontos de D . É costume assumir que D é o maior subconjunto de \mathbb{R}^m onde a função f é definida, apesar de ser legítimo definir f em qualquer subdomínio de D .

- A imagem R de f é o subconjunto de \mathbb{R}^n de todos os pontos que são imagem por f de um ponto do domínio D . Em outras palavras $z \in R$ se e somente se existe um $P \in D$ tal que $f(P) = z$. É costume assumir que R é o maior subconjunto de \mathbb{R}^n , imagem por f de pontos pertencentes ao maior possível domínio D .

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

-6-

Alguns exemplos nas ciências naturais

Em termodinâmica: a pressão depende do volume e da temperatura (função escalar de 2 variáveis)

Em economia: o custo de fabricação de um produto depende do preço das variáveis (m) componentes necessárias a sua fabricação (função escalar de m variáveis).

Em mecânica Newtoniana: a força da gravidade atuando numa massa m é um vetor ao longo dum eixo que passa pelo centro da terra, depende apenas da posição da massa (função vetorial de uma variável)

Em eletricidade: os campos elétricos e magnéticos dependem das 3 variáveis espaciais (x, y, z) e do tempo (funções vetoriais de 4 variáveis).

Em mecânica dos fluidos: a velocidade do fluido depende do espaço e do tempo (função vetorial de 4 variáveis) .

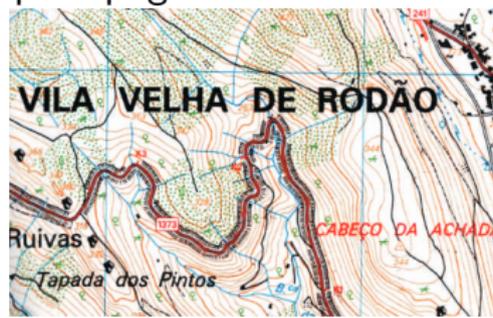
PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -7-

Linhas de nível

Seja uma função escalar $x \mapsto f(x)$ com $x = (x_1, \dots, x_m)$ $\in D \subset \mathbb{R}^m$. A curva (ou linha) de nível de f é a curvas de todos os pontos no domínio de f cujam imagem por f tem altura (i.e., estão ao nível) $f = z$ com $z \in \mathbb{R}$. Portanto é o conjunto (pode ser vazio para alguns valores de z):

$$\{x \in D : f(x) = z, z \in \mathbb{R}\}.$$

É o princípio do mapa topográfico:



PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

-8-

Limite de uma função

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in D$ tal que o domínio D contenha uma bola centrada em x_0 e de raio $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

Dizemos que o limite de f em x_0 é o número L , i.e.,

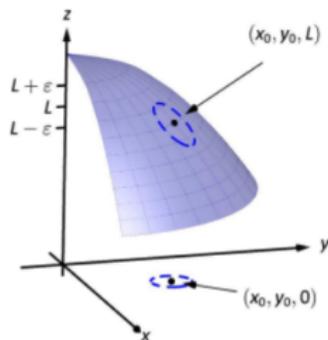
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, se quando x estiver suficientemente perto de x_0 então $f(x)$ é suficientemente perto de L .

Em termos matemáticos, se para um qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x - x_0\| \leq \delta$, então $\|f(x) - L\| \leq \varepsilon$.

□ Notemos que δ depende a partida do ε mas também do x_0 .

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

-9-



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = K.$$

- ▶ $\lim_{x \rightarrow x_0} b = b$, com b constante
- ▶ $\lim_{x \rightarrow x_0} f \cdot b = L \cdot b$
- ▶ $\lim_{x \rightarrow x_0} f + g = L + K$,
- ▶ $\lim_{x \rightarrow x_0} f \cdot g = L \cdot K$

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -10-

Continuidade puntual de uma função

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in D$ tal que o domínio D contenha uma bola centrada em x_0 e de raio $\delta > 0$ suficientemente pequeno. A função f é contínua em x_0 se o seu limite quando x converge à x_0 é $L = f(x_0)$.

Dizemos que a função f é contínua em D se o limite da função $f(y)$ quando y converge à $x \in D$ existe e é igual a $f(x)$:

$$\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x), \quad \text{ou} \quad f(y) \rightarrow f(x) \quad (y \rightarrow x, x, y \in D).$$

Em termos matemáticos, se para um x fixado em D , e um qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta_{x;\varepsilon} > 0$ tal que, $\forall y \in D$ tal que $\|x - y\| \leq \delta_{x;\varepsilon}$, então $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -9-

□ **EXEMPLO 2 (o limite não existe):** Seja $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ com $(x, y) \neq 0$. Deixemos $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo da reta $y = mx, m > 0$. Logo

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{m^2x^3}{x^2 + m^4x^4} = 0, \text{ pois que } \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} \leq$$

$\frac{m^2x^3}{x^2} = m^2x \rightarrow 0$. Ora deixamos $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo da

parábola $x = y^2$. Vem $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$.

• Sendo que 2 caminhos dão 2 limites diferentes, o limite não existe.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -11-

□ **EXEMPLO 3:** Seja $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ com $(x, y) \neq 0$. Ao longo dos 2 caminhos vem o limite 0. Com efeito, ao longo de $y = mx$, i.e., seguindo os pontos da reta que convergirem a 0 vem

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{m^2x^3}{x^2(1+m^2)} = \frac{m^2}{(1+m^2)}x \rightarrow 0 \text{ uma vez que } x \rightarrow 0.$$

De outro lado ao longo da parábola vem

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{y^4}{(y^4+y^2)} = \frac{1}{(1+y^{-2})} \rightarrow 0 \text{ uma vez que } y^{-2} \rightarrow \infty$$

quando $y \rightarrow 0$. Mas, mesmo assim, não é suficiente para provar que o limite é 0, pois todos, absolutamente todos os caminhos possíveis devem dar 0 no limite. Para o efeito, temos de utilizar a definição: seja $\varepsilon > 0$ um numero real arbitrariamente pequeno; temos que mostrar que a distância entre f e 0 é menor de ε se tomarmos (x, y) sufficientemente perto de $(0, 0)$.

Para chegar a isso, temos de procurar uma estimativa para f :

$$|f| = \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| = \frac{y^2}{x^2+y^2} |x| \leq 1 \cdot |x|.$$

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -12-

Ora, é suficiente tomar $\delta = \epsilon$ na definição de limite, já que $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|\langle x, y \rangle - 0\| \leq \delta = \epsilon$ implica $|f(x, y) - 0| \leq \epsilon$, uma vez que acabámos de mostramos (pelas estimativas, i.e. serie de desigualdades acima) que $|f| \leq |x|$. Logo $|f - 0| \leq \epsilon$, e como $\epsilon \rightarrow 0$, o limite de f em $(0, 0)$ é 0.

□ **EXEMPLO 4:** Seja $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$. Vimos que o seu limite em $(0, 0)$ é 0. Mas a função f não foi definida em $(0, 0)$. Portanto não se pode falar de continuidade em $(0, 0)$, apesar de existir um limite em $(0, 0)$. No entanto, se definirmos que o valor de f em $(0, 0)$ é precisamente o seu valor limite, ou seja 0, então $f(0, 0) = 0$, e portanto o limite de f em 0 é 0: assim, f é dita continua em $(0, 0)$. Obviamente, será também continua em todos os pontos do seu domínio.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -13-

□ **Observação:** Rigorosamente falando, f é contínua no seu domínio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, por ser uma fração de funções contínuas. O que chamemos contínua em $(0, 0)$ é a extensão de f ao domínio maior \mathbb{R}^2 . Aqui extendemos f em $(0, 0)$ com o seu valor limite, 0, e assim torna-se contínua. Mas, poderíamos ter escolhido outra extensão de f com um valor em $(0, 0)$ diferente de 0. Logo a função f extendida teria sido igualmente definida em \mathbb{R}^2 na sua totalidade, mas sem ser contínua na origem. O facto é mesmo este: existe uma única extensão de f que a torna contínua, e essa é a que toma como valor de f na origem o seu limite, 0 neste caso.

■ **TEOREMA B. 1.** Polinómios são contínuos em todos os pontos e frações de polinómios são contínuas em todos os pontos onde são definidas (i.e., onde o denominador é diferente de 0).

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

TP11 -1-

□ **EXERCÍCIO 1:** Qual é o domínio e a imagem da função $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$? Qual é o domínio da função de 3 variáveis $f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \sin z$?

□ **EXERCÍCIO 2:** Determinar e traçar as linhas de nível da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para os níveis $k = -6, 0, 6$.

□ **EXERCÍCIO 3:** (i) Qual' é o domínio da função $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; (ii) mostrar que não tem limite em $(x, y) = (0, 0)$; (iii) determinar onde f é contínua no seu domínio.

□ **EXERCÍCIO 4:** Determinar se as funções (i) $f(x, y) = \frac{6x^3y}{2x^4 + y^4}$; (ii) $f(x, y) = \frac{xy \cos y}{3x^2 + y^2}$; (iii) $f(x, y) = \frac{2x^2y + y^3}{x^2 + y^2}$; (iv) $f(x, y, z) = \frac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{\| \langle x, y, z \rangle \|^2}$ tem limite em 0; se tiver, dar o limite; se não tiver, justificar.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

TP11 -2-

- **EXERCÍCIO 5:** (i) Determinar se a função $f(x, y) = \frac{x^2 \sin^2 y}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}$ tem limite em 0; se tiver, dar o limite. (ii) Se for possível, prolongar a função em 0 para torna-la contínua em 0.

Solução: o limite é 0 pois que

$$\left| \frac{x^2 \sin^2 y}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} - 0 \right| \leq \left| \frac{x^2 \sin^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \epsilon$$

visto que $\sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta$ e com a escolha $\delta = \epsilon$. Prolongando a função por 0 em $(0, 0)$, a mesma torna-se contínua.

- **EXERCÍCIO 6:** (i) Determinar se e onde a função $f(x, y) = x^2 y^3 - x^3 y^2 - 3x - 2y$ é contínua; justificar; (ii) avaliar $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} f(x, y)$. Mesma questão para $f(x, y) = xy \cos(x - 2y)$.

- **EXERCÍCIO 7:** Dizer onde a função $f(x, y) = \arctan(y/x)$ é contínua; justificar.

└ PARTE B/cálculo vetorial e multivariáveis/

AULA 10 (27/3/2023)

Funções escalares de m variáveis:

Derivadas parciais; diferencial; diferenciabilidade; derivada de Gâteaux.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -13-

Derivadas parciais

Seja $f(x, y)$ uma função escalar de duas variáveis x e y . A derivada parcial de f em (x_0, y_0) em ordem x indica a taxa de variação da função quando (x, y) se aproxima de (x_0, y_0) com y fixado no valor $y = y_0$. Da mesma maneira, a derivada parcial de f em (x_0, y_0) em ordem y indica a taxa de variação da função quando (x, y) se aproxima de (x_0, y_0) com x fixado no valor $x = x_0$. Em outras palavras, definimos as funções de uma variável $x \mapsto f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ e $y \mapsto f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$, e definimos, formalmente, as derivadas parciais de f como

$$\partial_x f(x_0, y_0) = \frac{df_{y_0}}{dx}(x_0) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1},$$

$(h_1, h_2 \in \mathbb{R}_*)$, e, analogamente,

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -14-

$$\partial_y f(x_0, y_0) = \frac{df_{x_0}}{dy}(y_0) = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{h_2}.$$

- **Outras notações:** $\partial_x f = f_{,x} = \frac{\partial f}{\partial x}$.
- Derivadas parciais para funções de $n \geq 2$ variáveis são definidas analogamente, "congelando" todas excepto uma variável e efetuando a derivada em ordem a esta última.
- Derivadas parciais de ordem superior são definidas da mesma maneira, por exemplo $f_{,xx}(x_0, y_0) = \partial_{xx} f(x_0, y_0) = \frac{d^2 f_{y_0}}{dx^2}(x_0)$,
 $f_{,yx}(x_0, y_0) = \partial_{xy} f(x_0, y_0) = \partial_x \partial_y f(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} \left(\frac{df_x}{dy}(y_0) \right) (x_0)$,
sendo que $x \mapsto \frac{df_x}{dy}(y_0)$ é uma função apenas da variável x .

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -15-

□ **EXEMPLO 5:** Seja $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$.

Temos $\partial_x f(x, y) = -2x$, $\partial_y f(x, y) = -4y$; logo, $\partial_x f(1, 1) = -2$,

$\partial_y f(1, 1) = -4$. Temos também

$\partial_{xx} f = -2$, $\partial_{xy} f = 0$, $\partial_{yy} f = -4$.

□ **EXEMPLO 6:** Seja $g(x, y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$.

Temos $\partial_x g(x, y) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \partial_x\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \frac{1}{1+y}$,

$\partial_y g(x, y) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \partial_y\left(\frac{x}{1+y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \frac{x}{(1+y)^2}$.

Temos também $\partial_{xx} g = \partial_x(\partial_x g) = -\sin\left(\frac{x}{1+y}\right) \frac{1}{(1+y)^2}$.

□ **EXEMPLO 7:** Seja $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$. Temos

$f_{,x} = 3x^2 + 2xy^3$ e $f_{,y} = 3x^2y^2 - 4y$. Reparemos que

$f_{,xy} = \partial_y(\partial_x f) = 6xy^2 = f_{,yx} = \partial_x(\partial_y f) = 6xy^2$.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -16-

Isto é um teorema geral para funções suaves: as derivadas segundas podem comutar.

Equação com derivadas parciais (EDP)

É uma equação da forma

$$F(x, u, \partial_x u, \partial_y u) = 0,$$

onde $(x, y) \mapsto u(x, y)$ é uma função incógnita.

□ Vimos que a derivada parcial é o declive de uma função numa direção escolhida. Ora, a questão é se podemos aproximar uma função escalar de $n \geq 2$ variáveis com um plano, localmente em torno de um ponto (x_0, y_0) onde as derivadas parciais existem.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -17-

Função diferenciável

Uma função $(x, y) \mapsto f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) se é próxima de um plano, i.e. se a distância entre $f(x, y)$ e a função afim $f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0)$, onde $a = \partial_x f(x_0, y_0)$ e $b = \partial_y f(x_0, y_0)$, "tende a 0" quando (x, y) "tende a (x_0, y_0) ".

Diferencial

A função linear $\partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)$ é chamada diferencial de f em (x_0, y_0) na direção $\vec{h} := \langle x - x_0, y - y_0 \rangle$. É linear com respeito ao vetor \vec{h} .

■ **DEFINIÇÃO 1:** (Diferencial de uma função): O diferencial de f é o mapa linear

$$df := \partial_x f dx + \partial_y f dy,$$

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -18-

onde

$$dx[\vec{h}] := x - x_0 \quad \text{e} \quad dy[\vec{h}] := y - y_0$$

é uma notação para indicar as projeções do incremento \vec{h} ao longo dos eixos x e y , respetivamente. Logo o diferencial de f no ponto (x_0, y_0) e na direção \vec{h} é

$$df(x_0, y_0)[\vec{h}] = \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Interpretemos $df(x_0, y_0)[\vec{h}]$ como o valor que aproxima a variação Δf de f em (x, y) e na direção $\vec{h} = \langle x - x_0, y - y_0 \rangle$, i.e.,

$$\Delta f(x, y) := f((x_0, y_0) + \vec{h}) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

linearmente em termos dos incrementos $h_1 = x - x_0$ e $h_2 = y - y_0$.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -19-

DEFINIÇÃO 2 (função diferenciável)

A função $(x, y) \mapsto f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) se pode ser aproximada linearmente pelo seu diferencial, i.e., se as derivadas parciais existem em (x_0, y_0) e se

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0)[\vec{h}] + \|\vec{h}\|\epsilon(\vec{h})$$

com o incremento $\vec{h} := \langle x - x_0, y - y_0 \rangle$, e $\epsilon(\vec{h})$ um número real que podemos "desprezar", i.e. tal que $\epsilon(\vec{h}) \rightarrow 0$ quando $\|\vec{h}\| \rightarrow 0$.

- A quantidade $\|\vec{h}\|\epsilon(\vec{h})$ é chamada o resto. Linearizar a função significa desprezar o resto, uma vez que este último contém todos os termos além dos lineares. Se for desprezável, escrevemos $\|\vec{h}\|\epsilon(\vec{h}) = o(\vec{h})$. Logo, f ser diferenciável significa a existência de um vetor \vec{z} tal que

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -20-

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \vec{z} \cdot \vec{h} + o(\vec{h}).$$

□ Veremos mais a frente que \vec{z} é o "gradiente de f " em (x_0, y_0) .

□ **EXEMPLO 8 (plano tangente = translação vertical do diferencial):** Seja a função

$f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 8y^2 + 2x - 4y + 4$. Para encontrar a equação do plano tangente em $(2, -1)$, temos de calcular primeiro o diferencial de f em $(2, -1)$,

$$df(x_0, y_0)[x - x_0, y - y_0] = \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0),$$

e efetuar uma translação. O plano tangente terá como equação $z = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)[x - x_0, y - y_0]$. Ora, as derivadas parciais são as funções $\partial_x f(x, y) = 4x - 3y + 2$ e

$\partial_y f(x, y) = -3x + 16y - 4$. Logo os seus valores em $(2, -1)$ são $\partial_x f(2, -1) = 13$ e $\partial_y f(2, -1) = -26$.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -21-

De outro lado, $f(2, -1) = 34$, logo o plano tangente terá equação $z = 34 + 13(x - 2) - 26(y - (-1)) = 13x - 26y - 18$, sendo o diferencial de f em $(2, -1)$ o mapa linear (em $\vec{h} = \langle h_1, h_2 \rangle$),

$$df(2, -1)[h_1, h_2] = 13h_1 - 26h_2.$$

Nos exemplos a seguir mostremos que apesar de as derivadas parciais existirem, a função pode não ser diferenciável, i.e., não ser próxima da sua linearização (plano tangente).

□ **EXEMPLO 9 (existência de derivadas parciais):** Seja a função $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$ se $(x, y) \neq 0$ e $f(0, 0) = 0$.

As derivadas parciais de f em $(x_0, y_0) = (0, 0)$ existem e são dadas por $\partial_x f = 1$ e $\partial_y f = 1$. Com efeito se congelarmos y no valor

$$y = y_0 \text{ temos } \frac{d}{dx} f(x, y_0) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2+y_0^2}{x+y_0} \right) = \left(\frac{2x}{x+y_0} - \frac{x^2+y_0^2}{(x+y_0)^2} \cdot 1 \right),$$

$$\text{logo se } y_0 = 0 \text{ vem } \frac{d}{dx} f(x, y_0) = \left(\frac{2x}{x} - \frac{x^2}{x^2} \right) = 2 - 1 = 1.$$

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -22-

A derivada parcial em ordem x é a função constante 1, logo é igual a 1 em $x = 0$. Portanto, $\frac{d}{dx}f(x, 0) = \frac{d}{dx}f(0, 0) = 1$ (por simetria, o resultado é similar para $\partial_y f$).

□ **Observação:** podemos também fixar $y = y_0$ logo no início no valor $y_0 = 0$. Com efeito $f(x, 0) = \frac{x^2}{x} = x$, logo $\frac{d}{dx}f(x, 0) = 1$.

- Mas, a função não é diferenciável, pois o resto não é desprezável.

□ **EXEMPLO 10 (falta de diferenciabilidade na origem):** O diferencial de f na origem é o mapa $df(0, 0)[\vec{h}] = \partial_x f(0, 0)(x - x_0) + \partial_y f(0, 0)(y - y_0) = 1 \cdot (x - x_0) + 1 \cdot (y - y_0) = x + y$. Porém, a função f não é diferenciável na origem pela razão que o resto não se encontra desprezável.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

-23-

$$\text{Com efeito, resto} = f(x, y) - f(0, 0) - (x + y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y} - \frac{(x + y)^2}{x + y} = \frac{-2xy}{x + y} = \frac{\cancel{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\cancel{\sqrt{x^2 + y^2}}(x + y)\cancel{\sqrt{x^2 + y^2}}} \frac{-2xy}{\cancel{\sqrt{x^2 + y^2}}} = \sqrt{x^2 + y^2} \epsilon(\vec{h}) =$$

$$\|(x - 0, y - 0)\| \epsilon(\vec{h}) = \|\vec{h}\| \epsilon(\vec{h}), \text{ onde } \epsilon(\vec{h}) := \frac{-2xy}{(x + y)\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ é uma}$$

função de \vec{h} que não é "bastante pequena", i.e., não tende a 0 quando $\vec{h} = \langle x, y \rangle \rightarrow 0$ (tome por exemplo $x = y$ e deixe $x \rightarrow 0$).

Neste caso, vemos que o plano não aproxima localmente a função.

Fixemos um ponto (x_0, y_0) e uma direção $\vec{h} = \langle h_1, h_2 \rangle \in \mathbb{R}^2$ de norma unitária (i.e. $\|\vec{h}\| = 1$) e definimos a função de uma variável

$$t \mapsto g(t) := f((x_0, y_0) + t\vec{h}).$$

Logo a direção de variação é $t\vec{h}$, $t \neq 0$: tende a 0 quando $t \rightarrow 0$.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

-24-

■ **TEOREMA B. 2 (derivada de Gâteaux):** Se a função $(x, y) \mapsto f(x, y)$ for diferenciável em (x_0, y_0) então para qualquer direção \vec{h} ,

$$df(x_0, y_0)[\vec{h}] = \frac{dg}{dt}(0) = \frac{d}{dt} f(x_0 + th_1, y_0 + th_2)|_{t=0}.$$

• **demonstração:** Calculemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + t\vec{h}) - f(x_0, y_0)}{t} = \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{df(x_0, y_0)[t\vec{h}]}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|t\vec{h}\| \epsilon(t\vec{h})}{t} &= df(x_0, y_0)[\vec{h}] + \lim_{t \rightarrow 0} \|\vec{h}\| \epsilon(t\vec{h}), \\ \text{com } \lim_{t \rightarrow 0} \epsilon(t\vec{h}) \rightarrow 0 \text{ e portanto } \lim_{t \rightarrow 0} \|\vec{h}\| \epsilon(t\vec{h}) &\rightarrow 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

AULA 11 (14/4/2023)

Funções vetoriais de m variáveis:

Plano tangente; Gradiente; Derivada direccional; derivada de uma função composta; matriz Jacobiana, Jacobiano; função de classe \mathcal{C}^1 .

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

-25-

Plano tangente

Seja uma função escalar $(x, y) \in D \mapsto f(x, y)$ e o gráfico $\mathcal{G}_f := \{(x, y, z = f(x, y))\}$. Seja $z_0 = f(x_0, y_0)$ com $(x_0, y_0) \in D$. O plano tangente a \mathcal{G}_f em (x_0, y_0, z_0) é uma translação do diferencial, i.e. é o conjunto dos pontos (x, y, z) que satisfazem a equação

$$z - z_0 = df(x_0, y_0)[\vec{h}] = \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0).$$

□ **EXEMPLO 11:** Seja $z = f(x, y) = x^2 - xy + y$. Qual' é a equação do plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0) = (2, -1)$? (i) Calculemos $f(x_0, y_0) = 5$; (ii) Calculemos $\partial_x f(x_0, y_0) = 5$ e $\partial_y f(x_0, y_0) = -1$;

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -26-

(iii) Logo o plano tangente tem a equação

$$z - 5 = 5(x - 2) - (y + 1).$$

□ **Observação:** o plano tangente (ou o diferencial) pode ser obtido linearizando a expressão $f(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ em termos de h_1 e h_2 , com $\vec{h} = \langle h_1, h_2 \rangle$ a direção de variação de f escolhida.

□ **EXEMPLO 12:** Voltemos a função do exemplo 11 e calculemos $f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = (x_0 + h_1)^2 - (x_0 + h_1)(y_0 + h_2) + (y_0 + h_2) = x_0^2 + 2x_0h_1 + h_1^2 - x_0y_0 - x_0h_2 - y_0h_1 - h_1h_2 + y_0 + h_2 = (2x_0 - y_0)h_1 + (1 - x_0)h_2 + (x_0^2 + y_0) + (h_1^2 - h_1h_2)$.

Substituindo com $(x_0, y_0) = (2, -1)$ e

$\vec{h} = \langle x - x_0, y - y_0 \rangle = \langle x - 2, y + 1 \rangle$, vem $z = f(x, y) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = 5(x - 2) - (y + 1) + 3 + \cancel{(h_1^2 - h_1h_2)}$. Sendo uma linearização, desprezamos o termo quadrático em \vec{h} , $(h_1^2 - h_1h_2)$, logo a equação do plano tangente.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -27-

□ **Observação:** Ora, gostaríamos de averiguar se o resto é de facto desprezável. Para o efeito, calculemos $\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{h_1^2 - h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$.

Temos $\left| \frac{h_1^2 - h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leq \frac{h_1^2 + h_2^2 + 2|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{2(h_1^2 + h_2^2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq 2\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \rightarrow 0$

quando $\|\vec{h}\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \rightarrow 0$. A resposta é sim.

(Lembra-se sempre a desigualdade $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$, logo $a^2 + b^2 \geq 2ab$).

Apliquemos agora o teorema anterior e calculemos o diferencial com a derivada de Gâteaux.

□ **EXEMPLO 13:** Voltemos a função do exemplo 11, fixemos no ponto $(x_0, y_0) = (2, -1)$ a direção $\vec{h} = \langle x - 2, y + 1 \rangle$ e calculemos

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -28-

$$g(t) = f(x_0 + th_1, y_0 + th_2) = (x_0 + th_1)^2 - (x_0 + th_1)(y_0 + th_2) + (y_0 + th_2) = (x_0^2 - x_0y_0 + y_0) + t(2x_0 - y_0)h_1 + t(1 - x_0)h_2 + t^2(h_1^2 - h_1h_2).$$

Ora, basta derivar em ordem t para obtermos

$$g'(t) = 5(x - 2) - (y + 1) + 2t(h_1^2 - h_1h_2), \text{ logo em } t = 0 \text{ vem } g'(0) = 5(x - 2) - (y + 1) = df(2, -1)[\vec{h}].$$

Gradiente de uma função escalar f

Seja $(x, y) \in D \mapsto f(x, y)$ uma função escalar que admite derivadas parciais. O gradiente de f é o vetor $\nabla f := \langle \partial_x f, \partial_y f \rangle$ expressado na base cartesiana $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. O operador ∇ chama-se "nabla". O diferencial de f escreve-se como

$$df = \nabla f \cdot \langle dx, dy \rangle = (\partial_x f \ \partial_y f) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \partial_x f dx + \partial_y f dy.$$

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -29-

Logo o plano tangente escreve-se também em termos do gradiente:

$$z - z_0 = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \langle x - x_0, y - y_0 \rangle = \begin{pmatrix} f_{,x} & f_{,y} \end{pmatrix} (x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

Uma consequência direta desta expressão é o teorema seguinte:

■ **TEOREMA B. 3.** Se $(x, y) \in D \mapsto f(x, y)$ é diferenciável, então f é contínua.

• **demonstração:** temos de demonstrar que

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \left(f((x_0, y_0) + \vec{h}) - f(x_0, y_0) \right) = 0.$$

Mas

$$f((x_0, y_0) + \vec{h}) - f(x_0, y_0) = \frac{f((x_0, y_0) + \vec{h}) - f(x_0, y_0)}{\|\vec{h}\|} \cdot \|\vec{h}\|.$$

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

-30-

Recordemos que pela diferenciabilidade de f , temos

$$f((x_0, y_0) + \vec{h}) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0)[\vec{h}] + \|\vec{h}\|\epsilon(\vec{h}),$$

em que $df(x_0, y_0)[\vec{h}]$ é linear em \vec{h} e $\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \epsilon(\vec{h}) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \left(f((x_0, y_0) + \vec{h}) - f(x_0, y_0) \right) &= \\ &= \lim_{\vec{h} \rightarrow 0} df(x_0, y_0)[\vec{h}] + \lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \|\vec{h}\|\epsilon(\vec{h}) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

QED



PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -31-

Derivada direcional

A derivada direcional de f na direção $h \in \mathbb{R}^2$, com $\|\vec{h}\| = 1$ é

$$D_h f(\cdot) = \vec{h} \cdot \nabla f(\cdot) = h_1 \partial_x f(\cdot) + h_2 \partial_y f(\cdot) = df(\cdot)[\vec{h}].$$

Significa a taxa de variação de f ao longo da direção do vetor \vec{h} .

Derivada de uma função composta

Sejam $(x, y) \in D \mapsto f(x, y)$ uma função vetorial de duas variáveis, diferenciável e $t \in I \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma função do tempo também diferenciável, cuja imagem $\gamma(I)$ é uma curva no plano.

Consideremos a composição de f com γ , i.e. a função composta $t \in I \mapsto g(t) := f \circ \gamma = f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t))$: significa que f apenas apanha as coordenadas que definem a curva γ .

A questão é a de obter a taxa de variação de g : $g'(t) = \frac{dg}{dt}(t)$.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -32-

■ **TEOREMA B. 4:** Seja f uma função de duas variáveis diferenciável e seja $t \mapsto \gamma(t)$ uma curva no plano. Seja $g(t) = f(\gamma(t))$. Então $g'(t_0) = \nabla f(x(t_0), y(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$.

• **demonstração:** Definimos $\gamma_0 := \gamma(t_0)$. De um lado (a esquerda), temos

$$g'(t_0); = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma_0)}{|t - t_0|}. \text{ De outro lado}$$

$$\text{(a direita), temos } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\nabla f(\gamma_0) \cdot (\gamma(t) - \gamma_0)}{t - t_0} = \nabla f(\gamma_0) \cdot \gamma'(t_0).$$

Temos de demonstrar que as duas limites são iguais. Portanto, tomemos a diferença dos dois numeradores e definimos

$$\eta(t) := f(\gamma(t)) - f(\gamma_0) - \nabla f(\gamma_0) \cdot (\gamma(t) - \gamma_0). \text{ Para averiguar}$$

que de facto são iguais, é suficiente mostrar que $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\eta(t)}{t - t_0} = 0$.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -33-

Com efeito, sendo que $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma_0}{t - t_0} =: \gamma'(t_0)$, vem

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\eta(t)}{t - t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\eta(t)}{\|\gamma(t) - \gamma_0\|} \frac{\|\gamma(t) - \gamma_0\|}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\eta(t)}{\|\gamma(t) - \gamma_0\|} \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|\gamma(t) - \gamma_0\|}{t - t_0} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|\gamma(t) - \gamma_0\|}{t - t_0} &= \lim_{\gamma(t) \rightarrow \gamma_0} \frac{\|\gamma(t) - \gamma_0\|}{\|\gamma(t) - \gamma_0\|} \cdot \|\gamma'(t_0)\| = 0, \text{ pois que} \\ \lim_{\gamma(t) \rightarrow \gamma_0} \frac{\eta(t)}{\|\gamma(t) - \gamma_0\|} &= \\ &= \lim_{\gamma(t) \rightarrow \gamma_0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma_0) - \nabla f(\gamma_0) \cdot (\gamma(t) - \gamma_0)}{\|\gamma(t) - \gamma_0\|} = 0 \end{aligned}$$

por definição de f ser diferenciável no ponto γ_0 . QED. ■

Diferencial, matriz jacobiana, Jacobiano.

Seja uma função vetorial de m variáveis definida num domínio $D \subset \mathbb{R}^m$ e com valores em \mathbb{R}^n , onde $m, n \geq 2$ (por simplicidade nos limitamos a $m = n = 2$ na exposição),
 $(x, y) \in D \mapsto f(x, y) = \langle f_1(x, y), f_2(x, y) \rangle$.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -34-

A função é diferenciável em $P = (x_0, y_0) \in D$ se existe uma função (vetorial) linear $L(P) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ t.q.

$$f(P + \vec{h}) = f(P) + L(P)[\vec{h}] + \|\vec{h}\|\epsilon(\vec{h}),$$

em que $\vec{h} = \langle h_1, h_2 \rangle \in \mathbb{R}^2$ é uma direção de variação de f escolhida, $\|\vec{h}\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ e com o resto desprezável:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(\vec{h}) = 0.$$

- A "Jacobiana de f ", é a matriz $m \times n$,

$$J_f(P) := \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix} (P).$$

- Seu determinante é o Jacobiano de f :

$$|J_f|(P) := \det(Jf)(P).$$

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -35-

- **Observação:** uma função de duas variáveis ou mais pode
- (i) ser contínua sem ter derivadas parciais: por exemplo
 $f(x, y) = |x| + |y|$;
 - (ii) ter derivadas parciais sem ser contínua (cf. exercício 13)
 - (iii) ter derivadas parciais sem ser diferenciável (cf. exercício 12)
 - (iv) ser diferenciável sem ter derivadas parciais contínuas (cf. exercício 14)

Mas, vale o teorema seguinte:

■ **TEOREMA B. 5.** Seja $(x, y) \in D \mapsto f$ uma função cujas derivadas parciais existem e são contínuas. Então f é diferenciável.

Função de classe \mathcal{C}^1

Dizemos que $(x, y) \in D \mapsto f(x, y)$ é de classe \mathcal{C}^1 se as derivadas parciais de f existirem e forem contínuas em D .

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

TP12 -1-

□ **EXERCÍCIO 8:** Calcular as derivadas parciais e o gradiente de (i) $f(x, y) = x(1 + xy)^2$; (ii) $f(x, y, z) = xyz - 1$. No caso (ii) calcular as derivadas parciais segundas.

□ **EXERCÍCIO 9:** Seja a função $f(x, y) = x^2 + xy - y$. (i) Calcular as derivadas parciais e o gradiente de f . (ii) Calcular o diferencial no ponto $(2, -1)$ e o plano tangente ao ponto $(2, -1, 3)$. (iii) Efetuar a derivada de Gâteaux no ponto $(2, -1)$ e verificar que corresponde ao diferencial. (iv) Determinar em qual (quais) ponto(s) o plano tangente ao gráfico de f é horizontal. Dizer ao que corresponde tal ponto.

□ **EXERCÍCIO 10 (Linearização -1-):** Seja a função $f(x, y) = x^2 + y^2$. (i) Linearizar o incremento $f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y)$ e determinar o diferencial e o gradiente. (ii) Identificar o resto e verificar que é desprezável, i.e. que é $o(\vec{h})$. (iii) Qual é o diferencial de f e a derivada direcional na direção $\vec{h} = \langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2} \rangle$?

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

TP12 -2-

□ **EXERCÍCIO 11 (Linearização -2-):** Mesma questão com $f(x, y, z) = 2xy - 3z^2$, $\vec{h} = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle$ e a derivada direcional na direção $\vec{h} = \langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0 \rangle$.

□ **EXERCÍCIO 12* (Continuidade da função e existência de derivadas parciais, mas sem diferenciabilidade; falta de continuidade das derivadas parciais):** (i) Calcular as derivadas parciais de (cf. exercício 4(iii)) $f(x, y) = \frac{2x^2y+y^3}{x^2+y^2}$.

Resposta: $\partial_x f(x, y) = \frac{2y^3x}{(x^2+y^2)^2}$ e $\partial_y f(x, y) = \frac{y^4+y^2x^2+2x^4}{(x^2+y^2)^2}$. (ii)

Prolongar a função na origem para torna-la contínua em $(0, 0)$ (cf exercício 4 (iii)). (iii) Verificar a falta de continuidade das mesmas. (iv) Calcular o diferencial. (v) Verificar a falta de diferenciabilidade da função na origem. *HINT: mostrar que o diferencial na direção $\langle h_1, h_2 \rangle$ é h_2 . Utilizando a definição do resto, mostrar que o mesmo não é uma linearização **admissível** da função, logo a mesma não é diferenciável na origem.*

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

TP12 -3-

□ **EXERCÍCIO 13*** (Derivadas parciais existem sem a função ser contínua): Seja a função $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x, y) \neq 0$ e

$f(0, 0) = 0$. (i) Mostrar que o limite em $(0, 0)$ não existe, logo a função não é contínua na origem (HINT: exibir 2 caminhos com limites diferentes); (ii) Mostrar que as derivadas parciais em $(0, 0)$ são nulas (HINT: utilizar a definição de derivada parcial como limite); (iii) esta função pode ser diferenciável na origem?

□ **EXERCÍCIO 14*** (Função diferenciável com derivadas parciais descontínuas): Seja a função $f(x, y) = x^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ se

$(x, y) \neq 0$ e $f(0, 0) = 0$. (i) Verificar que f é contínua em todos os pontos do seu domínio. (ii) Calcular as derivadas parciais em (x, y) e em $(0, 0)$. (iii) Determinar se f é diferenciável em 0 e a expressão do diferencial. (vi) Determinar se as derivadas parciais de f são contínuas no seu domínio.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

TP12 -4-

Solução: (i) a função é contínua fora da origem por ser uma composição de funções contínuas. Na origem avaliamos

$|f(x, y) - 0| \leq x^2 \leq x^2 + y^2$, logo tomemos $\delta = \sqrt{\epsilon}$ e

$|f(x, y) - 0| \leq \epsilon$ se $\|(x, y)\| \leq \delta$, logo é contínua em 0. (ii) Na

origem calculemos $\partial_x f(0, 0) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(0 + h_1, 0) - f(0, 0)}{h_1} =$

$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{h_1^2}{|h_1|} \sin \frac{1}{|h_1|} \leq \lim_{h_1 \rightarrow 0} |h_1| = 0$. Da mesma maneira $\partial_y f(0, 0)$

$= 0$. Fora da origem, $\partial_x f(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + x^2 \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. E também,

$\partial_y f(x, y) = -\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(iii) Se fosse diferenciável na origem teria um diferencial nulo já que as derivadas parciais na origem são nulas.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

TP12 -5-

Ora, vejamos se a função nula é de facto a aproximação de f na primeira ordem, averiguando se o resto é desprezável: com efeito,

$$\epsilon(h) = \frac{|f(h_1, h_2) - f(0, 0) - 0|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{h_1^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \left| \sin \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leq \frac{h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \rightarrow 0$ quando $\|h\| \rightarrow 0$. Portanto f é diferenciável na origem e o seu diferencial é a função 0.

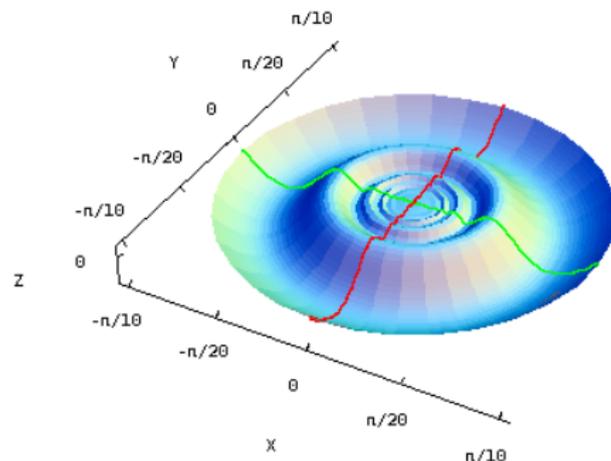
(iv) Consideremos os pontos tais que $y = 0$ e calculemos

$$\partial_x f(x, 0) = 2x \sin \frac{1}{|x|} - \frac{x^3}{|x|^3} \cos \frac{1}{|x|} = 2x \sin \frac{1}{|x|} - \frac{x}{|x|} \cos \frac{1}{|x|}.$$

Apesar de o primeiro termo convergir a 0 quando $x \rightarrow 0$, o segundo não tem limite em 0. Portanto a derivada parcial e f nesses pontos não pode ser contínua, apesar de o diferencial em $(0, 0)$ existir e ser a função 0. Como se vê na figura existe um plano tangente horizontal, i.e., a função nula. Porém, as derivadas parciais oscilam devido ao seno e coseno divergirem na origem, logo existem sem ser contínuas.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

TP12 -6-



□ **EXERCÍCIO 15:** O vetor posição a 3d é o vetor $\vec{p} = \langle x, y, z \rangle$: tem extremidade a origem $(0, 0, 0)$ e $P = (x, y, z)$. O raio $r(P)$ associado a P é o comprimento de \vec{p} , i.e. $r(P) := \|\vec{p}\|$. Calcular o gradiente de $r(P)$ e de $1/r(P)$.

□ **EXERCÍCIO 16:** Avalie o gradiente de $f(x, y, z) = x \sin(\pi y) + y \cos(\pi z)$ em $(0, 1, 2)$.

└ PARTE B/cálculo vetorial e multivariáveis/

AULA 12 (17/4/2023)

Funções vetoriais de m variáveis:

Extremos e otimização

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

-36-

Pontos críticos

Consideremos a função com valores escalares $(x, y) \in D \mapsto f(x, y)$ diferenciável. Os ponto críticos (x_0, y_0) de f são os pontos de D onde o gradiente de f é nulo: $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.

Mínimo e máximo local

Dizemos que um ponto crítico é um máximo da função se

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \text{ onde } \| \langle x, x_0, y - y_0 \rangle \| \leq \epsilon \ (\epsilon > 0)$$

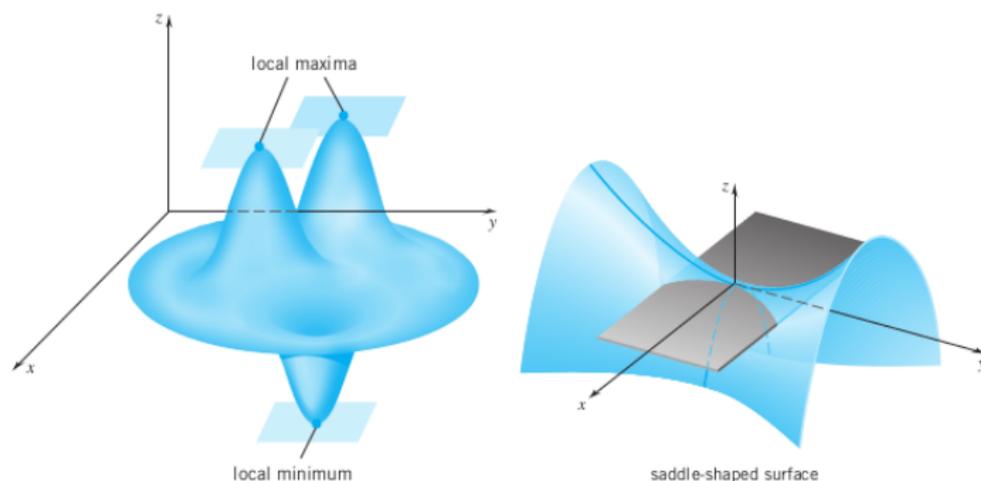
Dizemos que um ponto crítico é um mínimo da função se

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \text{ onde } \| \langle x, x_0, y - y_0 \rangle \| \leq \epsilon \ (\epsilon > 0)$$

□ **Nota 1:** é facil ver, a partir da definição, que nos mínimos, o gradiente tem de ser nulo.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

-37-



- **Nota 2:** Figura a esquerda: nos máximos e mínimos o plano tangente é horizontal, i.e., o gradiente é nulo; Figura a direita: um ponto crítico pode ser nem máximo nem mínimo: neste caso é chamado um "ponto de sela" (mínimo numa direção, máximo na outra).

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -38-

Com efeito, se f for mínimo numa vizinhança de (x_0, y_0) , logo será mínimo ao longo de uma reta $r(t) = (x_0, y_0) + t\vec{V}$ nesta vizinhança, com $t \in \mathbb{R}$ e $\vec{V} \in \mathbb{R}^2$ um vetor unitário qualquer.

Portanto a função $t \mapsto g(t) := f(r(t))$ terá um mínimo em $t = 0$.

Sendo uma função escalar, significa que sua derivada é nula:

$\frac{dg}{dt}(0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot r'(t) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{V} = 0, \forall \vec{V}$. Sendo isto

valido para qualquer direção \vec{V} , temos necessariamente de ter

$\nabla f(x_0, y_0) = 0$. O mesmo raciocínio vale no caso de um máximo.

Porém, como dito na nota 1, se o gradiente se anular, não significa que temos necessariamente um mínimo ou um máximo.

□ **EXEMPLO 14:** Seja $f(x, y) = x^3 + xy + y^2 - x$. Para encontrar os eventuais ponto críticos, calculemos $f_{,x} = 3x^2 + y - 1$ e $f_{,y} = x + 2y$. Impondo $f_{,y} = 0 = f_{,x}$, vem $x = -2y$ e $3(-2y)^2 + y - 1 = 12y^2 + y - 1 = 0$, i.e. $y = \frac{1}{4}, -\frac{1}{3}$. Logo os P.C. (P.C.=pontos críticos) $P = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, e $Q = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -39-

□ **Nota 3:** Para determinar se um P.C. é máximo ou mínimo temos de calcular as derivadas segundas (vê mais a frente).

□ **EXEMPLO 15 (ponto de sela):** Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$. O único ponto crítico é $(0, 0)$ pois $f_x(0) = 0 = f_y(0)$. Mas não é nem máximo, nem mínimo, pois ao longo da reta $y = 0$, 0 é um mínimo (da parábola $z = x^2$) enquanto ao longo de $x = 0$ temos um máximo na origem (da parábola $z = -y^2$).

□ **EXEMPLO 16:** Acabamos de ver que quando temos uma forma quadrática, ser mínimo ou máximo depende do sinal dos coeficientes. Seja então a expressão geral de uma forma quadrática, $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Re-escrevemos a mesma como $f(x, y) = a(x^2 + 2\frac{b}{a}xy + \frac{b^2}{a^2}y^2) + (c - \frac{b^2}{a})y^2 = a(x + \frac{b}{a}y)^2 + \frac{ac-b^2}{a}y^2$, uma vez que $(x + \frac{b}{a}y)^2 = x^2 + 2\frac{b}{a}xy + \frac{b^2}{a^2}y^2$. Com a mudança de variável $u := x + \frac{b}{a}y$, $v := y$, vem $f(x, y) = au^2 + \frac{ac-b^2}{a}v^2$.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -40-

Definimos o número real $D := ac - b^2$. Ora, tudo depende dos coeficientes a e $\frac{D}{a}$. Com efeito, se $a\frac{D}{a} = D > 0$ logo temos uma parábola e ter mínimo o máximo depende do sinal de a (ou de c , é indiferente por simetria). Por outro lado, se $D < 0$ logo temos uma parábola positiva ao longo de uma direção e uma negativa ao longo da outra, logo é um ponto de sela.

Pomos então $a = f_{,xx}$, $b = f_{,xy}$ e $c = f_{,yy}$, calculemos o D associado, e definimos o operador $\Delta := f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$. Vale o seguinte teorema:

■ **TEOREMA B. 6.** Suponhamos que $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Temos

- ▶ se $\Delta(x_0, y_0) < 0$: o P.C. é um ponto de sela
- ▶ se $\Delta(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx} > 0$ ou $f_{yy} > 0$: o P.C. é um mínimo
- ▶ se $\Delta(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx} < 0$ ou $f_{yy} < 0$: o P.C. é um máximo
- ▶ se $\Delta(x_0, y_0) = 0$: nada se pode concluir.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -41-

• **demonstração:** consideremos $g(t) := f\left((x_0, y_0) + t\vec{V}\right)$,

$\forall \vec{V} = \langle u, v \rangle$; temos $g'(t) = \nabla f \cdot \langle u, v \rangle$, logo

$g''(t) = \frac{d}{dt}(f_x, f_y) \cdot \langle u, v \rangle = u \frac{df_x}{dt} + v \frac{df_y}{dt}$. Ora, apliquemos a derivação em cadeia com $x = x_0 + tu$ e $y = y_0 + tv$:

$$g''(t) = u \frac{d(f_x)}{dt} + v \frac{d(f_y)}{dt} = u \left(f_{xx} \frac{dx}{dt} + f_{xy} \frac{dy}{dt} \right) + v \left(f_{yx} \frac{dx}{dt} + f_{yy} \frac{dy}{dt} \right) = u(f_{xx}u + f_{xy}v) + v(f_{yx}u + f_{yy}v) = u^2 f_{xx} + 2uv f_{xy} + v^2 f_{yy}.$$

Sendo a derivada segunda de uma função de uma variável t esse polinómio de ordem 2 em u e v , já sabemos que o mínimo será nos pontos onde $g'' > 0$, e o máximo onde $g'' < 0$, i.e. pelo exemplo 16 com $a = f_{,xx}$, $b = f_{,xy}$ e $c = f_{,yy}$, nas condições do enunciação. Para além, o ponto de sela será onde este polinómio não tem sinal definido, i.e. quando $\Delta < 0$. QED. ■

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

-42-

□ **EXEMPLO 17:** Retomemos a função do exemplo 14 e calculemos as derivadas parciais segundas. Vem $f_{,xx} = 6x$, $f_{,xy} = 1 = f_{,yx}$, $f_{,yy} = 2$. Portanto no P.C. P temos $\Delta(P) = 6(-\frac{1}{2})2 - 1^2 = -7$ e em Q , $\Delta(Q) = 6(\frac{2}{3})2 - 1^2 = 7$. Logo P é um ponto de sela, e sendo que $f_{,xx}(Q) = 4 > 0$, Q é um mínimo.

□ Vejamos agora o que acontece se o gradiente for nulo num aberto em vez de ser apenas zero num ponto isolado do domínio.

□ **Lembrete:** o teorema seguinte é uma consequência fácil do teorema dos valores intermédios para funções de uma variável.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis -43-

■ **TEOREMA B. 7 (valores intermédios).** Seja $f : D \mapsto \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $U \subset D$ e seja o segmento $[P; Q] \subset U$. Então existe $R \in [P; Q]$ tal que

$$f(Q) - f(P) = \nabla f(R) \cdot \overrightarrow{OQ - OP}$$

□ Um resultado importante legado a esse teorema é o seguinte:

■ **Corolário B. 1 (valores intermédios).** Suponhamos que U seja um conjunto aberto e conexo e $f : D \mapsto \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $U \subset D$. Então

$$\nabla f = 0 \quad \forall x \in U \implies f \text{ é constante em } U.$$

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

TP13 -1-

- **EXERCÍCIO 17:** Seja a função $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$. (i) Determinar em quais pontos o plano tangente ao gráfico desta função é horizontal; (ii) Dizer o que acontece nesses pontos; (iii) Determinar se a função admite máximo(s) e/ou mínimo(s).
- **EXERCÍCIO 18:** Determinar os pontos críticos e seu tipo da função $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$.
- **EXERCÍCIO 19:** Seja $f(x, y) = x^2 + 2y^4 + xy + 4x + 2y$. (i) Encontrar os pontos críticos de f ; (ii) encontrar os mínimos e máximos locais de f ; (iii) Determinar se algum dele é mínimo ou máximo global; justificar.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

TP13 -2-

□ **EXERCÍCIO 20:** Seja $f(x, y) = y^2 - xy + 2x + y + 1$. (i) Calcular o seu gradiente e determinar o(s) seu(s) ponto(s) crítico(s); (ii) Seja (x_0, y_0) um ponto crítico de f . Calcular $\delta f(x_0, y_0) := f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ com $h, k \in \mathbb{R}$ e determinar se $\delta f(x_0, y_0)$ tem um sinal definido. Concluir que tipo de ponto crítico se trata.

□ **EXERCÍCIO 21:** Seja $f(x, y) = e^{\frac{x^2+y^2}{2}}$. (i) Calcular os pontos críticos e determinar o seus tipos. (ii) Utilizando o teorema 4, calcular a taxa de variação de f na curva $t \in [0, 2\pi[\mapsto \gamma(t) = (t \sin t, -t \cos t)$. (iii) Determinar se e onde f tem derivada nula na curva. Dizer se se trata de um mínimo ou de um máximo. (iv) Determinar em quais pontos do círculo de raio 1 e centro 0, f atinge seu mínimo e máximo, e o valor dos mesmos.

PARTE B: cálculo vetorial e multivariáveis

TP13 -3-

- **EXERCÍCIO 22:** Seja um elipse planar
 $t \in [0, 1[\mapsto (x(t), y(t)) = (a \cos(2\pi t), b \sin(2\pi t))$, $a > b > 0$.
Determinar em quais pontos a distância à origem é mínima e máxima.
- **EXERCÍCIO 23:** Calcular a taxa de variação de
 $f(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$ ao longo da elipse do exercício 22.

└ PARTE B/Curvas no plano e no espaço/

AULA 13 (21/4/2023)

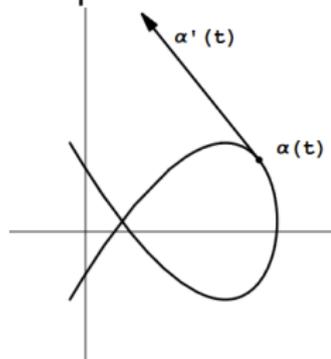
Curvas no plano e no espaço.

PARTE B: Curvas no plano e no espaço

-1-

Curva parametrizada e imagem de uma curva

Uma curva parametrizada γ é uma função do tempo tal que $\forall t \in I$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ onde $t \mapsto x(t)$ e $t \mapsto y(t)$ são duas funções diferenciáveis do tempo.



1. **Imagem de uma curva:** a curva é definida no intervalo de tempo $I = [a, b]$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ e b pode tomar o valor $+\infty$. A imagem de γ é o conjunto de todos os seus pontos:

$$\gamma[I] := \{(x(t), y(t)) : t \in I\}.$$

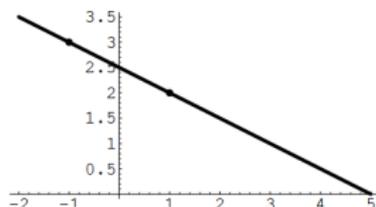
2. **Velocidade;** o vetor $\vec{\gamma}' := \langle \frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t) \rangle$ é a velocidade da curva, ou seu vetor tangente em t . Vamos assumir que $\vec{\gamma}' \neq \vec{0}$, i.e. que a curva é **regular**.

PARTE B: Curvas no plano e no espaço

-2-

Curva parametrizada e imagem de uma curva: exemplos

1. A reta tem como equação paramétrica $x(t) = 5 - 10t$ e $y(t) = 5t$. Sua expressão implícita é obtida eliminando o tempo: $x + 2y = 5$.

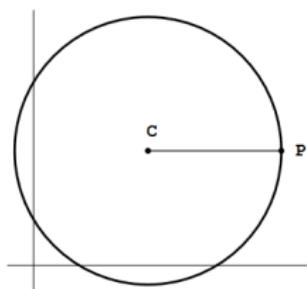


2. Uma reta passando pelos pontos P e Q pode ter várias expressões paramétricas, i.e., $\gamma_1(t) = tP + (1 - t)Q, t \in \mathbb{R}$, mas também $\gamma_2(t) = tQ + (1 - t)P$ (invertindo o sentido da velocidade) ou $\gamma_3(t) = 2tP + (1 - 2t)Q$ (dobrando a intensidade da velocidade).
3. As 3 curvas parametrizadas γ_1, γ_2 e γ_3 têm todas a mesma imagem, $\gamma_1[\mathbb{R}] = \gamma_2[\mathbb{R}] = \gamma_3[\mathbb{R}]$, apesar de as suas parametrizações serem distintas.

PARTE B: Curvas no plano e no espaço

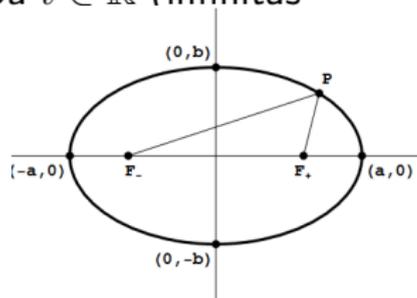
-3-

O círculo de raio r e centro $C = (x_0, y_0)$ é a imagem da curva parametrizada $(x_0 + r \cos(2\pi t), y_0 + r \sin(2\pi t))$.



Sua expressão implícita é $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

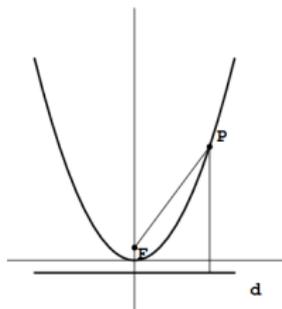
A elipse centrada na origem e com semieixos a e b é a imagem da curva parametrizada $(a \cos(2\pi t), b \sin(2\pi t))$. podemos ter $t \in [0, 1[$ (uma volta) ou $t \in \mathbb{R}$ (infinitas voltas).



Sua expressão implícita é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ou também $\|\overrightarrow{PF_-}\| + \|\overrightarrow{PF_+}\| = \text{cste}$.

PARTE B: Curvas no plano e no espaço -4-

1. A parábola tem representação paramétrica $\gamma \equiv (t, t^2)$ ou $\gamma \equiv (2t, 4t^2)$.



2. Implicitamente vem $y = x^2$.
3. Uma representação sem coordenadas é: existe um "foco" F e uma "reta diretriz" d tal que a distância de P a F é igual a distância de P a d qualquer seja $P \in \gamma(I)$.

Comprimento de uma curva

Seja $\gamma = (x(t), y(t)), t \in I = [a, b]$ uma curva parametrizada com velocidade $\vec{\gamma}'$. O seu comprimento é definido como

$$\ell(\gamma) := \int_a^b \|\vec{\gamma}'(t)\| dt.$$

PARTE B: Curvas no plano e no espaço

-5-

Parametrização pela abscissa curvilínea

Já vimos que podemos mudar o parâmetro t , sendo que isto muda a velocidade da curva. Existe uma mudança particular $t \mapsto s(t)$ onde s é chamada abscissa curvilínea ou parametrização pelo comprimento de arco:

$$s(t) := \int_a^t \|\vec{\gamma}'(\tau)\| d\tau.$$

Sendo que $s'(t) := \frac{ds}{dt}(t) = \|\vec{\gamma}'(t)\| > 0$ podemos inverter $t \mapsto s(t)$ e obtemos a mudança $s \mapsto t(s)$.

□ Dizemos que a curva é parametrizada pelo comprimento de arco ou pela abscissa curvilínea quando falamos da representação

$$\gamma \equiv \tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s)).$$

A mesma tem velocidade unitária: $\frac{d\tilde{\gamma}(t)}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{\gamma}'(t)}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\vec{\gamma}'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|}$.

PARTE B: Curvas no plano e no espaço

-6-

Com efeito se calcularmos, vem

$$\|\vec{T}\| = \left\| \frac{d\tilde{\gamma}(t)}{ds} \right\| = \left\| \frac{\vec{\gamma}'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|} \right\| = \frac{\|\vec{\gamma}'(t)\|}{\|\vec{\gamma}'(t)\|} = 1.$$

Curvatura de uma curva

Uma vez escolhida a parametrização pela abcissa curvilínea, conseguimos definir o vetor normal à curva e a curvatura da mesma: são as chamadas fórmulas de Frenet.

■ **DEFINIÇÃO 3:** Seja $\vec{T}(s) = \vec{\gamma}'(s) = \langle x'(s), y'(s) \rangle$ o vetor tangente a curva, de norma unitária. O vetor **normal** à curva é $\vec{N} = (-y', x')$, pois que $\vec{N} \cdot \vec{T} = -x'y' + y'x' = 0$. Sendo uma rotação de 90° de \vec{T} , é também **unitário**: $\|\vec{N}\| = 1$.

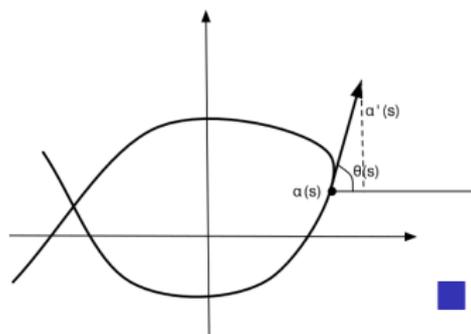
PARTE B: Curvas no plano e no espaço -7-

■ **TEOREMA B. 8 (Frenet 2d).** Seja uma curva regular e suave. Seja s a abscissa curvilínea da curva. Então temos $\frac{d\vec{T}}{ds}(s) = \kappa(s)\vec{N}(s)$ e $\frac{d\vec{N}}{ds}(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s)$. O número real $\kappa(s)$ é chamado curvatura da curva em $(x, y) = \gamma(s)$.

• **demonstração:** Temos $\|\vec{T}\| = 1$ uma vez que a parametrização é pela abscissa curvilínea. Derivando $\|\vec{T}\|^2 = \vec{T} \cdot \vec{T} = 1$, vem $2\frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} = 0$, logo o vetor $\frac{d\vec{T}}{ds}$ é ortogonal à \vec{T} . Isto implica que é proporcional à \vec{N} , i.e. $\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{N}$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Da mesma forma $\frac{d\vec{N}}{ds} = \lambda\vec{T}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ora, derivando $\vec{T} \cdot \vec{N} = 0$ implica $\frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{N} + \frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{T} = 0$ ou seja $\kappa = \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{N} = -\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{T} = -\lambda$. QED. ■

□ Os dois lemas seguintes são válidos sob as hipóteses do Teorema B. 8.

PARTE B: Curvas no plano e no espaço -8-

Interpretação
geométrica da
curvatura:

■ **LEMA B. 1.** Temos $\kappa = \pm \|\vec{\gamma}''\|$.

• **demonstração:** Sendo \vec{N} unitário, vem $\vec{\gamma}''(s) = \frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa \vec{N}$, logo $\|\vec{\gamma}''\| = |\kappa| \|\vec{N}\| = |\kappa|$. QED. ■

Definimos o ângulo $s \mapsto \theta(s)$ entre o eixo dos x e o vetor tangente $\vec{T}(s)$.

■ **LEMA B. 2.** Temos $\kappa = \frac{d\theta}{ds}(s)$.

• **demonstração:** Por Frenet, $\vec{T}'(s) = \kappa(s)\vec{N}(s)$, i.e., $x'' = -\kappa y'$ e $y'' = \kappa x'$, logo $y''x' - x''y' = \kappa(x'^2 + y'^2) = \kappa(\star)$, já que $\|\vec{T}\| = x'^2 + y'^2 = 1$. Por outro lado, pela figura $x'(s) = \cos \theta(s)$ e $y'(s) = \sin \theta(s)$. Logo, derivando em ordem t , vem $x''(s) = -\sin \theta(s)\theta'(s)$ e $y''(s) = \cos \theta(s)\theta'(s)$. Portanto, por (\star) , $\kappa = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)\theta'(s) = \theta'(s)$. QED. ■

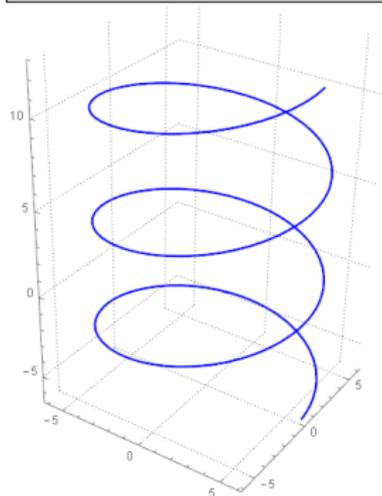
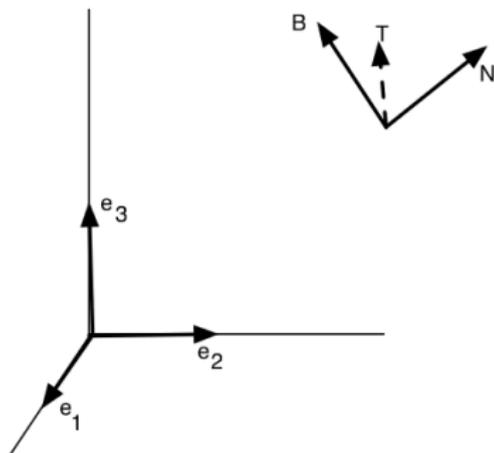
PARTE B: Curvas no plano e no espaço

-9-

Curva espacial (ou tridimensional (3d))

Consideremos um referencial tri-dimensional com coordenadas x ao longo do eixo e_1 , y de e_2 e z de e_3 .

Uma curva 3d tem 3 componentes espaciais, cada dependente do mesmo parâmetro t (o tempo).



PARTE B: Curvas no plano e no espaço -10-

- ▶ Uma curva 3d parametrizada pela variável t é dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$
- ▶ O parâmetro t é considerado como sendo o tempo: a gente percorre a curva de uma extremidade, $\gamma(0)$, a outra, $\gamma(t)$, com uma certa velocidade dada por $\vec{\gamma}'(t)$. A intensidade da velocidade não depende da imagem da curva, mas depende apenas da escolha do parâmetro tempo.
- ▶ Em alternativa, a curva pode ser parametrizada por comprimento de arco s : $s(t)$ é igual ao comprimento do arco entre $\gamma(0)$ e $\gamma(t)$.
- ▶ Neste caso, definimos o vetor tangente com $\vec{T} = \frac{d\gamma}{ds}$ e a curvatura como $\kappa = \|\vec{\gamma}''(s)\| = \|\vec{T}'(s)\| > 0$.
- ▶ podemos dizer que o vetor tangente é uma velocidade unitária.

PARTE B: Curvas no plano e no espaço

-11-

Frenet tri-dimensional

■ **DEFINIÇÃO 4:** : definimos o vetor normal como o vetor unitário $\vec{N} = \frac{\vec{T}'(s)}{\kappa(s)}$. O vetor **bi-normal** é o vetor unitário $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$. Assim a tripla $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ define um referencial ou uma base do espaço (vê figura página 8.)

■ **TEOREMA B. 9 (Frenet 3d).** Seja uma curva 3d parametrizada pela abcissa curvilínea. Temos

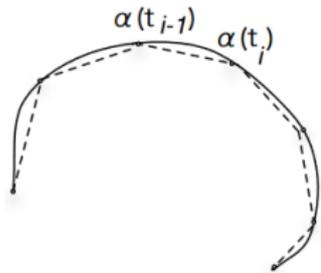
$$\begin{aligned}\vec{T}'(s) &= \kappa(s)\vec{N}(s) \\ \vec{N}'(s) &= -\kappa(s)\vec{T}(s) + \eta(s)\vec{B}(s) \\ \vec{B}'(s) &= -\eta(s)\vec{T}(s).\end{aligned}$$

O numero real $s \mapsto \eta(s)$ é chamado **torção** da curva em $\gamma(s)$.

PARTE B: Curvas no plano e no espaço

TP14 -1-

□ **EXERCÍCIO 24:** Vamos aproximar uma curva regular α por segmentos sempre mais curtos. Consideremos uma partição do intervalo $[a, b]$ em N segmentos de tamanho igual a Δt , i.e., $[t_i, t_{i+1}]$ com $t_1 = a$ e $t_N = b$.



Temos
$$l(\alpha) \sim \sum_{i=1}^N \|\vec{\alpha}'(t)\| (t_{i+1} - t_i) =$$

$$\sum_{i=1}^N \|\vec{\alpha}'(t)\| \Delta t \rightarrow l(\alpha), \quad N \rightarrow \infty.$$

O comprimento exato é $l(\alpha) := \int_a^b \|\vec{\alpha}'(t)\| dt$. pode ser aproximado somando os comprimentos dos segmentos $[\alpha(t_i); \alpha(t_{i+1})]$, i.e.,

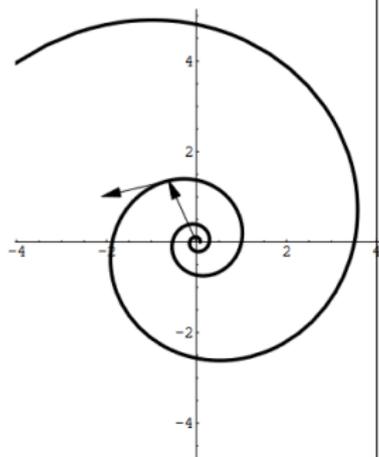
$$l(\gamma) \sim \sum_{i=1}^N \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\|.$$

Ora, a derivada de α em t_i é aproximada por $\vec{\alpha}'(t_i) \sim \frac{\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$.

PARTE B: Curvas no plano e no espaço

TP14 -2-

□ **EXERCÍCIO 25:** Consideremos a espiral logarítmica com equação $\gamma(t) = (e^{bt} \cos t, e^{bt} \sin t)$.



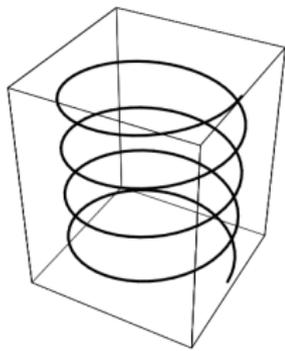
- (i) Calcular o vetor velocidade e o seu módulo (norma) em cada ponto da espiral.
- (ii) Calcular o comprimento da curva entre $t = 0$ e $t = 4\pi$. Indicar na figura o arco correspondente.
- (iii) Determinar a abscissa curvilínea $s(t)$.
- (iv) Determinar o mapa inverso $t(s)$ (pode-se tomar $b = 1$). Expressar a curva em termos de s . Calcule a velocidade e o seu módulo.

PARTE B: Curvas no plano e no espaço

TP14 -3-

□ **EXERCÍCIO 26:** (i) Encontrar a curvatura da élipse generica em cada ponto. HINT: Utilizar a fórmula $\kappa(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t)|\ddot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}$ valida quando o parâmetro for t em vez da abcissa curvilínea. (ii) Seja $a > b$. Dizer se a élipse tem maior curvatura em $(a, 0)$ ou $(0, b)$.

□ **EXERCÍCIO 27:** Considere o hélice com equação paramétrica $\gamma = (a \cos t, a \sin t, bt)$.



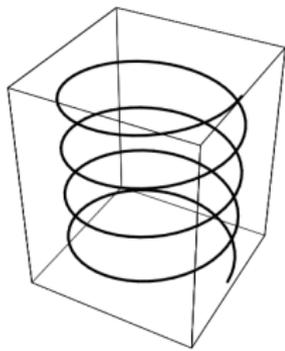
- (i) Calcular o vetor velocidade e o seu módulo em cada ponto da hélice.
- (ii) Calcular o comprimento da curva entre $t = 0$ e $t = 2\pi$.
- (iii) Determinar a abcissa curvilínea $s(t)$.
- (iv) Determinar o mapa inverso $t(s)$. Expressar a curva em termos de s .
- (v) Determinar a curvatura do hélice.

PARTE B: Curvas no plano e no espaço

TP14 -3-

□ **EXERCÍCIO 26:** (i) Encontrar a curvatura da élipse generica em cada ponto. HINT: Utilizar a fórmula $\kappa(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t)|\ddot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}$ valida quando o parâmetro for t em vez da abcissa curvilínea. (ii) Seja $a > b$. Dizer se a élipse tem maior curvatura em $(a, 0)$ ou $(0, b)$.

□ **EXERCÍCIO 27:** Considere o hélice com equação paramétrica $\gamma = (a \cos t, a \sin t, bt)$.



- (i) Calcular o vetor velocidade e o seu módulo em cada ponto da hélice.
- (ii) Calcular o comprimento da curva entre $t = 0$ e $t = 2\pi$.
- (iii) Determinar a abcissa curvilínea $s(t)$.
- (iv) Determinar o mapa inverso $t(s)$. Expressar a curva em termos de s .
- (v) Determinar a curvatura do hélice.

AULA 14 (24/4/2023)

Representação de superfícies: superfícies parametrizadas.

PARTE B: Superfícies parametrizadas regulares -1-

Definição de superfícies parametrizada regular

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região do plano. Seja $p : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ um mapa de classe \mathcal{C}^1 (*significa que é uma função vetorial a 3 dimensões contínua e com derivadas parciais contínuas*) tal que a matriz Jacobiana Jp é de rank 2 (*i.e. tal que tem 2 linhas independentes*). Em particular p é invertível tal que o inverso seja também uma função contínua; dizemos que $p : D \rightarrow p(D)$ é uma bijeção. O conjunto do espaço tri-dimensional

$$S \equiv p(D) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = p_1(u, v), y = p_2(u, v), z = p_3(u, v)\},$$

$(u, v) \in D$ é chamado "superfície parametrizada regular". Os dois parâmetros são as coordenadas (u, v) escolhidas na região D .

□ **NOTA:** (u, v) podem não ser as coordenadas Cartesianas (x, y) (por exemplo $(u, v) = (r, \theta)$).

PARTE B: Superfícies parametrizadas regulares -2-

□ **EXEMPLO 1:** o mapa $p(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, v)$ definido em $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ é uma superfície parametrizada.

□ **EXEMPLO 2:** as equações $x = \cos u$, $y = \sin u$ e $z = v$ definem uma superfície parametrizada: é um cilindro, pois temos $x^2 + y^2 = 1$. A altura é dada por $v \in [0, h]$.

Vetores tangentes e normais

A superfície $S \equiv p(D)$ tem em cada ponto 2 vetores tangentes independentes (a razão é o rank - ou a característica da Jacobiana ser igual a 2). São definidos como as derivadas parciais do mapa parametrização p , i.e. $p_{,u}(u, v) = \partial_u p(u, v)$ e $p_{,v}(u, v) = \partial_v p(u, v)$. Vamos considerar os vetores tangentes unitários $\vec{T}_u = \frac{p_{,u}}{\|p_{,u}\|}$ e $\vec{T}_v = \frac{p_{,v}}{\|p_{,v}\|}$. Também, em cada ponto da superfície existe um vetor normal unitário $\vec{N} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v$.

PARTE B: Superfícies parametrizadas regulares -3-

□ **EXEMPLO 3:** O mapa $p(u, v) = (u + v, 3 - u, 2v)$ define um plano. Com efeito $p_{,u} = (1, -1, 0)$ e $p_{,v} = (1, 0, 2)$; portanto o vetor normal à superfície $\vec{N} = \frac{p_{,u} \times p_{,v}}{\|p_{,u} \times p_{,v}\|} = \frac{1}{3}(-2, -2, 1)$ é um vetor constante.

□ **EXEMPLO 4:** O cone tem como equação paramétrica $(x, y, z) = (u \cos v, u \sin v, u)$ com $u \in [0, h]$ e $v \in [0, 2\pi[$, pois que $x^2 + y^2 = z^2$ é a equação implícita de um cono de altura z .

Calculemos os vetores tangentes e normais unitários. Sendo que $p_{,u} = (\cos v, \sin v, 1)$ e $p_{,v} = (-u \sin v, u \cos v, 0)$, os unitários são $\vec{T}_u = \frac{p_{,u}}{\|p_{,u}\|} = \frac{p_{,u}}{\sqrt{2}}$ e $\vec{T}_v = \frac{p_{,v}}{\|p_{,v}\|} = \frac{p_{,v}}{u}$, uma vez que $\|p_{,u}\| = \sqrt{2}$ e $\|p_{,v}\| = u$. Logo o vetor normal unitário ao cone é

$$\vec{N} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos v, -\sin v, 1).$$

PARTE B: Superfícies parametrizadas regulares -4-

□ **EXEMPLO 5:**

Seja $(u, v) \in D$ o sistema de coordenadas escolhido e $p(u, v) = u\vec{e}_x + u \cos v\vec{e}_y + u \sin v\vec{e}_z$. Determinemos de que superfície se trata, procurando sua forma implícita (ou seja, sem parâmetros). Uma vez que as equações paramétricas são $(x, y, z) = (u, u \cos v, u \sin v)$, calculemos $y^2 + z^2 = u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v = u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) = u^2 = x^2$. A superfície $y^2 + z^2 - x^2 = 0$ é uma quadrática (noemadamente, um cone com eixo o eixo dos x).

□ Pode acontecer que os parâmetros de uma superfície parametrizada correspondam com as coordenadas cartesianas, caso por exemplo a superfície admitir uma expressão explícita. Com efeito:

PARTE B: Superfícies parametrizadas regulares -5-

□ **EXEMPLO 6:**

Seja o parabolóide elítico $x = 5y^2 + 2z^2 - 10$. Logo se escolhermos $u = y$ e $v = z$ vem $(x, y, z) = (5u^2 + 2v^2 - 10, u, v)$.

É o caso mais simples pois que temos a partida $x = f(y, z)$, i.e., a superfície é o gráfico de uma função de duas variáveis.

□ **EXEMPLO 7:**

Determinar as equações paramétricas do plano

$ax + by + cz = d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Para o feito, conforme o exemplo 6, é suficiente obter expressões da forma $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$ ou $x = h(y, z)$. As três formas são possíveis. Por exemplo uma equação paramétrica seria escolher uma parametrização cartesiana, $(u, v) = (x, y)$, e $z = f(u, v) = \frac{d}{c} - \frac{a}{c}u - \frac{b}{c}v$, sempre que $c \neq 0$.

PARTE B: Superfícies parametrizadas regulares -6-

□ Determinemos agora a partir de um exemplo, as equações do plano tangente a uma superfície parametrizada.

Plano tangente a uma superfície

Seja $S \equiv p(u, v)$ uma superfície regular com $(u, v) \in D$. Para determinar o plano tangente em $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$ temos de determinar a normal em P , $\vec{N}(P)$ (não deve ser unitária). A equação do plano tangente em P é

$$0 = \vec{N}(P) \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle.$$

Portanto calculemos $\partial_u p$, $\partial_v p$ e efetuemos

$$\vec{N}(P) = \partial_u p \times \partial_v p.$$

PARTE B: Superfícies parametrizadas regulares -7-

□ **EXEMPLO 8** : Seja a aplicação $p(u, v) = (u, 2v^2, u^2 + v)$.
Determinar a equação do plano tangente a superfície $S \equiv p(D)$ no ponto $P = (x_0, y_0, z_0) = (2, 2, 3) \in S$.

Para o efeito, calculemos em primeiro os dois vetores tangentes não normalizados $p_{,u}(u, v) = \langle 1, 0, 2u \rangle$ e $p_{,v}(u, v) = \langle 0, 4v, 1 \rangle$, logo o vetor normal é dado por

$$\vec{n} := p_{,u} \times p_{,v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 4v & 1 \end{vmatrix} = -8uv\vec{e}_x - \vec{e}_y + 4v\vec{e}_z. \text{ Em}$$

segundo temos de determinar os valores do parâmetro associado ao ponto em questão: para isto escrevemos $(u, 2v^2, u^2 + v) = (2, 2, 3)$ e vem $2 = u$, $2 = 2v^2$ e $3 = u^2 + v$, i.e., $(u, v) = (2, -1)$. Em terceiro, substituímos na expressão da normal ao plano (não unitário), logo vem $\vec{n}(2, 2, 3) := p_{,u} \times p_{,v}(2, -1) = \langle 16, -1, -4 \rangle$. Finalmente o plano tangente tem como equação

PARTE B: Superfícies parametrizadas regulares -8-

$$0 = \vec{n} \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = \vec{n} \cdot \langle x - 2, y - 2, z - 3 \rangle,$$

ou seja

$$16.(x - 2) - 1.(y - 2) - 4.(z - 3) = 16x - y - 4z - 18 = 0.$$

(os exemplos 5, 6 e 8 vêm do Paul's online notes.)

Área de uma superfície

Seja a superfície S com equação paramétrica

$$S \equiv p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

A área de S é dada pelo integral

$$\mathcal{A}(S) := \int_D \|p_{,u} \times p_{,v}\| dudv.$$

□ Veremos na parte C como calcular este integral de duas variáveis.

PARTE B: Superfícies parametrizadas

TP15 -1-

□ **EXERCÍCIO 28:** Determinar 3 formas de escrever a equação paramétrica do plano $7x + 3y + 4z = 15$.

□ **EXERCÍCIO 29:** Verificar que $(x, y, z) = (\sqrt{12} \cos \theta, \sqrt{12} \sin \theta, z)$, $(\theta, z) \in [0, 2\pi[\times [0, 10]$ é a equação paramétrica de um cilindro; dizer qual é seu raio e sua altura. (ii) Escrever a equação sob forma implícita.

□ **EXERCÍCIO 30:** Verificar que $(x, y, z) = (4 \sin \varphi \cos \theta, 4 \sin \varphi \sin \theta, 4 \cos \varphi)$, $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi[\times [0, \pi]$ é a equação paramétrica de uma esfera; dizer qual é seu raio. (ii) Escrever a equação sob forma implícita. (iii) Determinar o elemento de área dS e calcular a área da esfera.

□ **EXERCÍCIO 31:** Determinar o plano tangente a superfície $p(u, v) = (u^2 + 2u, 3v - 2u, 6v - 10)$ no ponto $(x_0, y_0, z_0) = (8, 14, 2)$. Dizer se o plano é horizontal neste ponto.

PARTE B: Superfícies parametrizadas

TP15 -2-

□ **EXERCÍCIO 32:** (i) Para qual valor de z o cilindro C do exercício 29 e a esfera E do exercício 30 intersecam. (ii) Seja S a superfície definida como a porção de E situada dentro de C . Determinar o domínio de definição de S . (iii) A partir do dS do exercício 30(iii), calcular a área de S .

Resposta: (i) $z = 2$; (ii) $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi/3, 2 \leq z \leq 4$; (iii)

$$|S| = \int_0^{\pi/3} \int_0^{2\pi} 16 \sin \varphi d\theta d\varphi = 16\pi.$$

└ PARTE C/Gradiente, divergência e rotor/

PARTE C

PARTE C: Gradiente, divergência e rotor. Integral de linha; integral duplo, de superfície; integral triplo. Coordenadas e bases polares; integrais em coordenadas polares.

└ PARTE C/Gradiente, divergência e rotor/

AULA 15 (24 & 28/4/2023)

Gradiente, divergência e rotacional.

PARTE C: Gradiente, divergência e rotacional -1-

Já vimos o gradiente de uma função diferenciável a 2d. A extensão a 3d é imediata:

■ **DEFINIÇÃO 1:** (Gradiente a 3d): Seja

$f : (x, y, z) \in D \mapsto f(x, y, z)$ uma função de classe \mathcal{C}^1 . Seja $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ uma base ortogonal com \vec{e}_x, \vec{e}_y e \vec{e}_z os vetores de base unitários ao longo dos eixos de coordenadas x, y e z .

O gradiente de f é o vetor $\vec{\nabla} f := \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$.

■ **DEFINIÇÃO 2:** (Função vetorial): Uma função vetorial

$$\vec{F} : (x, y, z) \in D \mapsto \langle F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z) \rangle$$

de classe \mathcal{C}^1 escreve-se na base cartesiana como

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z.$$

Sendo que cada componente F_x, F_y e F_z são funções escalares.

PARTE C: Gradiente, divergência e rotacional -2-

diferenciáveis, admitem derivadas parciais, i.e. $\frac{\partial F_x}{\partial x}$, $\frac{\partial F_x}{\partial y}$, $\frac{\partial F_x}{\partial z}$ para a 1.ª componente, $\frac{\partial F_y}{\partial x}$, $\frac{\partial F_y}{\partial y}$, $\frac{\partial F_y}{\partial z}$ para a 2.ª, e enfim $\frac{\partial F_z}{\partial x}$, $\frac{\partial F_z}{\partial y}$, $\frac{\partial F_z}{\partial z}$ para a 3.ª. \vec{F} é chamado campo vetorial definido em D . A Jacobiana é a matriz 3×3 seguinte

$$J\vec{F}(x, y, z) := \begin{pmatrix} \partial_x F_x & \partial_y F_x & \partial_z F_x \\ \partial_x F_y & \partial_y F_y & \partial_z F_y \\ \partial_x F_z & \partial_y F_z & \partial_z F_z \end{pmatrix} (x, y, z).$$

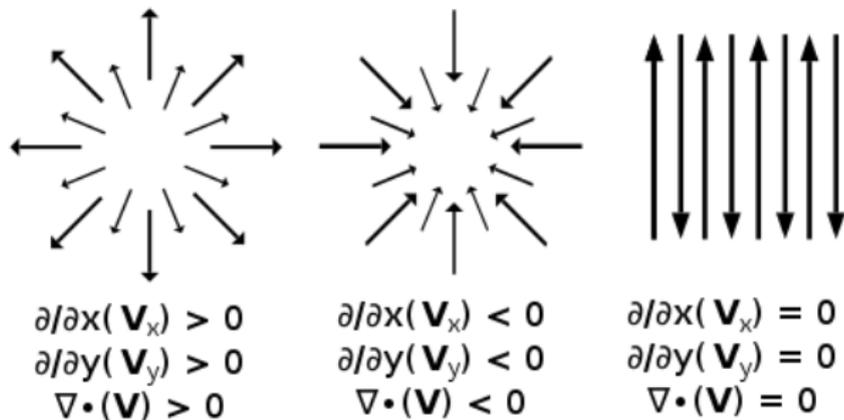
□ **EXEMPLO 1:** a velocidade de um fluido ou uma força são campos vetoriais.

■ **DEFINIÇÃO 3:** (Divergência a 3d): Seja uma função vetorial $\vec{V} : (x, y, z) \in D \mapsto (V_x(x, y, z), V_y(x, y, z), V_z(x, y, z))$ de classe C^1 . A divergência de \vec{V} é o escalar

$$\operatorname{div} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} := \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

PARTE C: Gradiente, divergência e rotacional -3-

□ **Interpretação:** A divergência de um campo vetorial \vec{V} no ponto $P = (x, y, z) \in D$ indica quanto o mesmo se "expande" em P , i.e., dilatação caso seja positivo, contração caso seja negativo, e conservação ou neutro caso for nulo.



(fonte: wikipedia)

PARTE C: Gradiente, divergência e rotacional -4-

□ **EXEMPLO 2:** Seja $\vec{F} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$, logo $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 1 + 1 = 2$ (dilatação/expansão). Seja $\vec{F} = -y\vec{e}_x + z\vec{e}_y + x\vec{e}_z$, logo $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 + 0 + 0 = 0$ (conservação).

■ **DEFINIÇÃO 4:** (rotacional a 3d): Seja uma função vetorial $\vec{F} : (x, y, z) \in D \mapsto \langle F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z) \rangle$ de classe \mathcal{C}^1 . O rotacional de \vec{F} é o vetor

$$\text{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} := \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right\rangle.$$

□ **Interpretação:** A magnitude do rotacional de um campo vetorial \vec{F} , $\|\vec{\nabla} \times \vec{F}\|$ no ponto $P = (x, y, z) \in D$ indica a intensidade de quanto \vec{F} "gira" em torno de P .

PARTE C: Gradiente, divergência e rotacional -6-

• **demonstração:** 1. tome por exemplo a 1a componente de $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f$ uma vez que o raciocínio será igual para as outras duas: vem $\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial \partial_z f}{\partial y} - \frac{\partial \partial_y f}{\partial z} = \partial_y \partial_z f - \partial_z \partial_y f$.

Mas, sendo a função \mathcal{C}^2 , as derivadas segundas comutam, i.e. $\partial_y \partial_z = \partial_z \partial_y$, etc., logo as 3 componentes são nulas.

2. verifiquemos que, sendo a função \mathcal{C}^2 ,

$$\partial_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \partial_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \partial_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = 0. \text{ QED.} \quad \blacksquare$$

□ **Diagrama recapitulativo:**

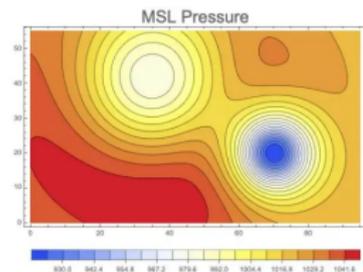
campo escalar $\xrightarrow{\text{grad}}$ campo vetorial $\xrightarrow{\text{rot}}$ campo vetorial $\xrightarrow{\text{div}}$ campo escalar

$$f \xrightarrow{\text{grad}} \vec{F} = \vec{\nabla} f \xrightarrow{\text{rot}} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \mathbf{rot grad} f = \mathbf{0};$$

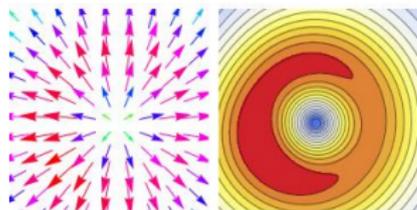
$$\vec{F} \xrightarrow{\text{rot}} \vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{F} \xrightarrow{\text{div}} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} = \mathbf{div rot} \vec{F} = 0.$$

PARTE C: Gradiente, divergência e rotacional -7-

□ EXEMPLOS EM METEOROLOGIA 1: pressão e gradiente de pressão



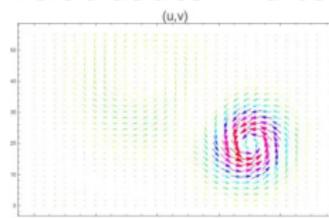
O campo de pressão atmosférica (é um campo escalar).



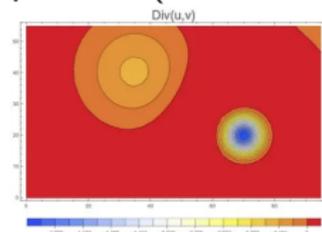
Esquerda: o gradiente de pressão: é uma força (é um campo vetorial). Direita: a magnitude desta força (é um campo escalar).

PARTE C: Gradiente, divergência e rotacional -8-

□ EXEMPLOS EM METEOROLOGIA 2: divergência do campo de velocidades = alteração da densidade de massa do ar:



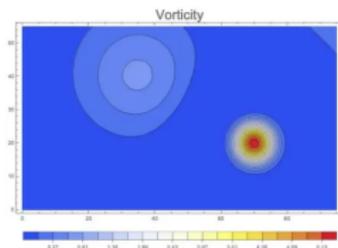
Devido a fricção, o vento é um fluxo de ar ao longo dos isobares (= curvas de nível da pressão) que converge às regiões com baixa pressão (zona de depressão).



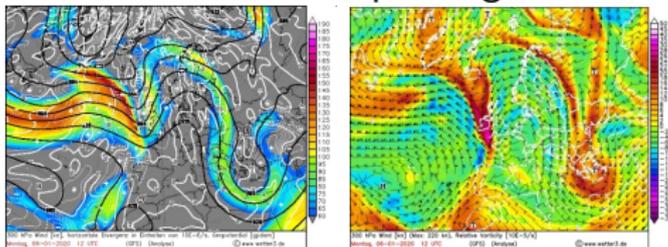
Intensidade do vento: divergência do campo das velocidades (é um campo escalar).

PARTE C: Gradiente, divergência e rotacional -9-

□ EXEMPLOS EM METEOROLOGIA 3: rotacional do campo das velocidades = velocidade de rotação do vento:



Na figura representamos a intensidade do vento dada pela norma do rotacional do campo de gradiente de pressão.



Mapas meteorológicas:(esq.) velocidade do vento (cores) e divergência (branco);(dir.) direção do vento (setas) e rotacional

PARTE C: Gradiente, divergência e rotacional TP16 -1-

□ **EXERCÍCIO 1:** Calcular a divergência dos campos seguintes:

(i) $x\vec{e}_x$; (ii) $\vec{X} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$; (iii) $\frac{\vec{X}}{r}$ com $r := \|\vec{X}\|$; (iv) $r\vec{c}$ com \vec{c} um vetor constante (HINT: utilize o exercício 15 da TP13 onde utilizámos p em vez de \vec{X} ($p = \vec{X}$)).

□ **EXERCÍCIO 2:** Calcular o rotacional dos campos seguintes: (i) $-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$; (ii) $x^2y^2\vec{e}_z$.

□ **EXERCÍCIO 3:** Calcular (i) $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times (2e^{y/z}\vec{e}_x - \sin^3 y\vec{e}_z)$; (ii) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}(3 \sin x \cos y)$.

□ **EXERCÍCIO 4:** Demonstrar que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$ para qualquer campo vetorial \vec{F} de classe \mathcal{C}^2 .

□ **EXERCÍCIO 5:** Demonstrar as identidades seguintes: (i) $\vec{\nabla} \cdot (U\vec{a}) = \vec{\nabla}U \cdot \vec{a} + U\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$ onde U é um campo escalar e \vec{a} um campo vetorial; (ii) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{\nabla} \times \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{\nabla} \times \vec{b} \cdot \vec{a}$.

└ PARTE C/Integral de linha; integral duplo, de superfície; integral triplo/

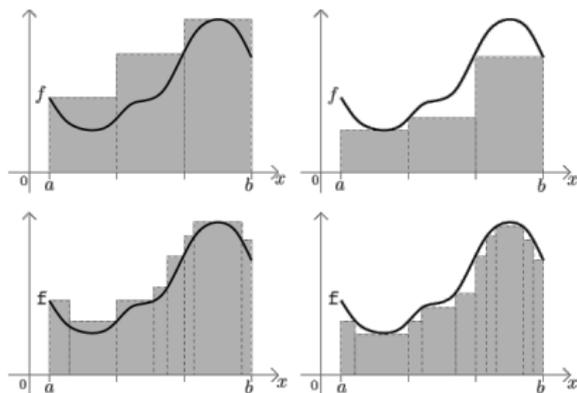
AULA 16 (8/5/2023)

Integral de linha.

PARTE C: Integral de linha

-1-

□ LEMBRETE: integral unidimensional: seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.



□ O integral da função f é um número real que representa a área A a baixo do seu gráfico. Esta área fica entre uma aproximação *superior* de A (fig. a esquerda), $S(f, U)$, relativa a uma partição U do intervalo $[a, b]$ e uma aproximação *inferior* de A (fig. a direita), $I(f, U)$, logo $I(P, f) \leq A \leq S(P, f)$.

PARTE C: Integral de linha

-2-

Além de mais, o integral de f em $[a, b]$ é o único número que realiza o infímo de $S(f, P)$ quando tomar todas as possíveis partições P do intervalo, i.e.

$$A = \int_a^b f(x)dx = \inf_P S(P, f).$$

Vale também que A é o único número que realiza o supremo de $I(f, P)$ quando tomar todas as possíveis partições P do intervalo, i.e.

$$A = \int_a^b f(x)dx = \sup_P I(P, f).$$

Quando a partição P for uma família de N pequenos intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ disjuntos que cobrem $[a, b]$ temos também

$$A = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(x_i)(x_{i+1} - x_i),$$

PARTE C: Integral de linha

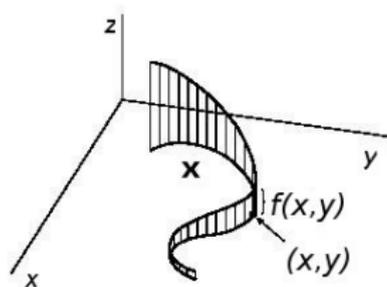
-3-

■ **DEFINIÇÃO 6:** (Caso escalar): Seja uma curva espacial \mathcal{C}^1 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{x} \subset \mathbb{R}^3$ e seja uma função contínua $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. O **integral de linha** de f ao longo de $\mathbf{x} := \gamma[a, b]$ é

$$\int_{\mathbf{x}} f dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt.$$

Aqui dl é um elemento de comprimento ao longo de \mathbf{x} definido como $dl := \|\vec{\gamma}'(t)\| dt$ com t o parâmetro da curva.

□ **Interpretação:** A 2 dimensões, o integral de linha escalar mede a área de baixo da curva com base \mathbf{x} e com altura $f(x, y)$ com $(x, y) = \gamma(t) \in \mathbf{x}$ e $t \in [a, b]$.



PARTE C: Integral de linha

-4-

□ **EXEMPLO 4:** Seja $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3$ o helíce $(x, y, z) = \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ e seja a função $f(x, y, z) = xy + z$. Calculemos

$$\int_x f dl = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt.$$

Temos $\|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$, logo

$$\int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t + t) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin 2t + t\right) dt = 2\sqrt{2}\pi^2.$$

■ **DEFINIÇÃO 7:** (Caso vetorial: integral de caminho): Seja uma curva $\mathcal{C}^1 \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ e seja uma função vetorial contínua $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. O **integral de caminho** de \vec{F} ao longo do caminho $x := \gamma[a, b]$ é

$$\int_x \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt.$$

PARTE C: Integral de linha

-5-

□ **Observação:** numa base Cartesiana temos

$$\int_X \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_a^b F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

onde $\langle dx, dy, dz \rangle := \vec{\gamma}'(t)dt$ é o elemento de comprimento na curva.

□ **Interpretação:** Em mecânica, o integral de caminho mede o trabalho efetuado por uma partícula no campo de força \vec{F} ao longo da trajetória $t \mapsto \gamma(t)$.

□ **EXEMPLO 5:** Seja o caminho

$t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t) = (2t + 1, t, 3t - 1)$ e seja $\vec{F} = -z\vec{e}_x + x\vec{e}_y + y\vec{e}_z$.

Calculemos $\int_X \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_0^1 -zdx + xdy + ydz$. Temos

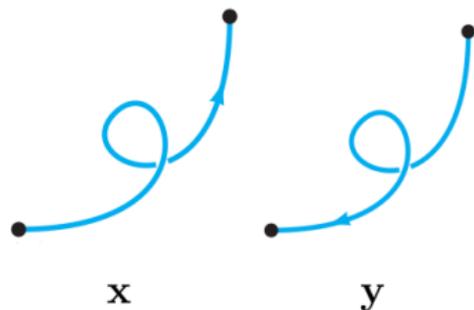
$\gamma'(t) = \langle 2, 1, 3 \rangle$ pelo que, com $d\vec{L} = (2\vec{e}_x + \vec{e}_y + 3\vec{e}_z) dt$, vem

$$\int_X \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_0^1 -(3t - 1) \cdot 2 + (2t + 1) \cdot 1 + t \cdot 3 dt = \int_0^1 (-t + 3) dt = \frac{5}{2}.$$

PARTE C: Integral de linha

-6-

□ **Observação:** Consideremos como na figura dois caminhos com orientações opostas. Então temos: $\int_x f dl = \int_y f dl$. Mas, repare, temos $\int_x \vec{F} \cdot d\vec{L} = - \int_y \vec{F} \cdot d\vec{L}$, sendo que $x(-t) = y(t)$ quando se muda de orientação na curva, uma vez que a velocidade muda de sentido.



□ A diferença entre um integral de linha e de caminho é que um caminho tem orientação. Neste caso integramos uma função vetorial ao longo de um caminho orientado. No caso do integral de linha, trata-se de uma função escalar e portanto o sentido da curva é indiferente.

PARTE C: Integral de linha

-7-

■ **DEFINIÇÃO 8:** Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ e seja $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função vetorial contínua. Dizemos que \vec{F} tem integrais independentes do caminho se uma das 3 condições se verifica:

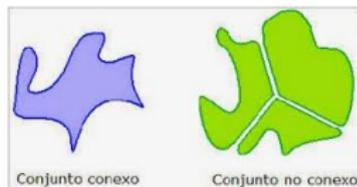
1. $\int_x \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_y \vec{F} \cdot d\vec{L}$ se os caminhos x e y pertencem a D e são de classe \mathcal{C}^1 e têm os mesmos pontos de partida e chegada.
2. $\oint_x \vec{F} \cdot d\vec{L} = 0$, onde $x \subset D$ é uma curva fechada e de classe \mathcal{C}^1 , i.e., cujas extremidades coincidem.
3. $\int_x \vec{F} \cdot d\vec{L} = f(B) - f(A)$, onde $x \subset D$ é uma curva \mathcal{C}^1 com extremidades A (ponto de partida) e B (ponto de chegada) e f , chamado potencial, é uma função escalar definida em D . Em outras palavras o integral de caminho depende apenas dos pontos de partida e chegada, nomeadamente da diferença de potencial entre A e B .

PARTE C: Integral de linha

-8-

■ **DEFINIÇÃO 9:** (Campo conservativo): Seja \vec{F} um campo vetorial contínuo. Digamos que \vec{F} **deriva de um potencial** ou que **é um campo conservativo** se existe um campo escalar f de classe \mathcal{C}^1 tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$. A diferença de potencial é precisamente $f(B) - f(A)$.

■ **DEFINIÇÃO 10:** (Conexidade): Um conjunto de \mathbb{R}^n é dito **conexo** se "é constituído de uma só peça". Em termos matemáticos, se não pode ser formado da união de dois ou mais conjuntos não vazios e disjuntos, tal que cada um dele não interseca o fecho de qualquer um dos outros.



□ **EXEMPLO 6** (Conexidade):

PARTE C: Integral de linha

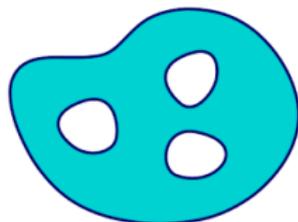
-9-

■ **TEOREMA C. 2.** Seja D um domínio conexo e seja \vec{F} um campo vetorial contínuo, então $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ se e somente se \vec{F} tem integrais independentes do caminho em D .

■ **DEFINIÇÃO 11:** (Simples conexidade): Um conjunto R de \mathbb{R}^n é dito **simplesmente conexo** se "não tem furos nem asas". Em termos matemáticos, se todas as curvas contínuas e fechadas podem ser deformadas de maneira contínua até se reduzir a um único ponto de R (se "podem ser encolhidas a um ponto mediante homeomorfismos").

PARTE C: Integral de linha

-10-



□ **EXEMPLO 7** (simples conexidade):

■ **TEOREMA C. 3.** Seja R um domínio simplesmente conexo e seja F um campo vetorial contínuo, então $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ em R com f um potencial de classe C^1 se e somente se $\text{rot}\vec{F} = 0$ em R .

□ **EXEMPLO 8:** Verifiquemos que a função vetorial

$\vec{F} = \frac{x}{\|\vec{X}\|} \vec{e}_x + \frac{y}{\|\vec{X}\|} \vec{e}_y + \frac{z}{\|\vec{X}\|} \vec{e}_z$, com $\vec{X} = \langle x, y, z \rangle$, é um campo

conservativo. Com efeito $\vec{F} = \vec{\nabla} \|\vec{X}\|$, onde

$\|\vec{X}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e portanto

$\partial_x \|\vec{X}\| = \partial_x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2x$, etc.

PARTE C: Integral de linha

-11-

□ **EXEMPLO 9:** Verifiquemos que

$\vec{F} = \left(\frac{x}{\|\vec{X}\|^2} - 6x \right) \vec{e}_x + \frac{y}{\|\vec{X}\|^2} \vec{e}_y + \frac{z}{\|\vec{X}\|^2} \vec{e}_z$ é um campo

conservativo, com $\vec{X} = \langle x, y, z \rangle$. Com efeito,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \langle \partial_y F_z - \partial_z F_y, \partial_z F_x - \partial_x F_z, \partial_x F_y - \partial_y F_x \rangle = \left\langle \frac{2zy}{\|\vec{X}\|^3} - \frac{2yz}{\|\vec{X}\|^3}, \frac{2xz}{\|\vec{X}\|^3} - \frac{2zx}{\|\vec{X}\|^3}, \frac{2yx}{\|\vec{X}\|^3} - \frac{2xy}{\|\vec{X}\|^3} \right\rangle = 0.$$

□ **EXEMPLO 10:** Verifiquemos que

$\vec{F} = \left(\frac{x}{\|\vec{X}\|^2} - 6y \right) \vec{e}_x + \frac{y}{\|\vec{X}\|^2} \vec{e}_y + \frac{z}{\|\vec{X}\|^2} \vec{e}_z$, com $\vec{X} = \langle x, y, z \rangle$ não é um campo conservativo. Com efeito $\vec{\nabla} \times \vec{F} = (0, 0, -6) \neq 0$.

PARTE C: Integral de linha

TP17 -1-

□ **EXERCÍCIO 6:** Calcular o integral de linha de $f(x, y) = y - x$ ao longo das curvas (i) $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t)$ (RESP. 0); (ii) $\gamma(t) = (t, t^2)$, com $t \in [0, 2\pi]$.
Mesma pergunta com a função $f(x, y) = y/x$.
(RESP. (i) 0; (ii) $1/12(1 + 16\pi^2)^{3/2}$)

□ **EXERCÍCIO 7:** Calcular o integral de caminho do campo vetorial $\vec{F}(x, y) = \langle xy, y^2 \rangle$ ao longo da curva $\gamma(t) = t\vec{e}_x + t^2\vec{e}_y$ com $t \in [0, 1]$.
(RESP. $7/12$).

□ **EXERCÍCIO 8:** Determinar o trabalho da força $\vec{F}(x, y, z) = \langle xy, 2, 4z \rangle$ atuada ao longo do hélice circular $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ entre $t = 0$ e $t = 2\pi$.
(RESP. $8\pi^2$).

PARTE C: Integral de linha

TP17 -2-

- **EXERCÍCIO 9:** Determinar o trabalho da força $\vec{F}(x, y) = \langle x^3, y \rangle$ atuada ao longo da parábola $y = 3x^2$ da origem ao ponto $(1, 3)$. (RESP. $19/4$).
- **EXERCÍCIO 10:** Integrar $\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{e}_x + x^2\vec{e}_y + xyz\vec{e}_z$ ao longo de (i) o segmento que vai de $[0, 0, 0]$ a $[2, -1, 1]$; (ii) $\gamma(t) = e^t\vec{e}_x + e^{-t}\vec{e}_y + t\vec{e}_z$.

└ PARTE C/Integral de linha; integral duplo, de superfície; integral triplo/

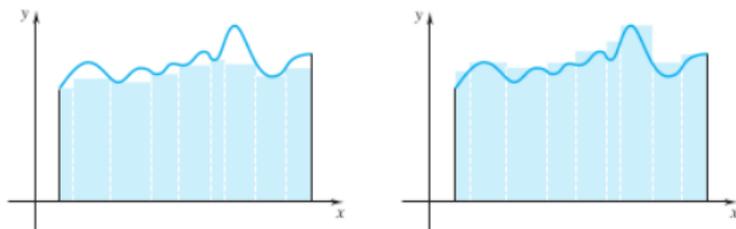
AULA 17 (8 & 12/5/2023)

Integral duplo: integral duplo "fatiado"; integral de superfície
(referência: *Sala, Hille, Etgen: Calculus - one and several variables*)

PARTE C: Integral duplo no plano

-1-

□ Relembramos a definição de integral de uma função escalar f contínua num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$: conforme a figura



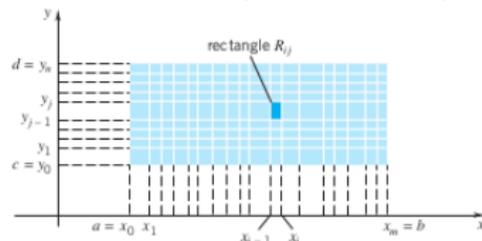
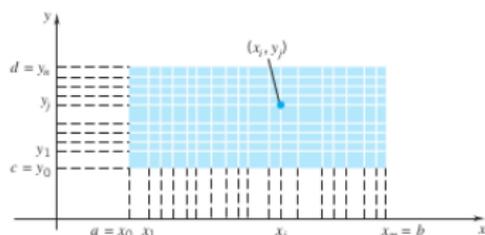
(i) escolhemos uma partição \mathcal{P} do intervalo em pequenos segmentos $\Delta x_i, 1 \leq i \leq n$; (ii) em cada segmento tomemos o mínimo m_i e o máximo M_i da função f sobre Δx_i ; (iii) efetuemos as somas $\underline{I}_f(\mathcal{P}) := \sum_i m_i \Delta x_i$ e $\bar{I}_f(\mathcal{P}) := \sum_i M_i \Delta x_i$; logicamente a área por baixo do gráfico $(x, f(x))$ e comprida entre os valores $\underline{I}_f(\mathcal{P})$ e $\bar{I}_f(\mathcal{P})$. O integral de f em $[a, b]$ é definido quando a gente considera todas as possíveis partições do domínio, em particular quando o comprimento de Δx_i tende a zero.

PARTE C: Integral duplo no plano -2-

■ **TEOREMA C. 4** (Integral simples). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe um único número real $I_f([a, b])$ tal que para uma qualquer partição \mathcal{P} de $[a, b]$, vem $\underline{I}_f \leq I \leq \overline{I}_f$. Este valor é chamado integral definido de f em $[a, b]$:

$$I_f = \int_a^b f(x)dx.$$

□ Ora, a dois dimensões o integral **duplo** é definido de maneira similar, considerando primeiro partições dos eixos dos x e dos y em pequenos intervalos Δx_i e Δy_j de modo tal a formar uma partição \mathcal{P} do retângulo R em pequenos retângulos $R_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$.



PARTE C: Integral duplo no plano

-3-

□ Seja uma função contínua $f : R \rightarrow \mathbb{R}$, onde R é um retângulo do plano. Definimos então o integral superior $\bar{I}_f(\mathcal{P})$ e inferior $\underline{I}_f(\mathcal{P})$ de f em R relativo a partição \mathcal{P} :

$$\bar{I}_f(\mathcal{P}) = \sum_{i,j} \left(\max_{R_{ij}} f \right) \Delta x_i \Delta y_j \text{ e } \underline{I}_f(\mathcal{P}) = \sum_{i,j} \left(\min_{R_{ij}} f \right) \Delta x_i \Delta y_j$$

■ **TEOREMA C. 5 (Integral duplo).** Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe um único número real $I_f(R)$ tal que, qualquer seja a partição \mathcal{P} de R , vem $\underline{I}_f(\mathcal{P}) \leq I_f(R) \leq \bar{I}_f(\mathcal{P})$. Este valor é chamado integral definido de f em R :

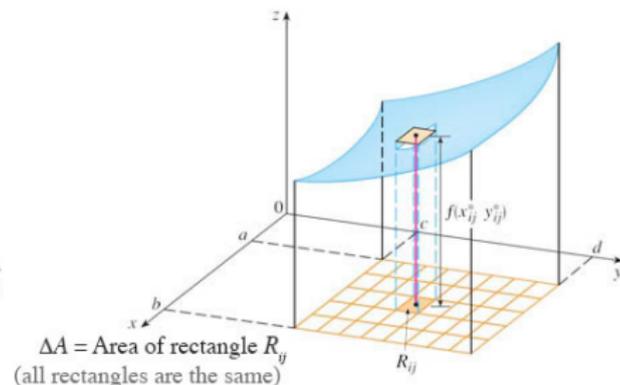
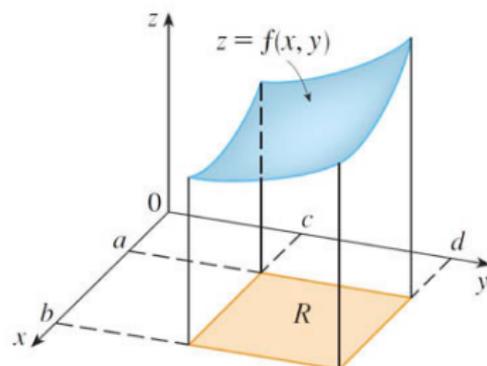
$$I_f(R) = \int_R f dS = \int_R f(x, y) dx dy,$$

onde definimos o elemento de área $dS := dx dy$.

PARTE C: Integral duplo no plano

-4-

□ **Interpretação:** O integral duplo da função $(x, y) \in R \mapsto f(x, y)$ em R representa o volume $V_f(R)$ entre R e o gráfico $z = f(x, y)$:



É evidente que o volume $V_f(R)$ será necessariamente compreido entre $\underline{I}_f(R)$ e $\bar{I}_f(R)$. Tomando uma partição \mathcal{P} de R cada vez mais fina, obtemos finalmente (pelo teorema 5, o único valor entre as estimativas inferior e superior, é mesmo o volume $V_f(R)$)

$$\underline{I}_f(\mathcal{P}) \leq V_f(R) = I_f(R) \leq \bar{I}_f(\mathcal{P}).$$

PARTE C: Integral duplo no plano

-5-

Para além também vale

$$\sup_{\mathcal{P}} \underline{I}_f(\mathcal{P}) = I_f(R) = \inf_{\mathcal{P}} \bar{I}_f(\mathcal{P}).$$

□ **EXEMPLO 11** (Integral de uma constante): Seja

$f(x, y) = \alpha \in \mathbb{R}$ uma constante. Calculemos o integral de f em $R = [a, b] \times [a, b]$. É evidente que $\max_R f = \min_R f = \alpha$. Logo,

$$\bar{I}_f(\mathcal{P}) = \sum_{i,j} \max_{R_{ij}} f \Delta x_i \Delta y_j = \alpha \cdot \sum_{i,j} \Delta x_i \Delta y_j = \alpha \cdot \text{área}(R) \text{ e}$$

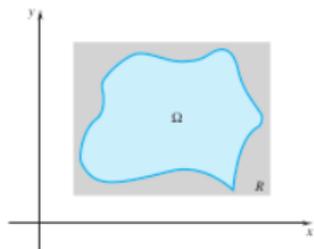
$$\underline{I}_f(\mathcal{P}) = \sum_{i,j} \min_{R_{ij}} f \Delta x_i \Delta y_j = \alpha \cdot \text{área}, \text{ e vem } I_f(R) = \alpha(b-a)^2.$$

PARTE C: Integral duplo no plano

-6-

□ Ora, o integral num domínio plano limitado e conexo Ω que não seja um retângulo e definido a partir do anterior:

Tome uma função contínua em $\bar{\Omega}$ (até a fronteira de Ω , inclusive). Para o efeito, é suficiente (i) pôr $f = 0$ em $R \setminus \Omega$; (ii) integrar o novo f em R . Logo $\int_{\Omega} f dS := \int_R f dS$.

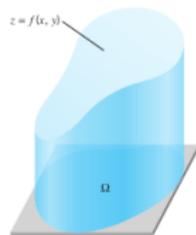


□ **Observação:** Com este procedimento, a função deixa de ser continua no interface entre Ω e R , mas no entanto o integral é definido como anteriormente, uma vez que f atinge seus máximos e mínimos em R .

PARTE C: Integral duplo no plano

-7-

- A interpretação é igual: o volume entre o domínio Ω e o gráfico $\mathcal{G}_f := \{(x, y, f(x, y))\}$ de f é dada pelo integral de f em Ω :



$$\int_{\Omega} f(x, y) dS = \text{volume}.$$

- Propriedades do integral:

I. Linearidade: $\int_{\Omega} (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \int_{\Omega} f dS + \beta \int_{\Omega} g dS, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$

II. Ordem: $f \leq g$ em $\Omega \implies \int_{\Omega} f dS \leq \int_{\Omega} g dS;$

III. Aditividade: $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2 \implies \int_{\Omega} f dS = \int_{\Omega_1} f dS + \int_{\Omega_2} f dS;$

IV. Condição de valor médio: existe um ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$ tal que

$$\int_{\Omega} f dS = f(x_0, y_0) \cdot \text{área}(\Omega).$$

PARTE C: Integral duplo no plano

-8-

• **Nota:** $A \sqcup B$ significa a união disjunta de A e B .

□ Na verdade vale um resultados mais geral do que o IV, a partir das propriedades I-III que são evidentes pela definição do integral.

■ **TEOREMA C. 6 (Valor intermédio).** Seja $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas e $g \geq 0$. Logo f, g e o produto fg são integraveis em Ω , e vale, para algum $(x_0, y_0) \in \Omega$,

$$\int_{\Omega} f(x, y)g(x, y)dx dy = f(x_0, y_0) \int_{\Omega} g dS,$$

PARTE C: Integral duplo no plano

-9-

• **demonstração:** sejam m e M os mínimos e máximos de f em Ω , logo $mg \leq fg \leq Mg$ e pela II, $\int_{\Omega} mgdS \leq \int_{\Omega} fgdS \leq \int_{\Omega} Mg dS$; logo pela I, $m \int_{\Omega} gdS \leq \int_{\Omega} fgdS \leq M \int_{\Omega} gdS$.

Caso 1: $\int_{\Omega} gdS = 0$, logo $\int_{\Omega} fgdS = 0$ e qualquer (x_0, y_0) convém.

Caso 2: $\int_{\Omega} gdS \neq 0$, logo $m = \min f \leq \frac{\int_{\Omega} fg dS}{\int_{\Omega} g dS} \leq M = \max f$.

Sendo f contínua assume todos os valores entre m e M , e em particular existe (x_0, y_0) tal que $f(x_0, y_0) = \int_{\Omega} fg dS / \int_{\Omega} g dS$.
QED. ■

□ A uma dimensão temos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i) |\Delta x_i|,$$

onde x_i é um ponto escolhido no segmento Δx_i e onde o intervalo $[a, b]$ é uma união disjunta de tais segmentos Δx_i ,

PARTE C: Integral duplo e somas de Riemann -10-

□ A duas dimensões, o procedimento é semelhante. Seja Ω o domínio. Particionamos Ω em pequenos blocos bi-dimensionais disjuntos, $\Omega = \sqcup_{i=1}^n \Omega_i$, com $1 \leq i \leq n$ e efetuemos a soma

$$\lim_{\substack{\max \text{diam}(\Omega_i) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \text{área}(\Omega_i),$$

onde $(x_i, y_i) \in \Omega_i$.

□ Vale o resultado seguinte:

$$\int_{\Omega} f dS = \lim_{\substack{\max \text{diam}(\Omega_i) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \text{área}(\Omega_i).$$

• Com efeito, chamemos esta partição particular $\mathcal{P}_n := \{\Omega_i : 1 \leq i \leq n\}$. Uma vez que $(x_i, y_i) \in \Omega_i$, temos

$$\min_{\Omega_i} f \leq f(x_i, y_i) \leq \max_{\Omega_i} f, \text{ logo,}$$

PARTE C: Integral duplo e somas de Riemann -10-

$$\left(\min_{\Omega_i} f \right) \text{área}(\Omega_i) \leq f(x_i, y_i) \text{área}(\Omega_i) \leq \left(\max_{\Omega_i} f \right) \text{área}(\Omega_i), \text{ e}$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\min_{\Omega_i} f \right) \text{área}(\Omega_i)}_{= \underline{I}_f(\mathcal{P}_n)} \leq \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \text{área}(\Omega_i) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\max_{\Omega_i} f \right) \text{área}(\Omega_i)}_{= \bar{I}_f(\mathcal{P}_n)}$$

Tomando o limite vem

$$\lim_{\substack{\max \text{diam}(\Omega_i) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \underline{I}_f(\mathcal{P}_n) \leq \lim_{\max \text{diam}(\Omega_i) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \text{área}(\Omega_i) \leq \lim_{\max \text{diam}(\Omega_i) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty} \bar{I}_f(\mathcal{P}_n).$$

PARTE C: Integral duplo e somas de Riemann -11-

Mas, o primeiro limite é o supremo $\sup_{\mathcal{P}} \underline{I}_f$ (uma vez que $\underline{I}_f(\mathcal{P}_n)$ é crescente com n), e o último limite o infímo $\inf_{\mathcal{P}} \bar{I}_f$. Portanto

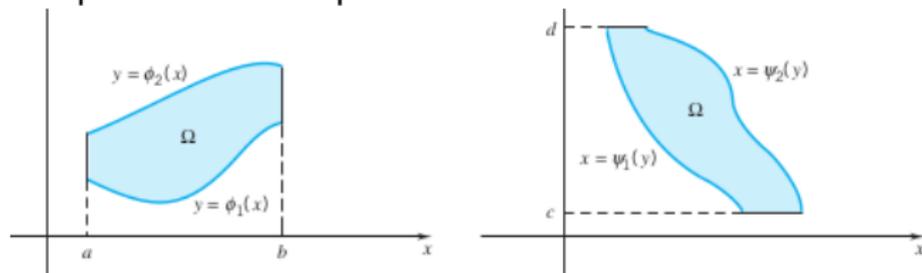
$$\sup_{\mathcal{P}} \underline{I}_f \leq \lim_{\substack{\max \text{diam}(\Omega_i) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \text{área}(\Omega_i) \leq \inf_{\mathcal{P}} \bar{I}_f.$$

Ora, vimos que $\sup_{\mathcal{P}} \underline{I}_f = \inf_{\mathcal{P}} \bar{I}_f = \int_{\Omega} f dS$. Segue o resultado pretendido:

$$\int_{\Omega} f dS = \lim_{\substack{\max \text{diam}(\Omega_i) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \text{área}(\Omega_i).$$

PARTE C: Integral duplo "fatiado" -1-

□ Gostariíamos de calcular um integral duplo no plano, i.e., o volume entre o domínio e o gráfico de uma função f , a partir das áreas das "fatias" feitas no volume. Para o efeito, consideremos em primeiro dois tipos de domínios:



Tipo I: a projeção do domínio Ω no eixo dos x é um intervalo fechado $[a, b]$; por outro lado, as fronteiras superior e inferior de Ω são funções contínuas de x .

Tipo II: a projeção do domínio Ω no eixo dos y é um intervalo fechado $[c, d]$; por outro lado, as fronteiras esquerda e direita de Ω são funções contínuas de y .

PARTE C: Integral duplo "fatiado"

-2-

□ Em ambos casos o integral duplo efetua-se calculando dois integrais simples, um a seguir o outro.

Tipo I: "Congelamos" primeiro o x e efetuamos primeiro um integral simples em y :

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Tipo II: "Congelamos" primeiro o y e efetuamos primeiro um integral simples em x :

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

□ Apliquemos agora este método no cálculo do volume. Seja $T \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto dos pontos situados entre Ω e o gráfico de f . Sabemos que

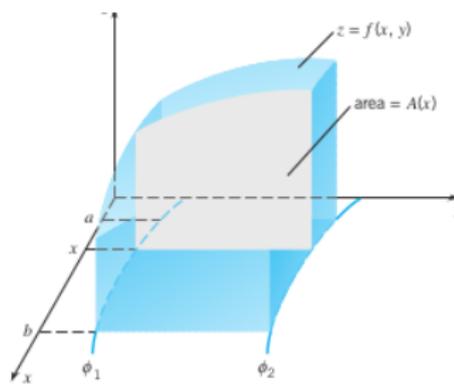
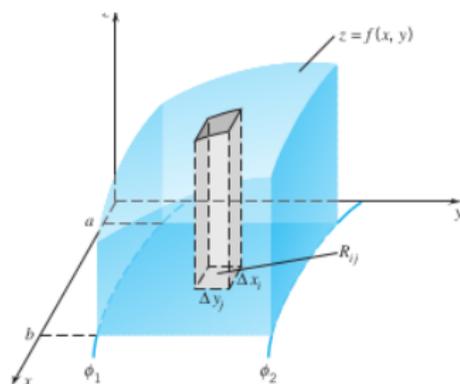
$$\text{volume}(T) = \int_{\Omega} f(x, y) dx dy.$$

PARTE C: Integral duplo "fatiado"

-3-

□ Consideremos um domínio de tipo I. Notemos, para x fixado, a área da "fatia" em x :

$$A(x) := \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy.$$



□ Pelo anterior, o volume é obtido integrando $A(x)$ ao longo de x :

$$\text{volume}(T) = \int_a^b A(x) dx.$$

PARTE C: Integral duplo "fatiado"

-4-

□ O resultado que diz que o volume pode ser calculado ou tomando o limite de uma soma de volumes de pequenos paralelepípedos (as chamadas somas de Riemann), ou calculando a área de uma fatia e integrando a mesma na direção trasversa, não é nada fácil demonstrar. É chamado o **teorema de Fubini**. O importante aqui é ser capazes de calcular um integral duplo aplicando este resultado.

□ **EXEMPLO 12:** Gostaríamos de calcular o volume entre o gráfico da função $f(x, y) = \sin(xy)$ e o seu domínio $R = [-2, 1] \times [1, 2]$. Temos então de avaliar

$$\int_R \sin(xy) dS = \int_{[-2,1] \times [1,2]} \sin(xy) dx dy.$$

Em particular, $-2 \leq x \leq 1$ e $1 \leq y \leq 2$.

PARTE C: Integral duplo "fatiado" -5-

Por Fubini, calculemos em primeiro ("congelamos" y)

$$\int_{-2}^1 \sin(xy) dx = -\frac{1}{y} \cos(xy) \Big|_{x=-2}^{x=1} = -\frac{1}{y} \cos(y) + \frac{1}{y} \cos(-2y).$$

Uma vez que integrámos em x , obtivemos então uma função de uma variável só, y : $g(y) := -\frac{1}{y} \cos(y) + \frac{1}{y} \cos(-2y)$. Esta última representa a área de uma fatia do volume quando y está congelado num valor do seu domínio ($1 \leq y \leq 2$). Agora integramos esta área na direção trasversa y , vem:

$$Y := \int_1^2 g(y) dy = \int_1^2 \left(-\frac{1}{y} \cos(y) + \frac{1}{y} \cos(2y) \right) dy.$$

Este último integral não dá para ser calculado explicitamente com uma primitivação de g , mas dá um valor que é o volume pretendido (o calculo faz-se por aproximação numérica).

PARTE C: Integral duplo "fatiado" -6-

É notável que se invertemos o sentido de integração obtemos o mesmo resultado, ou seja, congelamos em primeiro x

$$\int_1^2 \sin(xy) dy = -\frac{1}{x} \cos(xy) \Big|_{y=1}^{y=2} = -\frac{1}{x} \cos(2x) + \frac{1}{x} \cos(x),$$

obtemos então uma função de uma variável só, x desta vez:

$h(x) := -\frac{1}{x} \cos(2x) + \frac{1}{x} \cos(x)$. Esta última representa a área de uma fatia do volume quando x está congelado num valor do seu domínio ($-2 \leq x \leq 1$). Ora integramos esta área na direção trasversa x , vem:

$$X := \int_{-2}^1 h(x) dx = \int_{-2}^1 \left(-\frac{1}{x} \cos(2x) + \frac{1}{x} \cos(x) \right) dx.$$

Por Fubini vale sempre $X = Y =$ o volume pretendido.

└ PARTE C/Integral de linha; integral duplo, de superfície; integral triplo/

AULA 18 (15/5/2023)

Integral de superfície. Teoremas de Green e de Stokes.

(referência: Sala, Hille, Etgen: Calculus - one and several variables)

PARTE C: Integral duplo de superfície -1-

□ Seja $S = \mathbf{x}(D)$ uma superfície parametrizada regular, onde $\mathbf{x} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a parametrização escolhida no domínio D conexo e limitado. Em particular \mathbf{x} é uma função vetorial contínua. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar contínua. O integral (escalar) de superfície de f em S é definido como:

$$\int_S f dS := \int_D f(\mathbf{x}(u, v)) \|\vec{n}\| du dv,$$

onde $\vec{n} := \mathbf{x}_{,u} \times \mathbf{x}_{,v}$ é o vetor normal á superfície em cada ponto.

□ **Interpretação:** $\int_S f dS$ dá uma aproximação do volume do sólido situado entre S e o gráfico da função f definida em S . Por exemplo, se S for a esfera com centro o centro da terra e raio o nível do mar, e f for a função que dá a altura topográfica na superfície da terra, então $\int_S f dS$ representa o volume do desnível ("das montanhas").

PARTE C: Integral duplo de superfície -2-

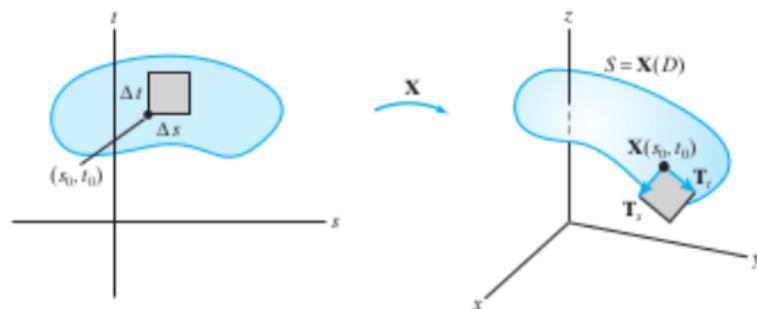
□ **Observação:** $\int_S f dS$ não dá o volume exato. Com efeito, calculemos o volume de uma casca esférica de espessura ϵ : sabemos que será o volume da esfera de raio $R + \epsilon$ menos o volume da esfera de raio R , logo será $\frac{4}{3}\pi(R + \epsilon)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(\epsilon^3 + 3R\epsilon^2 + 3R^2\epsilon)$. De outro lado, calculemos $\int_S f dS$ com $f = \epsilon$, vem $\epsilon \int_S dS = \epsilon \text{Área}(S) = 4\pi R^2\epsilon$. A discrepância entre as duas expressões são termos de ordem ϵ^2 e ϵ^3 , logo desprezáveis se R for muito superior a ϵ ($R \gg \epsilon$). É o caso do raio da terra no exemplo acima.

- Outro exemplo: Seja $f = p$ a pressão de um fluido sobre uma membrana S . Então $\int_S p dS$ representa a força total atuada em S .
- Último exemplo: Se $f = \rho$ representa a massa volúmica (ou densidade superficial) de uma membrana, então $\int_S \rho dS$ dá a massa da membrana.

└ PARTE C/Integral de linha; integral duplo, de superfície; integral triplo/

PARTE C: Integral duplo de superfície

-3-

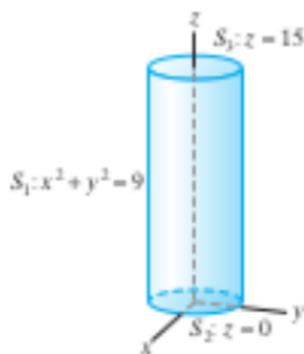


(na figura os vetores tangentes são $T_{,s}$ e $T_{,t}$, sendo $(s, t) \in D$ os parâmetros da representação de S . Logo a normal é $\vec{n} = T_{,s} \times T_{,t}$. Observemos que o elemento de área $dS = \|\vec{n}\| ds dt$ não é igual ao elemento de área $ds dt$ do domínio D , devido a curvatura de S)

□ **Observação:** quando $f = 1$, obtemos a área da superfície parametrizada S : $\int_S dS = \int_D \|\vec{n}\| du dv$. O "elemento de área infinitesimal" é dado por $dS := \|\vec{n}\| du dv$.

PARTE C: Integral duplo de superfície -4-

□ **EXEMPLO 13** : Considere o cilindro na figura com bases S_2 em $z = 0$ e S_3 em $z = 15$ e com raio $r = 3$. A superfície S_2 tem equação paramétrica $\mathbf{x} = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$ enquanto $S_3 \equiv \mathbf{x} = (r \cos \theta, r \sin \theta, 15)$. Pela aditividade, vem $\int_S f dS = \int_{S_1} f dS + \int_{S_2} f dS + \int_{S_3} f dS$, onde $\int_{S_2} f dS = \int_0^{2\pi} \int_0^3 f(r, \theta, 0) r dr d\theta$ e $\int_{S_3} f dS = \int_0^{2\pi} \int_0^3 f(r, \theta, 15) r dr d\theta$, pois $dS = \|\vec{n}\| dr d\theta$ com $\vec{n} = \mathbf{x}_{,r} \times \mathbf{x}_{,\theta}$ e $\|\vec{n}\| = r$.



A parametrização da superfície lateral S_1 é $\mathbf{x} = (3 \cos \theta, 3 \sin \theta, z)$ com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $z \in [0, 15]$. Logo as duas tangentes são $\mathbf{x}_{,\theta} = (-3 \sin \theta, 3 \cos \theta, 0)$ e $\mathbf{x}_{,z} = (0, 0, 1)$. Assim $\vec{n} = \mathbf{x}_{,\theta} \times \mathbf{x}_{,z} = (3 \cos \theta, 3 \sin \theta, 0)$ e $\|\vec{n}\| = 3$. Desta forma, $\int_{S_1} f(r, \theta, z) dS = \int_0^{15} \int_0^{2\pi} f(3, \theta, z) 3 d\theta dz$ (vê teo. de Fubini).

PARTE C: Integral duplo de superfície - caso vetorial -5-

■ **DEFINIÇÃO 12:** (Integral vetorial de superfície): Seja $S = \mathbf{x}(D)$ uma superfície parametrizada regular, onde $\mathbf{x} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e a parametrização escolhida no domínio D conexo e limitado. Seja $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $S \subset A$ uma função vetorial contínua. Seja $\vec{n} = \mathbf{x}_{,u} \times \mathbf{x}_{,v}$ o campo das normais (não necessariamente unitárias). O integral vetorial de superfície em S é definido como:

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} := \int_D \vec{F}(\mathbf{x}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv.$$

□ **Interpretação:** Suponhamos que \vec{F} seja a velocidade de um fluido. O integral vetorial de superfície mede então o volume de fluido que passou através de S por unidade de tempo. Falamos então do fluxo de \vec{F} por S . Temos $d\vec{S} = \vec{n} du dv = \vec{N} dS$ com $\vec{N} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$.

PARTE C: Teorema de Green

□ **Observação 1:** Ao contrário do integral escalar de superfície, o fluxo tem um sinal uma vez que \vec{N} tem um sinal dependente da parametrização escolhida.

■ **TEOREMA C. 7 (No plano: teorema de Green).** Seja D uma região limitada de \mathbb{R}^2 com fronteira suave. Chamemos $C = \partial D$ a sua fronteira orientada (i.e. tem orientação). Seja $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ um campo vetorial bi-dimensional em D de classe C^1 . Então:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = \oint_C Mdx + Ndy = \int_D (\partial_x N - \partial_y M) dx dy.$$

□ **Observação 2:** O símbolo \oint_C indica que se trata de um integral de linha onde a curva C é fechada (as suas extremidades coincidem). O integral $\oint \vec{F} \cdot d\vec{L}$ é chamado "circulação" (ou "circuitação") de \vec{F} ao longo de C .

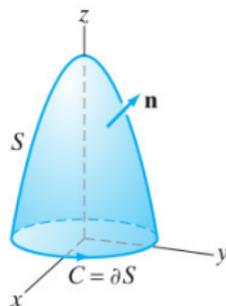
□ **Observação 3:** Temos que $(\partial_x N - \partial_y M) \vec{e}_z = \vec{\nabla} \times \vec{F}$.

PARTE C: Teorema de Stokes

■ **TEOREMA C. 8** (No espaço: teorema de Stokes). Seja S uma superfície regular, suave, limitada e orientável de \mathbb{R}^3 . Suponhamos que S seja tal que sua fronteira ∂S não é vazia, e seja uma curva regular, suave e orientada. Seja $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ um campo vetorial tri-dimensional de classe C^1 , cujo domínio contém S . Então temos:

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

□ **Interpretação:** O teorema diz que a circulação do campo a longo da fronteira da superfície (integral de caminho a esquerda) é igual ao fluxo do rotacional deste mesmo campo pela superfície (integral de superfície a direita).

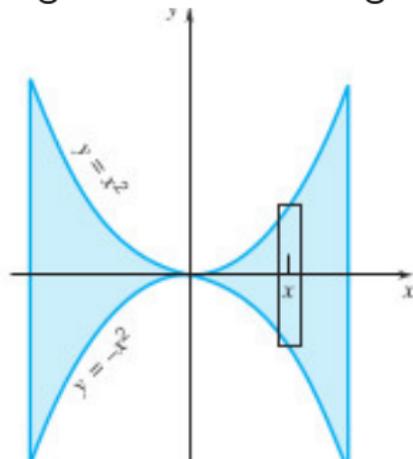


└ PARTE C/Integral de linha; integral duplo, de superfície; integral triplo/

PARTE C: Integral duplo

TP18 -1-

- **EXERCÍCIO 11:** (i) Calcular o integral de $f(x, y) = x + y - 2$ no retângulo $[1, 4] \times [1, 3]$. Utilize o integral "fatiado". (ii) Calcular o mesmo outra vez, invertindo o sentido de integração. Interpretar o resultado. (RESP. 15)
- **EXERCÍCIO 12:** Determinar o integral de $x^4 - 2y$ no domínio da figura. Utilize o integral "fatiado". (RESP. 4/7).



PARTE C: Integral duplo

TP18 -2-

□ **EXERCÍCIO 13:** Seja $R = [0, 1] \times [0, 3]$. Determinar o integral duplo em R das funções (i) x^2 (RESP. 1); (ii) e^{x+y} (RESP. $e^4 - e^3 - e + 1$); (iii) xy^2 (RESP. $9/2$). Utilize o integral "fatiado".

□ **EXERCÍCIO 14:** Cf. exemplo 13 p. 270.

Calcular (i) a área de S_1 , (ii) o integral de superfície $\int_S z dS$.

□ **EXERCÍCIO 15:** Seja o parabolóide $S \equiv z = 9 - x^2 - y^2$ definido sobre o círculo de raio 3 e centrado na origem do plano xy (vê figura página anterior - p. 273). Seja a função

$\vec{F} = \langle 2z - y, x + z, 3x - 2y \rangle$. (i) Encontrar uma parametrização de S e de $C = \partial S$ e determinar o campo das normais no parabolóide.

(ii) Calcular o rotacional de \vec{F} . (iii) Calcular o integral de caminho

$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{L}$. (iv) Calcular o fluxo de rotacional de \vec{F} , i.e.

$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$. (v) Verificar que ambos integrais valem o mesmo valor 18π : é o teorema de Stokes.

PARTE C: Integral duplo

TP18 -3-

(vi) Aplicar Stokes mais uma vez e calcular $\int_D \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{dS}$, onde D é o disco no plano xy cuja fronteira é C . Justificar.

□ RESOLUÇÃO DO EX. 15:

Uma vez que a superfície tem simetria cilíndrica, escolhemos coordenadas cilíndricas, i.e., a superfície escreve-se

$$(i) S \equiv p(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta), z(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 9 - r^2)$$

com $0 \leq r \leq 3$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Logo

$\partial S = C = \gamma(\theta) \equiv (3 \cos \theta, 3 \sin \theta, 0)$. Temos também

$\vec{p}_{,r} = (\cos \theta, \sin \theta, 9 - 2r)$ e $\vec{p}_{,\theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$ e a normal vem $\vec{n} = \vec{p}_{,r} \times \vec{p}_{,\theta} = 2r^2 \cos \theta \vec{e}_x - 2r^2 \sin \theta \vec{e}_y + r \vec{e}_z$.

(ii) o rotacional de \vec{F} vale $\vec{\nabla} \times \vec{F} = -3\vec{e}_x - \vec{e}_y + 2\vec{e}_z$.

(iii) a curva C tem como representação paramétrica

$C \equiv \gamma(\theta) = (3 \cos \theta, 3 \sin \theta, 0)$, logo com velocidade

$$\vec{\gamma}'(\theta) = \langle -3 \sin \theta, 3 \cos \theta, 0 \rangle.$$

PARTE C: Integral duplo

TP18 -4-

Portanto, o integral de caminho é

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} &= \int_C \langle 2z - y, x + z, 3x - 2y \rangle \cdot \vec{\gamma}'(\theta) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} (\langle 2 \cdot 0 - 3 \sin \theta + 0, 3 \cos \theta, 3 \cdot 3 \cos \theta - 2 \cdot 3 \sin \theta \rangle \cdot \langle -3 \sin \theta, 3 \cos \theta, 0 \rangle) \\ &= \int_0^{2\pi} (\langle -3 \sin \theta, 3 \cos \theta, 9 \cos \theta - 6 \sin \theta \rangle \cdot \langle -3 \sin \theta, 3 \cos \theta, 0 \rangle) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 9(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 9 \cos \theta - 6 \sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} 9 d\theta = 18\pi. \end{aligned}$$

Nota: $\int_0^{2\pi} (9 \cos \theta - 6 \sin \theta) d\theta = 0$ pela periodicidade das funções sin e cos.

(iv) o fluxo do rotacional vale

$$\begin{aligned} \int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \langle -3, -1, 2 \rangle \cdot \langle 2r^2 \cos \theta, -2r^2 \sin \theta, r \rangle dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (-6r^2 \cos \theta + 2r^2 \sin \theta + 2r) dr d\theta = (\text{por periodicidade}) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 2r dr d\theta = 2\pi r^2 \Big|_0^3 = 18\pi. \end{aligned}$$

(v) Verifiquemos portanto que $\int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{L}$: é o teorema de Stokes.

PARTE C: Integral duplo

TP18 -5-

(vi) Por Stokes vale também $\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_D \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$, uma vez que $C = \partial S = \partial D$. Calculemos a normal a superfície $D \equiv \mathbf{x}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$: $\mathbf{x}_{,r} \times \mathbf{x}_{,\theta} = r\vec{e}_z$. Logo o integral de superfície é $\int_D \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_D \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot r\vec{e}_z dS = \int_0^{2\pi} \int_0^3 2r dr d\theta = 18\pi$.

└ PARTE C/Integral de linha; integral duplo, de superfície; integral triplo/

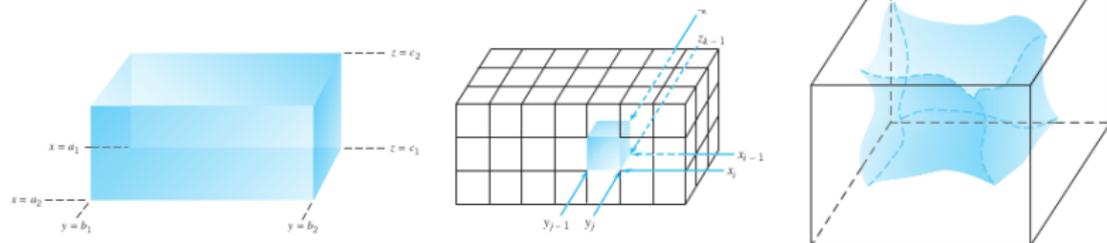
AULA 18 (15/5/2023)

Integral triplo

(referência: *Sala, Hille, Etgen: Calculus - one and several variables*)

PARTE C: Integral triplo

-1-



□ Consideremos (fig. a esquerda) um paralelepípedo Π ; dividimos o mesmo em blocos pequenos Π_{ijk} de maneira a formar uma partição \mathcal{P} (fig. central). Caso temos um domínio T geral, inserimo-no num paralelepípedo R bastante grande Π , pondo $f = 0$ em $\Pi \setminus T$ (fig. a direita).

□ Consideremos uma função f de 3 variáveis $(x, y, z) \in \Pi \mapsto \mathbb{R}$. Calculemos os máximo M_{ijk} e mínimo m_{ijk} de $f(x, y, z)$ em Π_{ijk} .

PARTE C: Integral triplo

-2-

□ Sendo que $\Pi_{ijk} = \Delta x_i \times \Delta y_j \times \Delta z_k$, calculemos

$$\bar{I}_f(\mathcal{P}) := \sum_{ijk} M_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k, \quad \underline{I}_f(\mathcal{P}) := \sum_{ijk} m_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

□ Vamos supor que $T \subset \Pi$ é um conjunto aberto de dimensão 3.

■ **TEOREMA C. 9 (Integral triplo).** Seja $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, nula em $\Pi \setminus T$. Então existe um único número real $I_f(\Pi)$ tal que, qualquer seja a partição \mathcal{P} de Π , vem $\underline{I}_f(\mathcal{P}) \leq I_f(\Pi) \leq \bar{I}_f(\mathcal{P})$. Este valor é chamado integral definido de f em Π :

$$I_f(\Pi) = \int_{\Pi} f dV = \int_{\Pi} f(x, y, z) dx dy dz,$$

onde definimos o elemento de volume $dV := dx dy dz$.

PARTE C: Integral triplo

-3-

□ Propriedades do integral:

I. Linearidade: $\int_T(\alpha f + \beta g)dS = \alpha \int_T f dS + \beta \int_T g dS, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$

II. Ordem: $f \leq g$ em $\Omega \implies \int_T f dS \leq \int_T g dS;$

III. Aditividade: $T = T_1 \sqcup T_2 \implies \int_{T_1} f dS + \int_{T_2} f dS;$

IV. Condição de valor médio: existe um ponto $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ tal que

$$\int_T f dV = f(x_0, y_0, z_0) \cdot \text{volume}(T).$$

□ **Nota:** chamemos $f(x_0, y_0, z_0)$ o valor médio de f em T , uma vez que $f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\int_T f dV}{\text{volume}(T)}.$

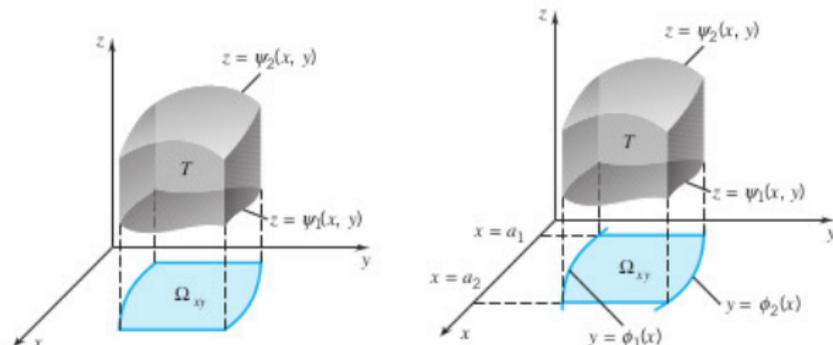
□ **EXEMPLO 14:** Seja $(x, y, z) \mapsto \lambda(x, y, z)$ densidade de um sólido ou fluido. A massa do sólido ou fluido é dada pelo integral de λ , i.e. $M = \int_T \lambda dV.$

PARTE C: Integral triplo "fatiado" -4-

□ Em analogia com o caso bi-dimensional, consideremos um domínio T representado pelas curvas

$$a_1 \leq x \leq a_2, \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \quad \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)$$

(vê figura). Integremos primeiro em z , depois em y , enfim em x .



O integral de f sobre T calcula-se como

$$\int_T f dV = \int_T f dz dy dx = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

PARTE C: Integral triplo "fatiado"

-5-

□ **Observação 4:** podemos escrever $dV = dxdydz$: neste caso integremos primeiro em x , depois em y , enfim em z . Mas podemos as vezes também inverter a ordem de integração das fatias, i.e. escrevemos $dV = dydxdz$: neste caso integremos primeiro em y , depois em x , enfim em z . Ou também $dV = dzdydx$ ou $dV = dzdxdy$, etc. Esta escolha depende da geometria do domínio: no exemplo acima temos $dV = dzdydx$.

□ **Nota:** o teorema de Fubini diz que é legítimo inverter o sentido de integração, mas atenção temos de prestar atenção aos limites de integração, ou seja para $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

(vale no integral duplo como no triplo).

PARTE C: Teorema da divergência

Teorema da divergência

Seja T um domínio $3d$ suave e $S = \partial T$ o seu bordo. Seja \vec{F} um campo \mathcal{C}^1 em \bar{T} . Então vale

$$\int_T \nabla \cdot \vec{F} dV = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

PARTE C: Integral triplo

TP19 -1-

- **EXERCÍCIO 16:** (i) Avalie o integral $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{4-x^2} xyz dz dy dx$. (RESP. 9) (ii) Dar uma expressão de e represente graficamente o domínio. (iii) Avalie $\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{4-x^2} xyz dz dx dy$. Interprete o resultado (HINT. teorema de Fubini). (iv) Avalie $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{4-x^2} xyz dz dy dx$ (RESP. 67/96). (v) Dar uma expressão de e represente graficamente o domínio.
- **EXERCÍCIO 17:** Seja um cilindro de raio R e altura h . (i) Determine as curvas da representação

$$-R \leq x \leq R, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), 0 \leq z \leq h$$

- (ii) Suponhamos que o cilindro seja feito de um material com densidade kz , $k > 0$ constante. Determine a sua massa (RESP. $kh^2r^2\pi/2$). HINT: Utilize as simetrias e a relação (área de um quarto de disco) $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{\pi R^2}{4}$.

PARTE C: Integral triplo

TP19 -2-

- **EXERCÍCIO 18:** Avalie (i) $\int_0^1 \int_1^{2y} \int_0^x (x + 2z) dz dx dy$ (RESP. $2/3$); (ii) $\int_0^1 \int_y^{y^2} \int_0^{\ln(x)} ye^z dz dx dy$ (RESP. $1/24$).
- **EXERCÍCIO 19:** Avalie (i) $\int_0^2 \int_{-1}^1 \int_1^3 (z - x^2y) dz dy dx$ (RESP. 16); dar uma expressão de e represente graficamente o domínio; (ii) $\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_1^3 (z - x^2y) dz dx dy$; dar uma expressão de e represente graficamente o domínio; (iii) $\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_1^3 (z - x^2y) dz dy dx$; dar uma expressão de e represente graficamente o domínio; (iv) Explicar porquê 2 dos 3 integrais dão o mesmo valor, 16, e o terceiro um valor diferente.
- Resposta: (i) e (iii) dão o mesmo valor pois que utilizamos o teorema de Fubini (invertimos o sentido de integração junto com os limites de integração); (ii) dá um valor diferente uma vez que alteramos o domínio: passou de $[0, 2] \times [-1, 1]$ a $[-1, 1] \times [0, 2]$.

PARTE C: Integral triplo

TP19 -3-

□ **EXERCÍCIO 20:** Seja o integral de volume $\int_0^1 \int_{1-x}^{1+x} \int_0^{xy} 4z dV$. Qual'é a expressão in extenso de dV (cf. Observação 4 p. 284).

□ **EXERCÍCIO 21:** Avalie $\int_{-2}^2 \int_{-1}^1 \int_0^{4-x^2-y^2} dz dy dx$ (RESP. 56/3).

□ **EXERCÍCIO 22:** Utilizar as coordenadas cilíndricas para calcular $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{4-x^2-y^2} (x^2 + y^2) dz$ (RESP. $32\pi/3$).
HINT: utilize as simetrias para determinar o domínio de r e θ .

• Resposta: *Reparemos que a geometria é o parabolóide do ex. 15 com raio 2 em vez de 3 e que o domínio escreve-se em polar como $\{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq z \leq 4 - r^2\}$, com $dV = dS dz = r d\theta dr dz$. Logo o integral re-escreve-se em polar como $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 r dr \int_0^{4-r^2} dz = 2\pi \int_0^2 (4r^3 - r^5) dr = 32\pi/3$.*

PARTE C: Integral triplo

TP19 -4-

□ **EXERCÍCIO 23:** (i) Fazer outra vez o exercício 17 mas em coordenadas cilíndricas. (ii) Calcule a massa do cilindro se a densidade for kr , $k > 0$.

□ **EXERCÍCIO 24:** Calcular o volume do sólido dado pelas equações $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq r \leq \sin \theta$, $r^2 \leq z \leq r \sin \theta$.

(RESP. $1/32$). HINT: $\int_0^\pi \sin^4 u du = 3/8$.

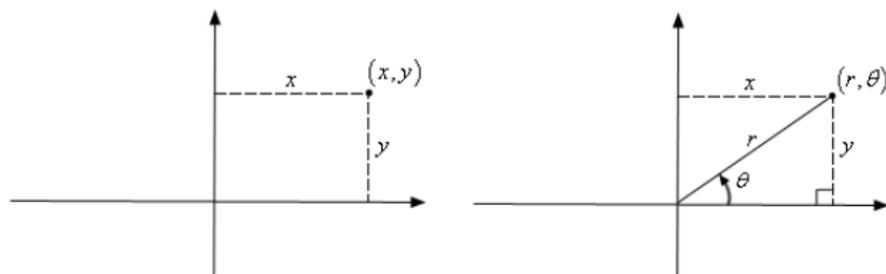
└ PARTE C/Coordenadas polares/

AULA 19 (19 & 22/5/2023)

Coordenadas polares

PARTE C: Coordenadas polares

-1-



□ As coordenadas polares são coordenadas utilizadas pela descrição de pontos pertencentes a conjuntos com algumas propriedades de simetria. Em particular em bolas, ciclíndros, ou até no espaço inteiro.

■ **DEFINIÇÃO 12:** Seja (x, y) as coordenadas Cartesianas de um ponto P do plano. Definimos o raio r como a distância da origem a P , i.e.,

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

O raio é então um valor sempre positivo ou nulo.

PARTE C: Coordenadas polares

-2-

Para caracterizar completamente P precisamos de saber o ângulo entre o segmento $[0; P]$ e o eixo dos x . Por convenção o ângulo tem valores em $[0, 2\pi[$. Para o efeito é definido como

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0 \text{ e } y \geq 0, & 1.^{\circ} \text{ quadrante,} \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & \text{se } x > 0 \text{ e } y < 0, & 4.^{\circ} \text{ quadrante,} \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0, & 2.^{\circ} \text{ e } 3.^{\circ} \text{ quadrantes,} \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0, & \text{eixo dos } y > 0, \\ \frac{3\pi}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0, & \text{eixo dos } y < 0 \end{cases}$$

□ A mudança de coordenadas das polares para as Cartesianas é dada por:

$$x = r \cos \theta,$$

e

$$y = r \sin \theta.$$

PARTE C: Coordenadas polares

-3-

□ **EXEMPLO 15** (Passagem de Cartesiano a polar): As coordenadas polares do ponto $P = (1, 1)$ são $(r, \theta) = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$, uma vez que $r = \sqrt{2}$ e $\theta = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$; as de $P = (1, -2)$ são $(r, \theta) = (\sqrt{5}, \arctan(-2) + 2\pi) = (\sqrt{5}, 2\pi - \arctan(2))$; as coordenadas polares do ponto $P = (-1, 2)$ são $(r, \theta) = (\sqrt{5}, \arctan(-2) + \pi) = (\sqrt{5}, \pi - \arctan(2))$; as de $P = (-1, -3)$ são $(r, \theta) = (\sqrt{10}, \arctan(3) + \pi)$.

□ **EXEMPLO 16** (Passagem de polar a Cartesiano): As coordenadas Cartesianas de $(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{3})$ são $P = (1 \cdot \cos \frac{\pi}{3}, 1 \cdot \sin \frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; as de $(r, \theta) = (2, \frac{\pi}{2})$ são $P = (2 \cdot \cos \frac{\pi}{2}, 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2}) = (0, 2)$.

PARTE C: Coordenadas polares

-4-

□ **Convenção/Observação:** Por $(r, -\theta)$ entendemos as coordenadas polares $(r, 2\pi - \theta)$.

□ **Observação:** Uma figura no plano tem simetria com respeito ao eixo dos x se é simétrica pela mudança $\theta \rightarrow -\theta$.

Analogamente, tem simetria com respeito ao eixo dos y se é simétrica pela mudança $\theta \rightarrow \pi - \theta$. Terá simetria com respeito à origem se tem ambas simetrias.

Gradiente em coordenadas polares

O gradiente em Cartesiano é $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y$. Vejamos como expressar o mesmo em coordenadas e base polares.

Pela derivação em cadeia, sendo que f é uma função de duas variáveis, (x, y) ou (r, θ) , temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

PARTE C: Coordenadas polares

-5-

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Temos portanto de avaliar $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, e $\frac{\partial \theta}{\partial y}$. Vem

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \arctan \frac{y}{x}}{\partial x} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \frac{\partial y/x}{\partial x} = \frac{-y/x^2}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \arctan \frac{y}{x}}{\partial y} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \frac{\partial(y/x)}{\partial y} = \frac{1/x}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

PARTE C: Coordenadas polares

-6-

Mas, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, logo

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}.$$

O vetor gradiente escreve-se então em polares como

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \vec{e}_y,$$

ou seja,

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \overbrace{(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)}^{=\vec{e}_r} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{1}{r} \overbrace{(-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y)}^{=\vec{e}_\theta},$$

Em conclusão,

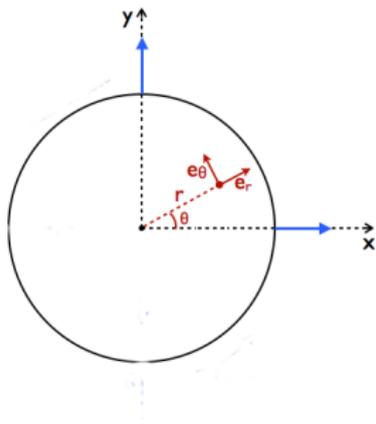
$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\vec{e}_\theta}{r},$$

PARTE C: Coordenadas polares

-7-

onde definimos os vetores de base polares (vê figura):

$$\vec{e}_r := \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y, \quad \vec{e}_\theta := -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y. \quad (\star)$$



□ A base $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta\}$ é uma rotação da base Cartesiana $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ de um ângulo θ , no sentido em que

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix}$$

□ O vetor $\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ escreve-se em polar como $\overrightarrow{OP} = r\vec{e}_r$.

□ **Observação:** é um exemplo de base móvel ortogonal: em cada ponto a base é diferente uma vez que r e θ variam. Ao contrário da base Cartesiana, fixada uma vez por todas na origem.

PARTE C: Coordenadas polares

-8-

Acabamos de demonstrar o teorema seguinte:

■ **TEOREMA C. 10 (Gradiente em polar).** Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua de duas variáveis r e θ , cujas derivadas parciais existem. O gradiente de f tem como expressão em coordenadas e base polares:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\vec{e}_\theta}{r},$$

onde \vec{e}_r e \vec{e}_θ são definidos por (\star) .

□ **Observação:** Os vetores de base polar são definidos como a normalização da derivada em ordem r e θ do vetor posição em polar. Com efeito,

$$\partial_r \left(\overrightarrow{OP} \right) = \partial_r (r \cos \theta \vec{e}_x + r \sin \theta \vec{e}_y) = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y,$$

tendo norma unitária, é igual a \vec{e}_r .

PARTE C: Coordenadas polares

-9-

Também

$$\partial_{\theta} \left(\overrightarrow{OP} \right) = \partial_{\theta} (r \cos \theta \vec{e}_x + r \sin \theta \vec{e}_y) = -r \sin \theta \vec{e}_x + r \cos \theta \vec{e}_y,$$

tendo este último norma igual a r vem após normalização (ou seja, divisão pela norma do vetor, para torna-lo unitário)

$$\vec{e}_{\theta} = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y.$$

PARTE C: Coordenadas polares

-10-

□ **EXEMPLO 17:** Seja o campo escalar em coordenadas polares cilíndricas $f(r, \theta) = r^2\theta$, onde $0 \leq r$ e $0 < \theta < \pi/2$. Calcular o gradiente de f na base polar consiste então em calcular $\partial_r f = 2r\theta$ e $\partial_\theta f = r^2$. Logo $\vec{\nabla} f = 2r\theta\vec{e}_r + r\vec{e}_\theta$. Podemos expressar o gradiente em Cartesiano, por uma mera substituição, vem:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= 2\sqrt{x^2 + y^2} \arctan \frac{y}{x} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) \\ &+ \sqrt{x^2 + y^2} (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) \\ &= \left(2x \arctan \frac{y}{x} - y\right) \vec{e}_x + \left(2y \arctan \frac{y}{x} + x\right) \vec{e}_y,\end{aligned}$$

onde utilizamos $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Reparemos que este cálculo se torna mais fácil do que calcular diretamente em Cartesiano:

$$\vec{\nabla} \left((x^2 + y^2) \arctan \frac{y}{x} \right).$$

PARTE C: Coordenadas polares

-11-

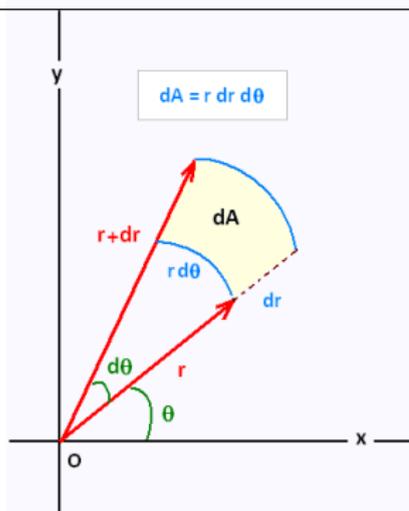
Integração em polar

Quando a geometria do domínio bi-dimensional é facilmente (naturalmente) descrita em coordenadas polares; logo convem integrar em coordenadas polares. Neste caso a função por integrar depende de r e θ , i.e., $f(r, \theta)$, com $f : D := [0, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

□ O elemento de área em polar é

$$dS = r d\theta dr,$$

onde $r d\theta$ é um elemento de comprimento curvo (cilíndrico) e dr é o elemento de comprimento ao longo do raio. Vê figura (onde $dS = dA$).



PARTE C: Coordenadas polares

-12-

Portanto o integral de superfície de f em polar consiste em calcular

$$\int_D f dS = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{r=\phi_1(\theta)}^{r=\phi_2(\theta)} f(r, \theta) r dr,$$

com (aqui) $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = R$.

Integração em cilíndrico a 3d

Quando a geometria domínio é tri-dimensional e facilmente descrita em coordenadas cilíndricas, logo convem integrar em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) onde z é a coordenada vertical.

Neste caso a função por integrar depende de r e θ e z , i.e., $f(r, \theta, z)$, com $f : D = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. O elemento de volume em cilíndrico é

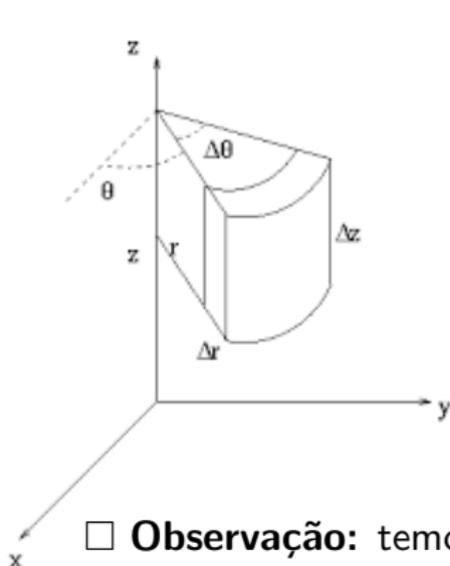
$$dV = r d\theta dr dz,$$

onde $r d\theta$ é um elemento de comprimento curvo (cilíndrico), dr é o

PARTE C: Coordenadas polares

-13-

elemento de comprimento ao longo do raio, e dz o elemento de comprimento ao longo do eixo vertical z . Portanto integrar f em cilíndrico (3d) consiste em calcular (consoante a geometria de D)



$$\int_D f dS =$$

$$= \int_{z=a}^{z=b} dz \int_{\theta=\psi_1(z)}^{\theta=\psi_2(z)} d\theta \int_{r=\phi_1(\theta,z)}^{r=\phi_2(\theta,z)} f(r, \theta, z) r dr.$$

$$= \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} d\theta \int_{z=\eta_1(\theta)}^{z=\eta_2(\theta)} dz \int_{r=\phi_1(\theta,z)}^{r=\phi_2(\theta,z)} f(r, \theta, z) r dr.$$

$$= \int_{r=r_1}^{r=r_2} r dr \int_{\theta=\Psi_1(r)}^{\theta=\Psi_2(r)} d\theta \int_{z=\Phi_1(r,\theta)}^{z=\Phi_2(r,\theta)} f(r, \theta, z) dz.$$

□ **Observação:** temos sempre o integral mais a esquerda que corresponde a variável mais a direita (z).

PARTE C: Coordenadas polares

TP20 -1-

- **EXERCÍCIO 25:** Efetuar a mudança de coordenadas de Cartesiano a polar dos pontos $(2, 3)$, $(-4, -4)$, $(-3, 7)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, -4)$. Representar os mesmo no plano.
- **EXERCÍCIO 26:** Efetuar a mudança de coordenadas de polar a Cartesiano dos pontos $(r, \theta) = (0, 0)$, $(0, 10)$, $(10, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(2, \frac{\pi}{4})$, $(2, \frac{3\pi}{4})$. Representar os mesmos no plano.
- **EXERCÍCIO 27:** Dizer que tipo de figura é dada pela equação (i) $r = a$, com $a > 0$; (ii) $r = 0$; (iii) $\theta = \frac{\pi}{4}$; (iv) $r \cos \theta = b$ com $b > 0$; (v) $r \cos \theta = b$ com $b < 0$: $r \sin \theta = c$, $c > 0$.
- **EXERCÍCIO 28:** Encontrar a equação da hiperbole $x^2 - y^2 = a^2$, $a > 0$ em coordenadas polares.
- **EXERCÍCIO 29:** Escrever em polar as equações (i) $x = 2$: (ii) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$: (iii) $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$.

PARTE C: Coordenadas polares

TP20 -2-

□ **EXERCÍCIO 30:** Escrever em Cartesiano (i) a elipse

$r(\theta) = \frac{4}{2-\cos\theta}$ (HINT: expressar $4rx$ em Cartesiano. RESP.

$4rx = 2r(2r \cos\theta) = (4+x)(2x) = 8x + 2x^2$). Nota: é uma elipse de grande raio $a = \frac{8}{3}$ e excentricidade $e = \frac{1}{2}$ cuja equação

relativamente ao foco $F = ae$ é $r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos\theta} = \frac{b^2/a}{1-e \cos\theta}$ em polar (onde b é o pequeno raio) e $(x - ae)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2$ em

Cartesiano (ou $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$).

(ii) A parábola: $r(\theta) = \frac{p}{1-\sin\theta}$

(HINT: utilizar as definições $r^2 = x^2 + y^2$ e $y = r \sin\theta$).

Interpretar p (HINT. vê a definição sem coordenadas da parábola p. 199. Determinar o foco F).

□ **EXERCÍCIO 31:** Mostrar que a equação $r = 2a \cos\theta$ é a de um círculo, com $a > 0$; dar o seu raio e centro (HINT: multiplique por r e utilize as definições).

PARTE C: Coordenadas polares

TP20 -3-

□ **EXERCÍCIO 32:** (i) Quais são as simetrias da curva $r^2 = \cos 2\theta$? (ii) Representar graficamente a curva.

□ **EXERCÍCIO 33:** Quais são as simetrias das curvas (i) $r(\sin \theta + \cos \theta) = 1$; (ii) $1 = r^2 \sin 2\theta$; (iii) $r = \cos 2\theta$; (iv) $r \sin \theta = 1$.

(ii) Representar a curva graficamente.

□ **EXERCÍCIO 34:** Calcule em Cartesiano

$$\vec{\nabla} \left((x^2 + y^2) \arctan \frac{y}{x} \right)$$

e verifique que dá a mesma expressão do que no exemplo 17 na página 300.

□ **EXERCÍCIO 35:** Verifique que o vetor $\vec{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ escreve-se em polar como $\vec{OP} = r\vec{e}_r$.