

Equação do Calor

Aulas teorico-praticas

Docente: Nicolas Van Goethem

vangoeth@fc.ul.pt,
Sala 6.2.20.

June 26, 2018

Teórica-Prática: programa, métodos

- ▶ Exercícios relativos à teoria
- ▶ Estudo de vários métodos matemáticos através da apresentação da equação do Calor
- ▶ Apresentação oral de trabalhos dos alunos
 - ▶ 3 pequenos homework (individual ou por grupos de 2: 30 min)
 - ▶ 1 grande tema a escolha (individual)
 - ▶ apresentação pode ser feita em Português ou Inglês

Avaliação

- ▶ Exame de teoria (40%)
- ▶ Exame de teórica-prática (20%)
- ▶ Grande trabalho (30%)
- ▶ Pequenos trabalhos (10%)

Referências bibliograficas

- ▶ R. Courant and D. Hilbert: *Methods of Mathematical Physics*
- ▶ T. Myint-U and L. Debnath: *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*
- ▶ R. B. Guenther and J.W. Lee: *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*
- ▶ L. C. Evans: *Partial Differential Equations*
- ▶ G. Allaire: *Numerical analysis and Optimization*

Proposta de temas de trabalho

Cf. Courant and Hilbert's book as basic reference (plus your owns).

- ▶ Green functions and fundamental solutions in elliptic PDEs
- ▶ Potential theory (1st and 2nd layer potentials)
- ▶ Method of Characteristics in PDEs
- ▶ Study of the wave equation
- ▶ Vibration and Eigenvalue problems
- ▶ Fredholm alternative in PDEs
- ▶ Vector calculus: (div, grad, curl, Gauss, Stokes theorems)
- ▶ Calculus of variations: the direct method, Euler-Lagrange, Hamilton, ...

Conteúdo das aulas TP: Equação do calor

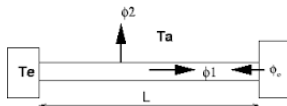
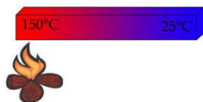
- ▶ Aula 1: Origem física: lei de Fourier, caso 1d, condições na fronteira, Lei de Fick, caso nd (18/9)
- ▶ Aula 2: Solução, princípio do máximo, Gradient flow (25/10)
- ▶ Aula 3: Series de Fourier, propriedades de series (02/10)
- ▶ Aula 4: Problema bem posto, unicidade, generalizações, princípio de superposição (09/10)
- ▶ Aula 5: Equação em \mathbb{R}^N , solução fundamental, propriedades das soluções, problema não omogeneo (16/10)
- ▶ Aulas 6: Princípio de Duhamel, Equação em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (23/10)
- ▶ Aulas 7: Existência de uma solução fraca (06/11)

Conteúdo das aulas TP: Equação do calor

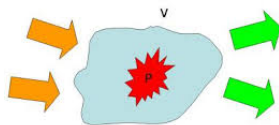
- ▶ Aula 8: Regularidade, Princípio do máximo (13/11)
- ▶ Aulas 8: Apresentação 1: João (Green functions) (20/11)
- ▶ Aulas 9: Apresentação 2: Adriana (Tensor calculus) (27/11)
- ▶ Aulas 10: Apresentação 3: Ragaa (Semigroups) (04/11)

Aula 1: Origem física

- ★ Experiência quotidiana (barote 1d, temperatura ambiente e na barra, fluxos entrante e saindo, fontes de calor, difusão) :



- ★ Caso tridimensional, noção de Calor=Energia termica:



flux de chaleur entrant
 - flux de chaleur sortant
 + flux de chaleur générée
 = accumulation d'énergie interne



Jean-Baptiste-Joseph Fourier
 (1768-1830)

Aula 1: Observações

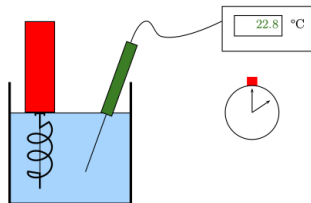
Observação 1:

Numa barote metalico com temperature não-uniforme (constante), o calor é transferido das regiões quentes às regiões frias.

Observação 2:

Num corpo com temperatura uniforme, o calor H é proporcional à temperatura u :

(1) $H = \text{Calor} = cmu$, onde m : massa, e c : calor especifico = energia necessaria para aumentar de $1K$ uma massa de $1kg$.



Aula 1: Lei de Fourier

Lei de Fourier (1822) : proporcionalidade

$$(2) J := \text{Fluxo de Calor} = \frac{\text{Taxa de transferência de } H}{\text{Área}}$$

$$J = -k \text{grad} u,$$

onde k : condutividade termica.

★ Considere um barote $[0, l] \times h$ de seccão A , e densidade ρ

Conservação da energia:

$$\begin{array}{rcccl} \text{Mudança de} & & \text{Fluxo de calor} & & \text{Fluxo de calor} \\ \text{energia termica} & & \text{que entra} & & \text{que sai} \\ \text{por segmento } \Delta x & = & \text{pelo bordo} & - & \text{pelo bordo} & + \text{Fonte} \\ \text{e por intervalo } \Delta t & & \text{esquerda} & & \text{direita} \end{array}$$

Aula 1: Derivação da equação a 1d

- ★ Seja Q a fonte de calor por unidade de volume e de tempo.
- ★ Temos $H(x) = cmu(x, t)$. Logo, por (1) e (2),

$$cm(u(x, t + \Delta t) - u(x, t)) = \Delta t A (J(x) - J(x + \Delta x)) + Q A \Delta x \Delta t.$$

- ★ Temos $m = (\rho A \Delta x)$. Pela lei de Fourier, $J(x) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(x)$.

Portanto: (3) $\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = \frac{k}{c\rho} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x)}{\Delta x} \right) + \frac{Q}{\rho c}.$

- ★ Toma $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Portanto

$$(3) \implies \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F},$$

$\kappa = \frac{k}{\rho c}$: difusividade termica, $F := \frac{Q}{\rho c}$: a fonte de Calor.

Aula 1: Equação do Calor a 1d

♣ A equação do Calor é um problema com condições inicial e de fronteira.

Condição inicial

Escolher $u(x, 0) = f(x)$.

Condição de fronteira:

- ▶ Dirichlet homogêneo: $u(0) = u(l) = 0$
- ▶ Dirichlet não homogêneo: $u(0) = u_0, u(l) = u_l$
- ▶ Neumann homogêneo: $u_x(0) = u_x(l) = 0$
- ▶ Neumann não homogêneo: $u_x(0) = j_0, u_x(l) = j_l$

Trabalho em casa 1

Resolver a equação do Calor a 1d com condição de fronteira

Dirichlet homogêneo e $Q = 0$. (Tomar $\kappa = l = 1$ e $f = u_0 = \text{cte.}$)

Aula 1: Equação da difusão (outra derivação)

Problema

Considere um corante que se difunde num coluna de liquido (problema 1d: $x_0 \leq x \leq x_1$). Observe-se que o movimento é das altas as bassas concentrações. Seja $u(x, t)$ a concentração do corante (massa por unidade de comprimento) em x no tempo t .

Lei de Fick (1855)

A intensidade do fluxo difusivo é proporcional ao gradiente de concentração. Portanto: $J(x, t) = -\kappa \text{gradu}(x, t)$, $\kappa > 0$.

Derivação

- ▶ A massa do corante é $M(t) := \int_{x_0}^x u(x, t) dx$. Logo $\frac{d}{dt} M(t) = \int_{x_0}^x u_t(x, t) dx$.
- ▶ D'outro lado: $\frac{d}{dt} M(t) = J_{\text{in}} - J_{\text{out}} = J(x_0, t) - J(x, t)$.
- ▶ Pela lei de Fick e derivando c.r.a. x : $u_t = \kappa u_{xx}$.

Aula 1: Equação do Calor em dimensão N

♣ Seja u a temperatura. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o domínio (metal condutor).
Seja $D \subset \Omega$ regular e limitado com normal unitária exterior N .

Derivação

- ▶ A energia termica $M_D(t) := \int_D c\rho u(x,t)dx$. Logo

$$\frac{d}{dt}M_D(t) = c\rho \int_D u_t(x,t)dx.$$
- ▶ Pela lei de Fourier, o calor vai das regiões quentes as frias, ou seja o calor aumenta em D devido ao fluxo $-J \cdot N$ na fronteira, pelo que: $\frac{d}{dt}M_D(t) = \int_{\partial D} k \text{grad} u \cdot N dS(x).$
- ▶ Pelo teorema da divergência: $= \int_D \text{div}(k(x) \text{grad} u) dx$
- ▶ Portanto (se k constante): $\int_D u_t(x,t)dx = \int_D \kappa \Delta u dx, \quad \forall D.$
- ▶ Logo: $\boxed{u_t(x,t) = \kappa \Delta u}$, onde $\Delta = \nabla \cdot \nabla (= \partial_{x_i}^2$ em Cartesiano).

Aula 2: Solução a 1d

A-dimensionalização

Escolhe grandezas características de comprimento, tempo, e temperatura: L, T, U . Tome $\hat{x} = \frac{x}{L}$, $\hat{t} = \frac{t}{T}$, $\hat{u} = \frac{u}{U}$, $\hat{f} = \frac{f}{U}$.

♣ Portanto $u_t = \frac{U}{T} \hat{u}_{\hat{t}}$, $u_x = \frac{U}{L} \hat{u}_{\hat{x}}$, $\hat{u}_{xx} = \frac{U}{L^2} \hat{u}_{\hat{x}\hat{x}}$.

Tomando $L = l$ e $T = \frac{l^2}{\kappa}$, obtemos (com $Q = 0$):

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2}$$

Solução

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}, \text{ com}$$

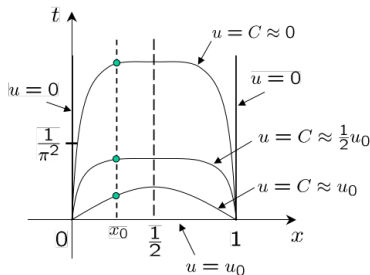
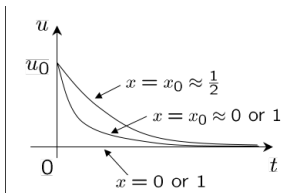
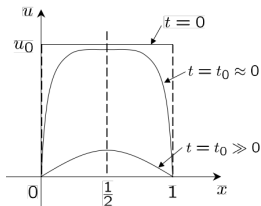
$$B_n = 2 \int_0^1 \sin(n\pi x) f(x) dx = 2u_0 \int_0^1 \sin(n\pi x) dx =$$

$$\begin{cases} 0 : & n \text{ par} \\ \frac{4u_0}{n\pi} : & n \text{ impar} \end{cases},$$

ou seja
$$u(x, t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\pi x)}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t}.$$

Aula 2: Comportamento da solução a 1d

★ Curvas: (1) Representação espacial; (2) Evolução temporal;



(3) Isotermicas.

Aula 2: Princípio do máximo

Princípio do maximo

A solução da equação do Calor tem pontos extremais (i.e., maximo e minimo) na fronteira do dominio “espaço-tempo”, ou seja o maximo (ou minimo) entre a condição inicial e de fonteira.

Em equações

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max},$$

onde

$$u_{\max} = \max\left\{\max_{0 < x < 1} f(x), \max_{0 < t < T} u(0, t), \max_{0 < t < T} u(1, t)\right\},$$
$$u_{\min} = \min\left\{\min_{0 < x < 1} f(x), \min_{0 < t < T} u(0, t), \min_{0 < t < T} u(1, t)\right\}$$

Aula 2: Solução aproximada

Observação

Temos $u(x, t) = \frac{4u_0}{\pi} \left(\sin(\pi x)e^{-\pi^2 t} + \sin(3\pi x)/3e^{-9\pi^2 t} \right) + \dots$

♣ Dividindo o primeiro e segundo termo,

$$\frac{\text{SECOND}}{\text{FIRST}} = \frac{e^{-8\pi^2 t} |\sin(3\pi x)|}{3 |\sin(\pi x)|} \leq e^{-8} \text{ para } t \geq \pi^{-2}$$

♣ Logo $u(x, t) \sim \frac{4u_0}{\pi} \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t}$ (difusão quase instatânea)

Taxa de decaimento

A solução estacionária ($\partial_t u \sim 0$) é $u = 0$.

♣ $\forall f$ integrável: $|u(x, t)| \leq B \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{Br}{1-r}$, com $r = e^{-\pi^2 t} < 1$

$$\Rightarrow |u(x, t)| \leq \frac{Be^{-\pi^2 t}}{1-e^{-\pi^2 t}} \leq 2Be^{-\pi^2 t}$$

\Rightarrow

- ▶ Decaimento exponencial à solução estacionária
- ▶ A taxa de decaimento é dada pelo primeiro termo.

Aula 2: Abordagem do fluxo gradiente

Princípio

Ate agora derivamos a equação do Calor conforme um princípio de conservação (do volume ou da energia). O fluxo gradiente postule que a solução verifique um princípio de minimo longo trajetórias, tal como a minima “Acção” em Mecânica racional.

Em equações

$$u_t = -K \operatorname{grad} E(u) = -K \frac{\delta E(u)}{\delta u}, \text{ onde a "acção" é}$$

$$E(u) = \int_{\omega} \left(\frac{1}{2} \kappa \operatorname{grad}^2 u - c \rho u \right) dx.$$

Trabalho em casa 2

Considere o caso de Ω isolado ($\operatorname{grad} u \cdot N = 0$ em $\partial\Omega$ ou $M_{\Omega} = \text{cste}$), e calcule a primeira variação de $E(u)$ (ou seja, $\frac{\delta E(u)}{\delta u}$).
 HINT: Calcule $E(u + \epsilon \eta) - E(u)$ onde η é uma variação compatível, e deixa $\epsilon \rightarrow 0$.

Aula 2: Conceito de Heat kernel, ou solução fundamental

Análise dimensional e solução canônica

Nota-se que se $u(x, t)$ é solução de $\partial_t u - \kappa \partial_x^2 u = 0$, então βv , onde $v(x, t) = u(\alpha x, \alpha^2 t)$, $\alpha > 0$ também é solução. Pela conservação da energia térmica, temos $H(t) = \beta \int_{\mathbb{R}} v(x, t) dx = \beta/\alpha \int_{\mathbb{R}} u(x, \alpha^2 t) dx = \beta/\alpha \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) dx = \beta/\alpha H(0) \Rightarrow \beta = \alpha$.

♣ Tomando $\alpha = t^{-1/2}$, a solução $G(x, t) = t^{-1/2} u(xt^{-1/2}, 1) = t^{-1/2} w(r)$, $r := xt^{-1/2}$, verifique $2\kappa w''(r) + rw'(r) + w(r) = 0$.

♣ Tomando $\kappa = 1/2$ e $H(0) = 1$, logo $w(r) = (2\pi)^{-1} e^{-r^2/2}$ e portanto a solução fundamental é $G(x, t) = (2\pi t)^{-1/2} e^{-(x^2/2t)}$: corresponde à uma condição inicial $u(x, 0) = \delta_0$. Logo $G(x - y, t)$ corresponde à uma condição inicial $u(x, 0) = \delta_y$.

♣ Por convoluções, verifique-se que

$u(x, t) := (G \star f)(x, 2\kappa t) := \int_{\mathbb{R}} f(y) G(x - y, 2\kappa t) dy$ é solução de $\partial_t u - \kappa \partial_x^2 u = 0$ com condição inicial $u(x, 0) = f(x)$.

Aula 2: Propriedades da solução

♣ Toma $f = \chi_{[0,\infty)} - \chi_{(-\infty,0)}$ (discontinua em 0). A solução é

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^0 G(\xi, t) d\xi - \int_0^{\infty} G(\xi, t) d\xi = \\ (4\pi\kappa t)^{-1/2} \int_0^{x/(2\sqrt{\kappa t})} e^{-y^2} dy.$$

♣ Com as series de Fourier, precisávamos de f diferenciável.

Propriedade de regularidade

Seja f integrável (ou limitada). Segue da regularidade de G que a solução da equação do Calor é infinitamente diferenciável. A regularização é instantânea, pois “ $G(x, \cdot) \rightarrow \delta_0$ ”.

Propagação instantânea

$$f = \chi_{[0,1]} : u(x, t) = (4\kappa\pi t)^{-1/2} \int_0^1 e^{-(\|x-y\|^2/4\kappa t)} dy > 0, \quad \forall (x, t).$$

Princípio do maximo

Seja f continua, limitada ($\neq cst$). Portanto $u(x, t) < \max f(x)$.

♣ DEM. $M := \max f$. Temos $u = G \star f < M \int_{\mathbb{R}} G = M$.

Aula 3: Series de Fourier

♣ Definimos a n -ésima soma parcial

$$S_n := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

onde $\cos(kx), \sin(kx)$ formam um sistema de funções ortogonais.

Conceito de base

Seja uma função $f(x)$ continua por partes e de período 2π . O problema é de escrever f em termos de senos e cossenos:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

para apropriados coeficientes a_k, b_k .

Vamos estudar se e quando

$$f \sim S_\infty[f] := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n[f] \text{ torna se } f = S_\infty[f]$$

♣ Exemplo: Sim, se f é continua e se a soma dos seus coeficientes de Fourier converge absolutamente.

Aula 3: Determinação dos coeficientes

Determinação dos coeficientes. Primeiro método: projecções

Supomos que $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ e que se pode integrar termo a termo. Logo

- ▶ $\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = \pi a_0$ pela periodicidade de \cos e $\sin \Rightarrow a_0 = \dots$
- ▶ $\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \{\cos(nx), \sin(nx)\} dx = \pi \{a_k, b_k\} \Rightarrow \{a_k, b_k\} = \dots$

Trabalho em casa 3: Segundo método: mínimos quadratos

Tomar o mínimo em a_k, b_k de:

$$I(a_k, b_k) := \int_{-\pi}^{+\pi} (f(x) - S_n(x))^2 dx.$$

Aula 3: Exemplos

Funções pares e ímpares

♣ Seja f par. Portanto:

$$b_k = 0, a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k \geq 0.$$

♣ Seja f ímpar: $a_k = 0, b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k \geq 1.$

Exemplos (fazer em casa)

- ▶ $x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}$ (O que acontece em $x = \pm\pi$?)
- ▶ $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)!}$
- ▶ $x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k!}$

Intervalo qualquer

Consideramos f definida em $[a, b]$ em vez de $[-\pi, \pi]$. Mudança de variável: $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2\pi}t$. Decompoe-se

$\tilde{f}(t) = f(x) = f(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2\pi}t)$ em serie de Fourier e faça-se a mudança de variável inverso.

Aula 3: Convergência das sumas parciais

Outra representação

Pelas formulas de Euler, temos:

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

onde $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$.

Problemas

- ▶ Nem todas a series de Fourier correspondem á decomposição de uma funcção (ex. $\sum_2^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\log n}$)
- ▶ Nem todas as funcções (mesmo periodicas e continuas) tem uma serie de Fourier (vê Lusin, Du Bois-Raymond, Carleson)

♣ Temos que estudar o tipo de convergência da serie de Fourier.

Aula 3: Convergência das sumas parciais

Convergência puntual

Uma serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ para $a < x < b$ se para qualquer $x \in (a, b)$ temos $|f(x) - S_n(x)| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Convergência uniforme

Uma serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a f em $[a, b]$ se $\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - S_n(x)| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Convergência no sentido dos minimos quadrados

Uma serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge a f em $[a, b]$ no sentido dos minimos quadrados (ou $L^2(a, b)$) se

$$\int_a^b |f(x) - S_n(x)|^2 dx \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Uniforme implica convergência L^2 e puntual.

Aula 3: Bessel e Parseval

♣ Seja f continua por partes e periodica de periodo 2π .

Bessel inequality (~ 1800)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

ou

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

Parseval identity (1799)

Se S_n converge a f no sentido dos minimos quadrados, então

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Aula 3: Teoremas

Lema de Riemann-Lebesgue

Seja g continua por partes em $[a, b]$. Temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sin(\lambda x) dx = 0.$$

Teorema de convergência puntual (Dirichlet 1824)

Seja f periodica de periodo 2π , C^1 por partes em $[-\pi, \pi]$. Temos para qualquer $-\pi \leq x \leq \pi$:

$$\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) := S_{\infty}[f](x), \text{ onde}$$

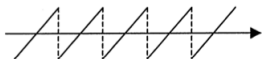
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k \geq 0, \text{ e}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k \geq 1.$$

♣ Pelo Lema acima, temos $a_k, b_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

Aula 3: Exemplo: a função $f(x) = x$

♣ $f(x) = x = S_\inftyx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}$ tem saltos em $\pm\pi$:



♣ Pela formula temos $S_\infty[x](\pm\pi) = 0 \neq \pm\pi$

♣ Derivando: $f'(x) = 1 \neq S'_\inftyx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cos kx$ cuja soma não converge para qualquer x , pois $\cos kx$ não tende do 0 quando $n \rightarrow \infty$ (nota-se que $S'_\infty(x)$ não é a serie de Fourier de qualquer função por não satisfazer Riemann-Lebesgue).

♣ A razão destes problemas é o facto de S_n não convergir a $f(x) = x$ **uniformemente**.

Aula 3: Teoremas de convergências fortes

Teoremas de convergência uniforme e absoluta

Seja f uma função periodica de periodo 2π , continua em $[-\pi, \pi]$ tal que (i) $f(-\pi) = f(\pi)$ e (ii) f' é continua por partes em $[-\pi, \pi]$. Portanto a serie $S_\infty[f]$ converge uniformemente a f em $[-\pi, \pi]$. Alem disso, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|$ é convergente.

♣ No caso de $f(x) = x$ não se verifique (i) (i.e. a continuidade de f em \mathbb{R}). A mesma satisfaz o seguinte teorema:

Teoremas de convergência uniforme

Seja f uma função periodica de periodo 2π , \mathcal{C}^1 por parte em $[-\pi, \pi]$. Portanto a serie $S_\infty[f]$ converge uniformemente a f em qualquer intervalo fechado fora dos pontos de discontinuidade.

♣ Nota se que $S_\infty[f]$ nunca converge uniformemente num intervalo contindo um ponto de discontinuidade (pelo fenomeno de Gibbs).

Aula 4: M -test de Weierstrass

M -test de Weierstrass

Uma serie $\sum_{k=1}^n f_k$ converge uniformemente e absolutamente a f no conjunto S quando $n \rightarrow \infty$ se existe $(M_n)_{n \geq 1}$ tal que

- ▶ $f_k(x) \leq M_k \quad \forall x \in S$
- ▶ $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$.

♣ No caso da serie de Fourier, isto implica que $S_n[f]$ converge a f uniformemente e absolutamente em $[-\pi, \pi]$ se

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty \quad (\blacktriangle).$$

Aula 4: Diferenciação e Integração -1- condição em f

Teoremas de diferenciação termo-a-termo -1-

Seja f uma função periódica de período 2π , contínua em $[-\pi, \pi]$ tal que (i) $f(-\pi) = f(\pi)$ e (ii) f' é \mathcal{C}^1 por partes em $[-\pi, \pi]$.

Portanto a série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} i k c_k e^{ikx}$ converge puntualmente a $f'(x)$ nos pontos de continuidade e a $\frac{1}{2}(f'(x^+) + f'(x^-))$ senão.

Trabalho em casa 4

Assumindo que f' é \mathcal{C}^1 , demonstrar o teorema de convergência uniforme e absoluta utilizando a relação (\blacktriangle), a desigualdade de Bessel aplicada a f' e $\sum_k |a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_k a_k^2} \sqrt{\sum_k b_k^2}$.

Teoremas de integração termo-a-termo

♣ Seja f uma função periódica de período 2π , \mathcal{C}^1 por parte em $[-\pi, \pi]$. Portanto a série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_a^y c_k e^{ikx} dx$ converge uniformemente a $g(y) := \int_a^y f(x) dx$ em $[-\pi, \pi]$.

♣ Nota que não é dito que $S_\infty[g](x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_a^y c_k e^{ikx} dx$

Aula 4: Teoremas de diferenciação e Integração -2- condição em $S_\infty[f]$

Teoremas de diferenciação termo-a-termo

Se

- ▶ $S_\infty[f] = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge (uniformemente) a f em $[-\pi, \pi]$
- ▶ f_k é \mathcal{C}^1 em $[-\pi, \pi]$
- ▶ $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k$ converge uniformemente em $[-\pi, \pi]$,

então $S_\infty[f'](x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x) = f'(x)$ para $[-\pi, \pi]$.

Teoremas de integração termo-a-termo

Se

- ▶ $S_\infty[f] = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente a f em $[-\pi, \pi]$
- ▶ f_k é integrável em $[-\pi, \pi]$

então $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Aula 4: Aplicação à Eq. do Calor

♣ Lembramos que $u(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}$, com $B_n = 2 \int_0^1 \sin(n\pi x) f(x) dx$.

♣ Pelos teoremas o \sim torna-se $=$, ou seja, temos $u_t = \kappa u_{xx}$, se u , $(u_k)_t$ e $(u_k)_{xx}$ convergirem uniformemente quando $k \rightarrow \infty$.

Trabalho em casa 5

Considerando as series de Fourier e utilizando o M -test, demonstrar que $u_t = \kappa u_{xx}$, se u , $(u_k)_t$ e $(u_k)_{xx}$ convergem uniformemente.

Aula 4: Problema bem posto

Definição (Hadamard 1932)

Um modelo matemático ou uma equação é bem posto se

- ▶ **Existência**

- ▶ *Matemática*: existência de pelo menos uma solução
- ▶ Física: o sistema é observado num intervalo de tempo

- ▶ **Unicidade**

- ▶ *Matemática*: dada uma condição inicial, e de fronteira, existe uma unica solução
- ▶ Física: condições iniciais identicas para um sistema implica mesmo estado do sistema no tempo t

- ▶ **Continuidade**

- ▶ *Matemática*: a unica solução depende de maneira continua das CI, CF e parametros do modelo
- ▶ Física: pequenas variações nos dados implica pequenas variações no resultato

Aula 4: Unicidade

Unicidade da solução

Seja duas soluções u_1, u_2 . Tomando $v = u_1 - u_2$, temos $v_t = v_{xx}$ com $v(x, 0) = 0$ e $v(0, t) = v(1, t) = 0$ (\forall CI e CF). Logo $v = 0$ é uma solução.

♣ Define $V(t) = \int_0^1 v^2(x, t) dx \geq 0$.

Logo $\frac{d}{dt} V(t) = 2 \int_0^1 v(x, t) v_t(x, t) dx = 2 \int_0^1 v(x, t) v_{xx}(x, t) dx$.

♣ Integrando por partes, $\frac{d}{dt} V(t) = - \int_0^1 v_x^2(x, t) dx \leq 0$.

♣ Tomando $t = 0$, obtemos $V(0) = 0$. Logo $V(t) = 0, \forall t$ ou seja $v_x = 0$. Portanto $v(x, t) = v(0, t) = 0, \forall x$.

Aula 4: Outras condições de fronteira

Condição mista

Condição linear geral:
$$\begin{cases} \beta_1(0, t)u_x + \alpha_1 u(0, t) &= g_1(t) \\ \beta_2(1, t)u_x + \alpha_2 u(1, t) &= g_2(t) \end{cases}$$

Exemplo 1: $\beta_1 = \alpha_2 = 1, \beta_2 = \alpha_1 = 0$.

Problema de Sturm-Liouville: $X'' + \lambda X = 0$ com
 $X'(0) = X(1) = 0 \Rightarrow X_n = A_n \cos(\frac{2n-1}{2}\pi x), n \geq 1$.

Exemplo 2: $\beta_1 = \alpha_2 = 0, \beta_2 = \alpha_1 = 1$.

Problema de Sturm-Liouville: $X'' + \lambda X = 0$ com
 $X(0) = X'(1) = 0 \Rightarrow X_n = B_n \sin(\frac{2n-1}{2}\pi x), n \geq 1$.

Princípio de superposição

Seja $\mathcal{L}(u_i) = f_i$ em Ω , e $\mathcal{B}(u_i, \nabla u_i) = g_i$ em $\partial\Omega$, com \mathcal{L}, \mathcal{B} operadores lineares. Portanto (sumas finitas)

$$\mathcal{L}(\sum_i u_i) = \sum_i f_i \text{ em } \Omega, \text{ com } \mathcal{B}(\sum_i u_i, \sum_i \nabla u_i) = \sum_i g_i.$$

Aula 4: Generalisações

Exemplo 3: $\beta_1 = \beta_2 = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = 1, g_1 = 0$ e $g_2 = \text{cste} = u_1$. **Condição inicial:** $u(x, 0) = 0$.

♣ Resolvemos o problema estacionario não omogeneo:

$u''_E = 0$ em $(0, 1)$ com $u_E(0) = 0, u_E(1) = u_1$. Logo $u_E = u_1 x$.

♣ Mudança de variável: $v(x, t) := u(x, t) - u_E(x)$ é solução de $v_t = v_{xx}$ em $(0, 1)$ com $v(0, t) = v(1, t) = 0, t > 0$ e $v(x, 0) = -u_1 x$. Logo $v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}$, com $B_n = 2 \int_0^1 \sin(n\pi x) f(x) dx = -2u_1 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \frac{2u_1(-1)^n}{n\pi}$. Portanto a solução é $u = v + u_E$.

Trabalho em casa 6: Equação com fonte de Calor

Resolver a equação do Calor com fonte de calor: $u_t = u_{xx} + Q$ e condições de fronteira: $u(0, t) = u_0 = \text{cste}, u(1, t) = u_1 = \text{cste}$, e $u(x, 0) = f(x)$?

HINT. Proceder como no Exemplo 3 acima.

Aula 5: Equação em \mathbb{R}^n

♣ A equação geral é:

$$(\diamond) \quad \begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) &= Q(x, t) & \text{em } \mathbb{R}^n \times [0, T] \\ u(\cdot, 0) &= f & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}.$$

♣ Consideramos o caso sem fonte de calor ($Q = 0$), ou seja o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times [0, T] \\ u(\cdot, 0) &= f & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}.$$

♣ Ha un numero infinito de soluções, mas só uma é fisicamente amissível (i.e., com decrescência ao infinito):

$$\forall g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : u(x, t) = \sum_0^\infty \frac{g^{(k)}(t)x^{2k}}{(2k)!} \text{ solução de } u_t - u_{xx} = 0.$$

Exemplo: $g(t) = e^{-t^{-2}} \Rightarrow u(x, 0) = 0$. (i.e., $\sum_0^\infty g^{(k)}(0) \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 0$).

Aula 5: Solução em \mathbb{R}^n

Lembrando o caso 1d, tentamos uma solução do tipo:

$$u(x, t) = G(x, t) \star f(x) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} f(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$$

♣ Nota-se que o “Heat kernel”

$$G(x, t) := \begin{cases} (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{é singular em } (0, 0) \text{ e}$$

verifica $\lim_{t \rightarrow 0^+} G(x, t) = 0$ se $x \neq 0$, e $\int_{\mathbb{R}^n} G(x, t) dx = 1$.

♣ Portanto é obvio que u é uma solução e é smooth (i.e., $\in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$).

Trabalho em casa 7: Verificar $\partial_t G = \Delta G$ (para $t > 0$)

HINT. Utilizar o Laplaciano esferico para uma função radial.

Aula 5: Convergência à medida de Dirac em $t = 0$

Convergência distribucional

Temos $G(\cdot, 0) = \delta_0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \langle G(\cdot, t), \varphi \rangle \rightarrow \varphi(0), \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n),$

i.e.,

$G(\cdot - x_0, 0) = \delta_{x_0}$ no sentido das distribuições.

♣ Escrever $u(x_0, 0) = f(x_0)$ é como escrever $G(\cdot, 0) \star f = f$ ou seja $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} G(\cdot - y, t) f(y) dy = f$. Em termos precisos temos que demonstrar o seguinte resultado (mediante o Homework 7):

Lemma

$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x, t) = f(x_0),$ para qualquer ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

♣ Portanto, escreve se de forma compacta:

$$\begin{cases} \partial_t G(x, t) &= \Delta G(x, t) & \text{em } \mathbb{R}^n \times [0, T] \\ G(\cdot, 0) &= \delta_0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}.$$

Aula 6: Princípio de Duhamel -1- Princípio

♣ Observação: uma solução da ODE não linear

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + au(t) &= Q(t) & \text{em } \mathbb{R} \\ u(0) &= u_0 & \text{em } \{0\} \end{cases}, \text{ com } a \text{ constante é dada}$$

por $u(t) = e^{-at}u_0 + \int_0^t e^{-a(t-s)}Q(s)ds$,

ou seja a solução = propagador e^{-at} aplicado à condição inicial + propagador convoluido com o termo **não linear** Q .

♣ Seja a fonte de calor $Q = Q(x, t)$. Consideramos o problema (\diamond). Pelo princípio de superposição, consideramos primeiro (\diamond) com $Q = 0$ e depois (\diamond) com $f = 0$, e sumamos as duas soluções. Em relação à segunda, é suficiente demonstrar que o propagador é o Heat kernel. Esta ideia é devida a J.-M. Duhamel (1797-1872).

♣ Iremos então considerar a convolução (completa):

$$u(x, t) = G \star Q := \int_0^t \frac{1}{4\pi(t-s)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4(t-s)}} Q(y, s) dy ds.$$

Aula 6: Princípio de Duhamel -2- Caso do Calor

♣ A equação não omogenea é:

$$(\star) \begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) &= Q(x, t) & \text{em } \mathbb{R}^n \times [0, \infty] \\ u(\cdot, 0) &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases} .$$

♣ Consideramos o problema de Cauchy associado:

$$\begin{cases} \partial_t u(\cdot; s) - \Delta u(\cdot; s) &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times [s, \infty] \\ u(\cdot, s) &= Q(\cdot, s) & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{s\} \end{cases} ,$$

cuja solução é $u = u(x, t; s) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t - s) Q(y, s) dy$.

♣ Portanto $u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s) ds, (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$ (♠)
é solução de (★)

Aula 6: Princípio de Duhamel -3- Teorema

♣ DEF. $u \in \mathcal{C}_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \iff u(\cdot, t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n), \forall 0 < t < \infty$
and $u(x, \cdot) \in \mathcal{C}^1(0, \infty), \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema

Seja $Q \in H := \mathcal{C}_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$. Este $u \in H$ (♠) (i) pertence á $\mathcal{C}_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ e (ii) é solução do problema não omogeneo em \mathbb{R}^n com condição inicial $u_0 = 0$.

Alem disso, temos $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x, t) = 0$.

♣ DEM. (i) Regularidade: mudança de variável pois que G é singular em $y = x$ e $s = t$. Portanto $z = x - y$ e $\tau = t - s \Rightarrow u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t - s) Q(y, s) dy ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(z, \tau) Q(x - z, t - \tau) dz d\tau$. Segue da regularidade de Q em x e t .

Parte (ii) similar à demonstração do lema anterior.

Aula 6: Equação em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: Existência -1-

♣ Seja o domínio Ω Lipschitziano e limitado. Consideramos

$$\partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t) + Q \text{ em } \Omega \times [0, T] \text{ (■)}, \text{ com}$$

- ▶ Dirichlet BC: $u(\cdot, t) = u_0(t)$ em $\partial_D \Omega \subset \Omega$
- ▶ Neumann BC: $\partial_N u(\cdot, t) := \nabla u(\cdot, t) \cdot N = g(t)$ em $\partial_N \Omega \subset \Omega$
- ▶ Robin BC: $\beta \partial_N u(\cdot, t) + u(\cdot, t) = h(t)$ em $\partial_R \Omega \subset \Omega$,

onde $\partial \Omega = \partial_D \Omega \cup \partial_N \Omega \cup \partial_R \Omega$.

♣ Vamos considerar só a CF de Dirichlet omogeneo.

Trabalho em casa 8. Estimativa

Demonstrar que se $u(x, t)$ é solução de (■) com CF de Dirichlet omogeneo e dado inicial $u(x, 0) = f(x)$ bastante regular em Ω e $Q(x, t)$ bastante regulares em $\Omega \times]0, T[$, temos $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} f^2(x) dx + \int_0^t \int_{\Omega} Q(x, s) u(x, s) dx ds. \end{aligned}$$

Escrever esta relação com a estrutura de L^2 .

Aula 6: Equação em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: Existência -2-

♣ Pela estimativa acima (i.e., do Homework 8), vemos que o espaço funcional de $u(\cdot, t)$ é $H_0^1(\Omega)$, pelo que vamos reescrever u como $u :]0, T[\rightarrow H_0^1(\Omega), t \mapsto u(t) \in H_0^1(\Omega)$.

Formulação fraca (J.-L. Lions: 1928-2001)

Seja $v \in H_0^1(\Omega)$. Multiplicando (■) por v e integrando por partes,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla v(x, t) dx = \int_{\Omega} Q(x, t) v(x) dx.$$

♣ A mesma reescreve-se como uma ODE: procura-se $u(t)$ uma função em $]0, T[$ com valores em $H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(\square) \begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t), v)_{L^2(\Omega)} + a(u(t), v) &= (Q(t), v)_{L^2(\Omega)}, \\ &\forall v \in H_0^1(\Omega), 0 < t < T, \\ u(0) &= f \end{cases}$$

onde $a(v, w) := \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla w(x) dx$ e u é continua em 0.

Aula 6: Equação em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: Existência -3-

Espaços funcionais

Seja X Banach sobre Ω , norma $\|\cdot\|_X$. Portanto $v \in \mathcal{C}^k([0, T]; X)$

$$\clubsuit \Leftrightarrow \|v\|_{C^k([0, T]; X)} := \sum_{m=0}^k \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{d^m v}{dt^m}(t) \right\|_X \right) < \infty.$$

$$\clubsuit v \in L^2(]0, T[; X) \Leftrightarrow \|v\|_{L^2([0, T]; X)}^2 := \int_0^T \|v(t)\|_X^2 dt < \infty.$$

$$\clubsuit H \text{ Hilbert} \Rightarrow L^2([0, T]; H) \text{ Hilbert onde}$$

$$\langle u, v \rangle_{L^2([0, T]; H)} := \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_H dt.$$

Derivada com o tempo no sentido fraco

A partida $(u(t), v)_{L^2(\Omega)}$ não é diferenciável.

\clubsuit Contudo, se for em $L^2[0, T]$, tem um sentido fraco:

$$(u(t), v)_{L^2(\Omega)} \in H^{-1}(0, T) := (H_0^1(0, T))'. \text{ Temos } \forall \phi \in H_0^1(0, T),$$

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u(t), v)_{L^2(\Omega)}, \phi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} = - \int_0^T (u(t), v)_{L^2(\Omega)} \frac{d\phi}{dt}(t) dt.$$

Aula 7: Equação em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: Preliminares

Espacios funcionais Hilbertianos (i.e., de Hilbert)

♣ Consideramos H, V Hilbertianos tais que $H \subset V$ com injeção compacta, com H denso em V , i.e., para qualquer sequência limitada em H , existe uma sub-sequência convergente em V .

Forma simétrica, bilinear continua e coerciva

♣ Seja $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a(u, v) = a(v, u)$ e para a qual existem M e m tais que $|a(u, v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V$ (continuidade) e $|a(u, v)| \geq m\|u\|_V\|v\|_V$ (coercividade), $\forall u, v \in V$.

Problema aos valores próprios (ou espectral)

Encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in H \setminus \{0\}$ tais que $a(u, v) = \lambda(u, v)_V$, $\forall v \in V$.

Aula 7: Equação em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: Existência -4-

Espaço de energia: $V = L^2(\Omega)$, $H = H_0^1(\Omega)$: $H \subset V$

♣ Pelo teorema de Rellich, $H \subset V$ com injeção compacta, e H denso em V , pois que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \subset H$ é denso em V .

Pelo Homework 8, $f \in V$, $Q \in L^2([0, T[; V)$, e

$u \in E_H^V := L^2([0, T[; H) \cap \mathcal{C}([0, T]; V)$: espaço de energia.

Teorema de existência de uma solução fraca; formulação geral

Seja $H \subset V$, dois espaços de Hilbert. Seja $a(u, v)$ uma forma simétrica, bilinear, contínua e coerciva em H . Seja $T > 0$, $f \in V$ e $Q \in L^2([0, T[; V)$. Portanto o problema (\square) tem uma solução única em E_H^V , e existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2([0, T[; H)} + \|u\|_{\mathcal{C}([0, T]; V)} \leq C (\|f\|_V + \|Q\|_{L^2([0, T[; V)}) \quad (\blacktriangle).$$

♣ O limite superior (\blacktriangle) mostra a continuidade da solução com respeito aos dados, pelo que o problema encontra-se bem posto no sentido de Hadamard.

Aula 7: Equação em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: Existência -5-

DEMONSTRAÇÃO: Em 5 etapas.

1º passo: teorema preliminar: Teorema Espectral

Seja $a(\cdot, \cdot)$ uma forma simétrica, bilinear, contínua e coerciva em H Hilbert, pelo que $a(\cdot, \cdot)$ é um produto escalar para H . Portanto existem $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ e uma base ortonormal $(u_k)_{k \geq 1} \in H$ de V , tal que $a(u_k, v) = \lambda_k(u_k, v)_V, \forall v \in H$.

♣ Também $(\tilde{u}_k := u_k / \sqrt{\lambda_k})$ base ortonormal de H para $a(\cdot, \cdot)$.

2º passo: candidato explícito

Pelo teorema espectral sabemos que $\exists u_k \in H, \lambda_k > 0$ s.t.

$$a(u_k, v) = (\lambda_k, u_k)_V \quad \forall v \in H.$$

♣ Supomos que $u \in E_H^V$ é solução. Portanto

$u(t) = \sum_{k \geq 1} (u(t), u_k)_V u_k$ é a decomposição de $u(t)$ na base Hilbertiana $(u_k)_{k \geq 1} \in H$. Pelo teorema espectral, temos que

$u(t) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\lambda_k} a(u(t), u_k) u_k = \sum_{k \geq 1} a(u(t), \tilde{u}_k) \tilde{u}_k$ é a decomposição ortogonal de $u(t)$ em \tilde{H} .

Aula 7: Equação em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: Existência -6-

♣ Seja $\boxed{\alpha_k(t) := (u(t), u_k)_V \in \mathcal{C}([0, T])}$,
 com $\alpha_k^0 := (f, u_k)_V \in \mathbb{R}$ t.q. $f = \sum_{k \geq 0} \alpha_k^0 u_k$,
 e $\beta_k(t) := (Q(t), u_k)_V \in L^2(]0, T[)$ t.q. $Q(t) = \sum_{k \geq 0} \beta_k(t) u_k$.

♣ Tomando $v = u_k$ em (\square) :
 $\frac{d}{dt}(u(t), u_k)_V + a(u(t), u_k) = (Q(t), u_k)_V$, ou seja pelo teorema
 espectral, $\dot{\alpha}_k + \lambda_k \alpha_k = \beta_k$, cuja solução é

♣ $\boxed{\alpha_k(t) := \alpha_k^0 e^{-\lambda_k t} + \int_0^t \beta_k(s) e^{-\lambda_k(t-s)} ds}$
 com $\alpha_k(0) = \alpha_k^0$.

Idea principal

Vamos mostrar que $u(t) := \sum_{k \geq 1} \alpha_k(t) u_k$ é a única solução fraca.

Aula 7: Equação em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: Existência -6-

3º passo: $w^m(t) := \sum_{k=1}^m \alpha_k(t) u_k$ de Cauchy em $\mathcal{C}([0, T]; V)$,

i.e., $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \|w^m(t) - w^n(t)\|_V = 0$? ♣ $\|w^m(t) - w^n(t)\|_V \leq$

$$\left\| \sum_{k=m+1}^n \alpha_k^0 e^{-\lambda_k t} u_k \right\|_V + \left\| \sum_{k=m+1}^n \int_0^t \beta_k(s) e^{-\lambda_k(t-s)} ds u_k \right\|_V \leq$$

(pois que $\|\cdot\|_V = (\|\cdot\|_V^2)^{1/2}$ e utilizando $(u_k, u_l)_V = \delta_{kl}$)

$$\left(\sum_{k=m+1}^n |\alpha_k^0|^2 e^{-2\lambda_k t} \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=m+1}^n \left(\int_0^t \beta_k(s) e^{-\lambda_k(t-s)} ds \right)^2 \right)^{1/2}$$

e para m, n bastante grande, por Cauchy-Schwartz, e $\lambda_1 \leq \lambda_k \forall k$,

$$\leq \left(\sum_{k=m+1}^n |\alpha_k^0|^2 \right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2\lambda_1}} \left(\sum_{k=m+1}^n \int_0^T |\beta_k(s)|^2 ds \right)^{1/2} \rightarrow 0,$$

visto que

$$\|f\|_V^2 = \sum_{k \geq 1} |\alpha_j^0|^2, \|Q\|_{L^2([0, T]; V)}^2 = \sum_{k \geq 1} \|\beta_k\|_{L^2(0, T)}^2 < \infty.$$

Aula 7: Equação em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: Existência -7-

4º passo: $w^m(t)$ de Cauchy em $L^2([0, T[; H)$,

i.e., $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_0^T \|w^m(t) - w^n(t)\|_H^2 dt = 0$? Seja H com norma a .

$$(\star) \ a(w^m(t) - w^n(t), w^m(t) - w^n(t)) = \sum_{k=m+1}^n \lambda_k |\alpha_k(t)|^2 \leq$$

$$2 \sum_{k=m+1}^n \lambda_k |\alpha_k^0|^2 e^{-2\lambda_k t} + 2 \sum_{k=m+1}^n \lambda_k \left(\int_0^t \beta_k(s) e^{-\lambda_k(t-s)} ds \right)^2.$$

$$\clubsuit (1) \int_0^T 2\lambda_k |\alpha_k^0|^2 e^{-2\lambda_k t} dt = |\alpha_k^0|^2 (1 - e^{-2\lambda_k T}) \leq |\alpha_k^0|^2.$$

\clubsuit De outro lado, por Cauchy-Schwartz:

$$\lambda_k \left(\int_0^t \beta_k(s) e^{-\frac{1}{2}\lambda_k(t-s)} e^{-\frac{1}{2}\lambda_k(t-s)} ds \right)^2 \leq \int_0^t |\beta_k(s)|^2 e^{-\lambda_k(t-s)} ds.$$

Aula 7: Equação em \mathbb{R}^n : Existência -8-

$$\clubsuit (2) \text{ Por Fubini: } \int_0^T \left(\int_0^t |\beta_k(s)|^2 e^{-\lambda_k(t-s)} ds \right) dt = \int_0^T |\beta_k(s)|^2 \left(\int_s^T e^{-\lambda_k(t-s)} dt \right) ds \leq \frac{1}{\lambda_k} \int_0^T |\beta_k(s)|^2 ds.$$

$$\clubsuit \text{ Logo, por (1) e (2), e } (\star): \int_0^T \|w^m(t) - w^n(t)\|_H^2 dt \leq \sum_{k=m+1}^n \left(|\alpha_k^0|^2 + \frac{2}{\lambda_1} \int_0^T |\beta_k(s)|^2 ds \right) \rightarrow 0.$$

3º e 4º passos: $w^m \rightarrow u \in E_H^V$.

Logo, u é solução de (\square) com $v = u_k$, e portanto por qualquer $V \in H$ pois que $(u_k/\sqrt{\lambda_k})$ é uma base Hilbertiana de H .

5º passo: estimativa (\blacktriangle).

$$m = 0 \text{ (3º e 4º)} \Rightarrow \sup_{0 \leq t} \|w^n\|_V \leq \|f\|_V + \frac{1}{\sqrt{2\lambda_1}} \|Q\|_{L^2([0,T];H)} \text{ e } \int_0^T a(w^n(t), w^n(t)) dt \leq \|f\|_V + \frac{1}{\lambda_1} \|Q\|_{L^2([0,T];H)}. \text{ Fazer } n \rightarrow \infty.$$

Aula 7: Equação em \mathbb{R}^n : Existência -9-

REM 1: Dirichlet não omogeneo: $u(t) = g(t) \in L^2(\partial\Omega)$ em $\partial\Omega \times [0, T]$.

Seja $\tilde{u} \in H^1(\Omega \times]0, T[)$ t.q. $\text{tr} \tilde{u} = g$ em $\partial\Omega$, e tomar $v = u - \tilde{u}$.

REM 2: Base Hilbertiana a $n = 1$.

A uma dimensão, temos $u_k = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$ e $\lambda_k = \pi^2 k^2$. Portanto encontra-se a solução em termos de series de Fourier.

Trabalho em casa 7: Conservação de energia

Demonstrar que existe uma solução em $E_{H_0^1(\Omega)}^{L^2(\Omega)}$ de (■) com CF de Dirichlet omogeneo e dado inicial $u(x, 0) = f \in L^2(\Omega)$ e fonte de Calor $Q \in L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$ tal que $\forall t \in [0, T]$:

$$\frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(]0, T[; L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|Q\|_{L^2(]0, T[; L^2(\Omega))}^2.$$

HINT. Utilize o lema de Gronwall e o facto de

$$\int u \cdot v dx \leq \left(\int u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \left(\int u^2 dx + \int v^2 dx \right).$$

Aula 7: Equação em \mathbb{R}^n : Regularidade -2-

♣ Consideramos todas as hipóteses do teorema de existência.

Teorema de Regularidade 1: $Q \in L^2(\Omega \times]0, T[)$.

Se $f \in H_0^1(\Omega)$ então a solução é mais regular, i.e. $u \in E_{H^2(\Omega)}^{H_0^1(\Omega)}$ e

$$\partial_t u \in L^2(]0, T[; L^2(\Omega)) = L^2(\Omega \times]0, T[)$$

(a isometria demonstra-se).

Passagem da formulação fraca a forte.

Pois que $\partial_t u, \Delta u \in L^2(\Omega \times]0, T[)$, temos

$$\int_{\Omega} (\partial_t u - \Delta u - Q) v dx = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ e por quase todos os } t \in]0, T[\Rightarrow \partial_t u - \Delta u - Q = 0 \text{ a.e. em } \Omega \times]0, T[.$$

Aula 8: Equação em \mathbb{R}^n : Regularidade -3-Teorema de Regularidade 2: $Q = 0$.

Seja $\Omega \in \mathcal{C}^\infty$. A solução de (■) pertence a $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega} \times [\epsilon, T])$, $\forall \epsilon > 0$.

♣ (DEM. formal) Seja $v^k := \frac{\partial^k u}{\partial t^k}$, portanto:

$$\begin{cases} \partial_t v^k(x, t) - \Delta v^k(x, t) &= 0 & \text{em } \Omega \times [0, T] \\ v^k(x, t) &= 0 & \text{em } \partial\Omega \times [0, T] \\ v^k(\cdot, 0) &= \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0) & \text{em } \Omega \times \{0\} \end{cases}.$$

Supomos que $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0) \in L^2(\Omega)$, pelo teorema de existência,

$v^k \in E_{H_0^1(\Omega)}^{L^2(\Omega)}$. Logo $u(x, \cdot) \in \mathcal{C}^k([\epsilon, T])$. D'outro lado,

$v^k = (\Delta)^k u \Rightarrow u(\cdot, t) \in H^k(\Omega)$, $\forall k > 0$. (Nota $\cap_k H^k = \mathcal{C}^\infty$).

♣ Problema: regularidade de $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0)$...para isso consideramos

$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, \epsilon)$ que sabemos estar em $L^2(\Omega)$ pelo Teorema de Regularidade 1.

Aula 8: Equação em \mathbb{R}^n : Princípios do máximo -1-

Idea principal.

Lembramos que em \mathbb{R}^n , $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t - s)u(y, s)dy$ (tomando a CI em $t = s$), com $\int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t - s)dy = 1$.

Portanto, em (x, t) efetuamos uma media espacial dos valores em qualquer tempo anterior $s < t$, pelo que o máximo espacial tem tendência a decrescer no tempo (pelo absurdo, se for crescente, toma $(x, t) = (x_0, t)$ o máximo espacial em t , portanto no tempo $s < t$, $|u(y, s)| \leq u(x_0, t)$ e $u(x, t)$ não pode ser dado por uma media em $s \dots$).

♣ Seja $U_T := \Omega \times (0, T]$ e $\partial^* U_T = \partial\Omega \times (0, T] \cup \Omega \times \{0\}$, com Ω limitado.

♣ Já sabemos pelo teorema de regularidade que se f, Q forem bastante regulares, u será mais regular ainda, por exemplo, em $C := \mathcal{C}_1^2(U_T) \cap \mathcal{C}(\bar{U}_T)$.

Aula 8: Equação em \mathbb{R}^n : Princípios do máximo -2-

Princípios do máximo: $\partial_t u - \Delta u = 0$ in U_T , $u \in C$.

- ▶ Princípio fraco: $\partial_t u - \Delta u \begin{cases} \leq 0 \\ \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max_{\bar{U}_T} u = \max_{\partial^* U_T} u \\ \min_{\bar{U}_T} u = \min_{\partial^* U_T} u \end{cases}$
- ▶ Princípio forte: Ω connexo e $\exists (x_0, t_0) \in U_T$ t.q.
 $u(x_0, t_0) = \max_{U_T} u \Rightarrow u = \text{cst em } \bar{U}_{t_0}$

♣ Conforme a intuição se estiver uma fonte de Calor positiva, e se as condições iniciais e de fronteira forem positiva, então a temperatura é sempre positive em todos os pontos.

Corollario—princípio fraco.

$Q, f, g \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$ em \bar{U}_T .

Aula 8: Equação em \mathbb{R}^n : Princípios do maximo -3-

DEM-princípio fraco.

Seja $\partial_t u \leq \Delta u$ e seja $T_\epsilon := T - \epsilon, v = u - \epsilon t, \epsilon > 0$. Portanto $\partial_t v < \Delta v$. Pela compacidade de \bar{U}_{T_ϵ} e a continuidade da solução, existe um maximo de v em $(x_0, t_0) \in \bar{U}_{T_\epsilon}$.

♣ Assumimos que $(x_0, t_0) \notin \partial^* U_{T_\epsilon}$. Neste ponto, (i)

$\partial_t v(x_0, t_0) \geq 0$ (este valor é bem definido, sendo $t_0 < T$), pois que pelo contrario teriamos $v(x_0, t_0 - \delta) \geq v(x_0, t_0), \delta > 0$. D'outro lado temos tambem (ii) $\Delta v(x_0, t_0) \leq 0$, visto que as derivadas segundas são negativas no maximo. Chegamos a uma contradição, pelo que $(x_0, t_0) \in \partial^* U_{T_\epsilon}$ maximisa $u(x) - \epsilon t$.

♣ Deixando $\epsilon \rightarrow 0$, temos o resultado.

Contro-exemplo para $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Toma $u(x, t) = \sum_0^\infty \frac{g^{(k)}(t)x^{2k}}{(2k)!}$ com $g(t) = e^{-t^{-2}}$. Então

$u(\cdot, 0) = 0$ e $\max u > 0$.