

Mecânica racional

Aulas teóricas

Docente: Nicolas Van Goethem

vangoeth@fc.ul.pt,
Sala 6.2.20.

June 8, 2018

As 3 componentes do curso

Parte teorica

Apreender os conceitos, as ferramentas. (Com slides e quadro).

Parte practica

Fazer contas, exercicios. Complemento da parte teorica. (Em pequenos grupos, com desempenho dos alunos ao quadro).

Avaliação

Fim do semestre (oral ou escrito?). Avaliação intermedia?
Trabalhos individuais de aprofundamento da materia. Trabalhos individuais de resolução exercicios (homework).

Conteúdo das aulas teóricas

- ▶ Aula 1: Estória da disciplina, Mecânicos famosos (26/2)
- ▶ A. 2: Conceitos, Cinemática, Movimento em \mathbb{R}^N (01/3)
- ▶ A. 3: Dinâmica, Leis de Newton (5/3)
- ▶ A. 4: Campo central, leis de conservação (08/3)
- ▶ A. 5-6: Dinâmica do ponto e movimentos conservativos com 1 grau de liberdade, estudo do pendulo (12/3 e 15/3)
- ▶ A. 7-9: Dinâmica de N corpos (19 a 26/3 e 05/04)
- ▶ A. 10: Colisões, problemas de alvos-projéteis (12/4)
- ▶ A. 11: Trabalhos virtuais em statica (16/4)
- ▶ A. 11: Trabalhos virtuais em dinâmica (19/4)
- ▶ A. 12-13: Mecânica de Lagrange em sistemas (23/4 a 30/4)
- ▶ A. 14, 15 e 16: Calculo de variações(03/05)
- ▶ A. 14, 15 e 16: Transformada de Legendre (07/05)
- ▶ A. 17-18: Formalismo de Hamilton (10-14/05)
- ▶ A. 19: Formalismo de Poisson (17-21/05)

Referências bibliograficas

- ▶ V. Arnold: Mathematical Methods of Classical Mechanics
- ▶ **M. Lunn: A first course in Mechanics**
- ▶ **R. Gregory: Classical mechanics**
- ▶ **N. Rouche: Mécanique rationnelle**

As 3 componentes da disciplina

Observação

A observação do mundo exterior (o “que”) é seguida do questionamento (o “como”).

Experimentação

Melhoria do quotidiano.

Mecânica vem do grego “mêchhanê”, a **máquina**. Para os gregos a mecânica permite de **superar a natureza**.

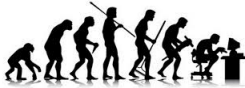
Mais recentemente: permite de perceber os fenómenos e de validar as hipóteses.

Conceptualização

Permite formalizar os fenómenos e fazer argumentação lógica.

Nascimento de teorias ou de “modelos”: de Newton, da relatividade de Einstein/Poincaré/Lorenz, da mecânica quântica.

Nascimento



★ Estória da Mecânica é estória do Homo (e é estória do pensamento)

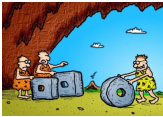


★ Sobrevivência → Encontrar
“truques” → Evolução das **ferramentas**



★ Descobertas de
vários **mecanismos** e
movimentos
(= Mecânica)

Desenvolvimento 1 (Mesopotâmia, Egito)



★ Como reduzir o **atrito**?



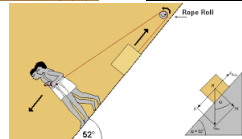
★ Primeira roda é cheia ~ 3000 BC (Slovenia)



★ Carro com 4 rodas ~ 2600 BC (Mesopotâmia).



★ Pirâmide de Kheops (~ 2600 BC)



★ Truques para transportar blocos de 3 toneladas?

Plano inclinado, rotas com inclinação mínima, sistema de polias ...

Desenvolvimento 2(Grego-Romano)

ief-restaure-a-Kouyunjik-Assyrie-700-avant-JC-2.png íef-restaure-a-Kouyu

★ Basso relíevo asiriano (~ 700 BC).

Mecânica=**Ciência das máquinas**: utilização de troncos, alavancas, cordas, carros com rodas " modernas "...

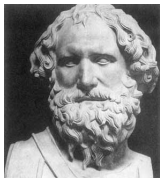


★ Carro romano. Na agricultura, a **energia** é fornecidas pelos animais.

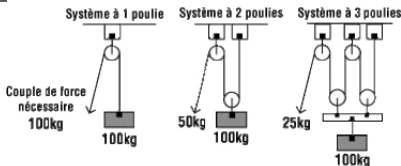


★ O cavalo é mais rapido mas tem menos **potência** do que o boi.

Mecânicos famosos 1: Arquimedes



~ 287-212 BC. Syracuse
(Sicilia), Alexandria (Grecia).



♣ A regra de ouro das máquinas: como diminuir as **forças**?
(formalizado mais tarde por Heron de Alexandria ~ 50 AC).

♣ Primeiro cientista a prestar atenção à teoria bem como à
experimentação.

♣ Método do **passagem ao limite**.

♣ **Empuxo** de Archimedes (fluidos).

Mecânicos famosos 2: Leonardo da Vinci



~ 1452-1519. Firenze (Itália).

♣ Não é bem um teorico, mas sim um artista, um inventor.



- ★ Concepção de máquinas e mecanismos. Estudo do movimento.
- ★ Primeiras máquinas voadoras.
- Máquinas de guerra.



- ★ Observação do voo dos pássaros (mecanismo das asas).
- ★ Estudo da turbulência nos fluidos.

Mecânicos famosos 3: Nicolau Copérnico



~ 1473-1543. Polonha.

♣ Observe incoerências na **observação** das trajetórias dos planetas.

↗ Propõe o heliocentrismo.

♣ Revolução "Copernicana" = do pensamento.

♣ Abordagem "moderna":

▲ **Axiomas**: no texto *Commentariolus*

▲ **Provas** matemáticas: no texto *De Revolutionibus*



Mecânicos famosos 4: Galileo Galilei



~ 1564-1642. Pisa (Itália).



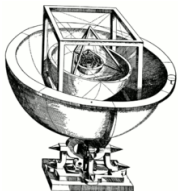
★ Experimentação das oscilações do pendulo.

- ▲ Inventor da bomba de agua.
- ▲ MRUV: *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado*.
- ▲ Trajetórias parabólicas de projectis.
- ▲ **Provas experimentais da teoria de Copérnico:** invenção do telescópio e observação dos satélites de Júpiter e fases de Vênus, etc ...

Mecânicos famosos 4: Johannes Kepler



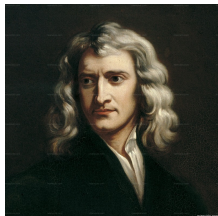
~ 1571-1630. Alemanha.



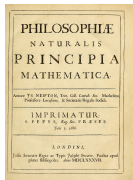
★ O sistema solar segundo Kepler
(baseado em poliedros).

- ▲ Trajetórias elípticas dos planetas
(em *Astronomia Nova*, 1609)
- ▲ Princípios de Optica.
- ▲ Problema de 2 corpos
(solução analítica).
- ▲ Conjetura de Kepler (problema de
matemática). Densidade de esferas
(demonstrado apenas em 2014).

Mecânicos famosos 6: Isaac Newton



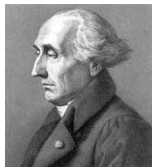
~ 1642-1727. Inglaterra.



★ *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687) ⇒ Origem da Mecânica moderna, "racional", "classica".

- ▲ A partir de Kepler: força centrífuga, lei em $1/d^2$
- ▲ Princípios de Optica (natureza corpuscular da luz, difracção).
- ▲ Lei da Gravitação, conceito de peso (*gravitas* = gravidade).
- ▲ **As 3 leis do movimento.**

Mecânicos famosos 7: Joseph-Louis Lagrange



~ 1736-1813. Itália, França

MÉCHANIQUE

ANALITIQUE

Par M. JOSEPH-LAGRANGE, de l'Académie des Sciences de Paris,
de celle de Berlin, de Pologne, de Turin, &c.



A PARIS,

Chez M. VASSEUR DESAINTE, Libraire,
rue de Fite St. Jacques.

M. DCC. LXXXVIII

Appr. par l'Académie des Sciences de Paris.

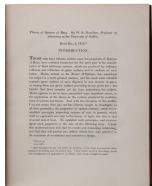
- ★ Invenção do formalismo da mecânica racional, *analítica*.
- ★ Considera a Mecânica como um ramo plenamente da matemática.

- ▲ Calculo das variações
- ▲ Princípio de mínima acção.
- ▲ O Lagrangiano, os multiplicadores de Lagrange.
- ▲ Mecânica celeste, problema dos 3 corpos.

Mecânicos famosos 8: William Rowan Hamilton



~ 1805-1865. Irlanda.



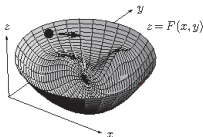
★ *Theory of Systems of Rays: teoria ondulatoria da luz* (1828).

★ Propõe um funcional que unifica ótica, mecânica e matemática.

▲ O princípio variacional de Hamilton permite uma nova formulação da teoria da Mecânica e permite resolver as equações de movimento, como o problema de 3 corpos.

▲ Origem da Mecânica quântica.

Mecânicos famosos 9: Henri Poincaré



~ 1854-1912. França



- ★ *Science et hypothèse* (1902).
- ★ Origem da teoria da relatividade restrita.

▲ Introduz a noção de onda gravitacional.

▲ Corrigiu incoerências observada com Mercúrio.

▲ Problema de 3 corpos:
Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste.

▲ Início do estudo qualitativo das equações diferenciais.

Princípio de relativismo e de determinismo

O espaço e o tempo

O espaço é Euclidiano de dimensão 3, o tempo é de dimensão 1.

O princípio de relativismo

- ▶ As Leis da Natureza são iguais em qualquer instante e em todos os *referenciais* (ou "*sistemas de coordenadas*") *inerciais* (R.I.) (cf. Newton 1).
- ▶ Existência é postulada: existe pelo menos um R.I. onde nenhuma força atua sobre uma massa pontual. A mesma tem portanto uma velocidade constante ("uniforme").
- ▶ Todos os sistemas em movimento relativo de **traslação uniforme** com respeito a um R.I. são também inerciais.

Princípio de determinismo de Newton

O estado inicial de um sistema define de modo único o seu movimento futuro. Também chamado "princípio de **causa-efeito**".

Grupo de Galileo

Espaço Afim \mathbb{A}^n

A origem não é fixada (vs. \mathbb{R}^n). Grupo das translações de \mathbb{R}^n sobre \mathbb{A}^n : $(a, \vec{v}) \rightarrow b := a + \vec{v} \in \mathbb{A}^n$, $a \in \mathbb{A}^n$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Soma não é definida, ao contrario da diferença: $b - a = \vec{v}$. (★)

A estrutura espacio-temporal de Galileo

- ▶ O Universo $X \sim \mathbb{A}^4$. Elementos de X = "acontecimentos".
- ▶ O tempo: $t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{R}^4 : translações de X): aplicação linear. O núcleo de t =translações **simultaneas**.
- ▶ A distância entre 2 acontecimentos simultaneos: $\|x - y\|_{\mathbb{R}^3}$.

Transformação de Galileo

Transformação afim de \mathbb{A}^4 que conservam intervalos de tempo e distâncias de acontecimentos simultaneos. (★)

Cinemática e dinâmica

Cinemática

Estudo descritivo do movimento (sem se preocupar das suas causas).

↪ Posição, velocidade, aceleração, trajetória.
Dados num referencial inercial (ou não).

Dinâmica

Teoria explicativa dos movimentos.

↪ Quais são as causas (= as forças)

Movimento em \mathbb{R}^N

Movimento

Aplicação diferenciável $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Velocidade: $v(t_0) = \dot{x}(t_0) := \frac{d}{dt}x(t_0)$.

"velocity" vector v ; "speed" $\|v\|_E$

Aceleração: $a(t_0) = \ddot{x}(t_0) = \frac{d^2}{dt^2}x(t_0)$.

$\text{Im}(x) =$ **trajetória** de \mathbb{R}^N .

$\text{Gr}(x) = \{t, x(t)\} =$ **linha de Universo**.

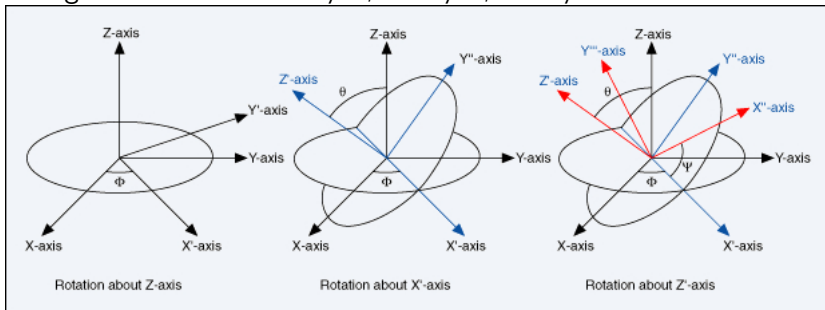
O movimento de N pontos

Definido como N linhas de Universo num Espaço de Galileo.

$$X : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}^3)^N$$

Movimento rígido

- ▶ Toma 3 pontos não alinhados P_1, P_2, P_3 :
 $t \mapsto d(P_i(t), P_j(t)) = \|P_i(t) - P_j(t)\| = cst, \forall t, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j.$
- ▶ 9 incógnitas: $(x_k(P_i))$, $k, i = 1, 2, 3$, mas apenas 6 são independentes (x_k = componente k da posição x).
- ▶ Movimento rígido = 1 Translação (3) + 1 Rotação (3).
- ▶ 3 Ângulos de Euler: Precessão, Rotação, Nutação



Velocidade angular ou vector de rotação instantânea

- ▶ $\mathcal{B}_0 = \{0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ (referencial Cartesiano fixo) e $t \mapsto \mathcal{B}(t) = \{O(t), \underline{g}_1(t), \underline{g}_2(t), \underline{g}_3(t)\}$ (referencial variável).
- ▶ Teorema: Existe unica velocidade angular $\vec{\omega}$ t.q. $\mathcal{B}(t) =$ roto-translação de \mathcal{B}_0 : $\vec{\omega}(t) = \omega_k(t) \underline{g}_k(t) (= \sum_{k=1}^3 \omega_k(t) \underline{g}_k(t))$ onde $\omega_1 = \dot{\underline{g}}_2 \cdot \underline{g}_3$, $\omega_2 = \dot{\underline{g}}_3 \cdot \underline{g}_1$, $\omega_3 = \dot{\underline{g}}_1 \cdot \underline{g}_2$ verifique $\frac{d}{dt} \underline{g}_i(t) = \vec{\omega}(t) \times \underline{g}_i(t)$.
- ♣ Seja $u(t) = u_i(t) \underline{g}_i(t) (= \sum_{i=1}^3 u_i(t) \underline{g}_i(t))$ uma função vetorial exprimida na base movél. Então, temos pelo teorema: $\frac{d}{dt} u(t) = \dot{u}_i(t) \underline{g}_i(t) + u_i \frac{d}{dt} \underline{g}_i(t) = \dot{u}_i(t) \underline{g}_i(t) + \vec{\omega}(t) \times u(t)$.
- ▶ Definição:
A derivada **relativa** de $u(t)$ é $\frac{d}{dt} u(t)|_{\mathcal{B}(t)} := \dot{u}_i(t) \underline{g}_i(t)$ (=derivada para um observador na base movél).
A derivada **absoluta** de $u(t)$ é $\frac{d}{dt} u(t)|_{\mathcal{B}_0} = \frac{d}{dt} u(t)|_{\mathcal{B}(t)} + \vec{\omega}(t) \times u(t)$ (=derivada para um observador na base fixa).

Velocidad absoluta e relativa -1- ponto fixo na base móvel

- ▶ Velocidade **absoluta** $v(P(t))|_{\mathcal{B}_0}$ (ou seja, relativa ao referencial \mathcal{B}_0) de $P(t)$ relativamente a 0: temos que derivar no tempo $\overrightarrow{0P}(t) = P(t) = \overrightarrow{0O}(t) + \overrightarrow{OP}(t)$ onde $\overrightarrow{OP}(t) = y_i \underline{g}_i(t)$ é exprimida em $\mathcal{B}(t)$ (nota: y_i por enquanto não depende de t).
- ♣ Por $v(P(t))|_{\mathcal{B}_0} := \frac{d}{dt} \overrightarrow{0P}(t)|_{\mathcal{B}_0}$ e $v(O(t))|_{\mathcal{B}_0} := \frac{d}{dt} \overrightarrow{0O}(t)|_{\mathcal{B}_0}$, a velocidade absoluta de $P(t)$ relativamente a 0 é $v_T(P) := v(P(t))|_{\mathcal{B}_0} = v(O(t))|_{\mathcal{B}_0} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}(t)$, sendo

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{OP}(t)|_{\mathcal{B}_0} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}(t)$$

a velocidade absoluta de $P(t)$ relativamente a $O(t)$.

- ▶ Nota: neste caso, a velocidade **relativa** (ou seja, relativa ao referencial $\mathcal{B}(t)$) de $P(t)$ relativamente a $O(t)$ e nula, pois que $\dot{y}_i = 0$. Temos $v_T(P) =$ velocidade **de transporte** de P .

Velocidade absoluta e relativa -2- ponto móvel na base móvel

Queremos a velocidade absoluta de $P(t)$ relativamente a 0, agora com $\overrightarrow{OP}(t) = y_i(\mathbf{t})\underline{g}_i(t)$ (nota: y_i depende de t). Temos que derivar no tempo $\overrightarrow{OP}(t)$:

$$\vec{v}(P)|_{\mathcal{B}_0} = \vec{v}(O(t))|_{\mathcal{B}_0} + \frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}(t)|_{\mathcal{B}_0}.$$

Sendo que

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}(t)|_{\mathcal{B}_0} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}(t) + \mathbf{v}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}),$$

onde $\vec{v}_R(P) := \vec{v}(P)|_{\mathcal{B}(t)} = \dot{y}_i(t)\underline{g}_i(t) = (v_R)_i\underline{g}_i(t)$ é a velocidade **relativa** a $\mathcal{B}(t)$ de $\overrightarrow{OP}(t)$, obtemos

$$\vec{v}(P)|_{\mathcal{B}_0} = \vec{v}_T(P) + \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{R}}(P) = v(O(t))|_{\mathcal{B}_0} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}(t) + \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{R}}(P).$$

Acceleração absoluta, relativa, de Coriolis, e de transporte

Acceleração absoluta de $P(t)$ relativamente a 0. Sendo no caso geral, $\overrightarrow{0P}(t) = P(t) = \overrightarrow{0O}(t) + \overrightarrow{OP}(t)$, onde $\overrightarrow{OP}(t) = y_i(\mathbf{t})\underline{g}_i(t)$, temos que calcular

$$\begin{aligned}
 \vec{a}(P)|_{\mathcal{B}_0} &= \frac{d}{dt}\vec{v}(P)|_{\mathcal{B}_0} \\
 &= \frac{d}{dt}\left(\vec{v}(O(t))|_{\mathcal{B}_0} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}(t) + \dot{y}_i(t)\underline{g}_i(t)\right) \\
 &= \vec{a}(O)|_{\mathcal{B}_0} + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{OP}(t) + \vec{\omega} \times \left(\dot{y}_i(t)\underline{g}_i(t)\right) \\
 &\quad + \vec{\omega} \times \left(y_i(t)\frac{d}{dt}\underline{g}_i(t)\right) + \ddot{y}_i(t)\underline{g}_i(t) + \dot{y}_i(t)\vec{\omega} \times \underline{g}_i(t) \\
 &= \vec{a}(O)|_{\mathcal{B}_0} + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{OP}(t) + \vec{\omega} \times \left(\dot{y}_i(t)\underline{g}_i(t)\right) \\
 &\quad + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}(t)\right) + \ddot{y}_i(t)\underline{g}_i(t) + \dot{y}_i(t)\vec{\omega} \times \underline{g}_i(t). (1)
 \end{aligned}$$

Teorema de Coriolis (1835)

Portanto, acabamos de demonstrar o Teorema (Coriolis, 1835):

$\vec{a}(P)(t)|_{\mathcal{B}_0} = \dot{\vec{v}}(P)(t)|_{\mathcal{B}_0} = \ddot{\vec{P}}(t)|_{\mathcal{B}_0} = \vec{a}_R(P) + \vec{a}_T(P) + \vec{a}_C(P)$,
com a aceleração relativa

$$\vec{a}_R(P) := \vec{a}(P)|_{\mathcal{B}(t)} = \ddot{\underline{y}}_i(t)\underline{g}_i(t),$$

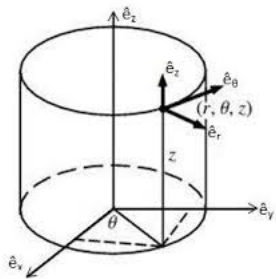
a aceleração de Coriolis

$$\vec{a}_C(P) = 2\dot{\underline{y}}_i(t)\vec{\omega} \times \underline{g}_i(t) = 2\dot{\underline{y}}_i(t)\dot{\underline{g}}_i(t) = 2(v_R)_i\dot{\underline{g}}_i(t) = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_R,$$

e a aceleração de transporte

$$\vec{a}_T(P) := \vec{a}(O)|_{\mathcal{B}_0} + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{OP}(t) + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}(t) \right).$$

Movimento em coordenadas polares cilíndricas



Em 3D

$$\underline{x} = x_{3D} = r \underline{g}_r + z \underline{g}_z$$

$$\dot{\underline{x}}_{3D} = \dot{\underline{x}}_{2D} + \dot{z} \underline{g}_z$$

$$\ddot{\underline{x}}_{3D} = \ddot{\underline{x}}_{2D} + \ddot{z} \underline{g}_z$$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \underline{g}_z \quad (\star)$$

$$\text{Aceleração centrípeta: } -r\dot{\theta}^2 \underline{g}_r$$

Velocidade, Aceleração, Momento

♣ Seja o vector posição \underline{x} e $\{\alpha_i\}$ as coordenadas curvilíneas. A base curvilínea associada é definida como $\underline{g}_i := \frac{\partial \underline{x}}{\partial \alpha_i} / \left\| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \alpha_i} \right\|$.

♣ Coordenadas cilíndricas $\{r, \theta, z\}$, com $\underline{x} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z = r \cos \theta \underline{e}_x + r \sin \theta \underline{e}_y + z \underline{e}_z$ (▲).

♣ Portanto: $\underline{g}_r = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_y$ e

$$\underline{g}_\theta = -\sin \theta \underline{e}_x + \cos \theta \underline{e}_y.$$

Por (▲) temos $\underline{x} = x_{2D} = r \underline{g}_r$

Velocidade, Aceleração, Momento

$$\dot{\underline{x}}_{2D} = \dot{r} \underline{g}_r + r \dot{\theta} \underline{g}_\theta \quad (\star)$$

$$\ddot{\underline{x}}_{2D} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \underline{g}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \underline{g}_\theta \quad (\star)$$

Primeira lei de Newton

Primeira Lei: O Princípio de Inércia

- ▶ Sem influências externas sobre uma partícula (=massa pontual), a mesma tem velocidade constante.
- ▶ Velocidade nula \Rightarrow Reposo.
- ▶ Existe pelo menos um referencial onde esta lei é válida.

Segunda lei de Newton

♣ Seja uma massa pontual m no ponto P .

♣ Posição do ponto P : x , velocidade do ponto P : $\vec{v}|_{\mathcal{B}_0} := \dot{x} = \frac{dx}{dt}$;

aceleração do ponto P : $\vec{a}|_{\mathcal{B}_0} := \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

♣ Seja \vec{F} = soma de todas as **forças** atuando sobre a massa : é **causa** de uma aceleração.

Segunda Lei: O Princípio fundamental da Dinâmica

Seja \mathcal{B}_0 (Copernico). Então:

$$\vec{F} = m\vec{a}|_{\mathcal{B}_0} \text{ ou } \boxed{\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} = \vec{F}},$$

$$p := m\dot{x} = \text{quantidade de movimento (ou momento linear)}.$$

Validação experimental

Medições

- ▶ Medição de **força** e de **massa**: escolha de unidade, grandeza padrão: depende pouco do referencial
- ▶ Aceleração também pode ser medida: depende muito da escolha do referencial
- ▶ A lei de Newton é válida só numa subclasse de referências.
- ▶ A escolha da chronologia: calcular velocidade, aceleração

Domínio de validade da Mecânica classica

- ▶ Definição do tempo: **sideral**=ângulo horário do ponto vernal.
- ▶ Triedro de Copernico (origem no centro do sol, eixos com respeito às estrelas) \nleftrightarrow Anomalia no movimento da lua.
- ▶ **Tempo atômico**=frequência átomo de Caesium.

Expressão num sistema qualquer

Seja $\mathcal{B}_0 =$ Triedro de Copernico.

2a Lei Newton+Coriolis

$\vec{F} = m\vec{a}|_{\mathcal{B}_0} = m(\vec{a}_R + \vec{a}_T + \vec{a}_C)$ ou seja,

$$m\vec{a}_R = \vec{F} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_C,$$

com $m\vec{a}_T$, a força **centrifuga**, e $m\vec{a}_C$, a força **de Coriolis**

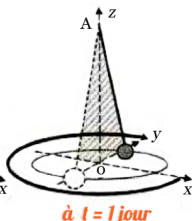
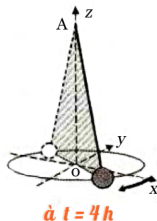
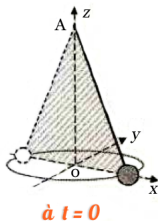
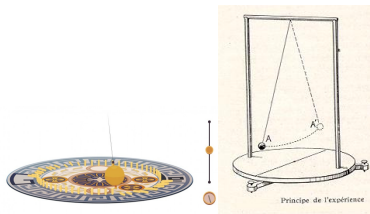
Sistema referencial inercial

Definido como tal sistema movél onde $m\vec{a}_R = \vec{F}$ (i.e., onde $\vec{a}_T + \vec{a}_C = 0$).

Teorema (Princípio de Galileo)

Seja $\mathcal{B}(t)$ um sistema referencial. Então $\mathcal{B}(t)$ é um sistema referencial inercial, se e somente se, $\mathcal{B}(t)$ tem, relativamente ao sistema de Copernico, um movimento de translação uniforme. (\star)

► O pendulo de Foucault



Em \mathcal{B}_0 , triedro de Copernico. Considere o Plano de Oscilações

$$\frac{d}{dt}\vec{p}(t) = \vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t (\vec{g} + \frac{\vec{T}}{m})(\tau) d\tau \in \text{Plano}(0).$$

♣ Isto não corresponde á observação (vê figura a direita).

♣ Existe uma rotação do plano.

Em $\mathcal{B}(t)$, referêncial legado a Terra:

$$\frac{d}{dt}\vec{p}(t) = \vec{F} - \vec{F}_C - \vec{F}_T \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_{plano} + \vec{v}_\perp$$

♣ Onde $\vec{v}_\perp = - \int_0^t (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{OP} + 2\vec{\omega} \times \vec{v})(\tau) d\tau$.

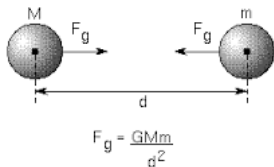
♣ Prova que $\omega \neq 0$, observando que $\vec{\omega} = cte = \text{Rotação da Terra}$.

Restrições pelas transformações de Galileo

- ▶ **Determinismo:** $\forall (x(t_0), \dot{x}(t_0)) \in \mathbb{R}^N, \exists! x : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$, t.q.
 $m\ddot{x}(t) = F(x(t), \dot{x}(t), t)$. (ODE)
- ▶ **Translação do tempo:** $x = \varphi$ solução $\Rightarrow x = \varphi(\cdot + s)$ também é solução $\Rightarrow m\ddot{x}(t) = F(x(t), \dot{x}(t))$.
- ▶ **•Translação do espaço:** $x = \varphi$ solução $\Rightarrow x = \varphi + r$ também é solução
 $\Rightarrow m\ddot{x}_i(t) = F_i(x_j(t) - x_k(t), \dot{x}(t)), i, j, k = 1 \cdots N$.
•Referencial em movimento de translação uniforme
 $\Rightarrow m\ddot{x}^A(t) = F^A(x^B(t) - x^C(t), \dot{x}^B(t) - \dot{x}^C(t)), A, B, C = 1 \cdots N$.
- ▶ **Rotação \Rightarrow Isotropia $\Rightarrow F(Rx(t), R\dot{x}(t)) = RF(x(t), \dot{x}(t))$.**

Força de Gravidade

Gravidade entre 2 corpos (Newton)



Gravidade na superfície da Terra

$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$, $M = 5.972 \cdot 10^{24}$, $R = 6.378 \cdot 10^6$ (unidade SI).

Acceleção da gravidade na superfície da Terra:

$$g = g_0 = -\frac{F_g}{m} \sim 9,81 m/s^2 \text{ (Galileo).}$$

Gravidade longe da superfície da Terra

Acceleção da gravidade na superfície da Terra: $g(r) = g_0 \frac{R^2}{r^2}$

Movimento de uma massa pontual na superfície da Terra

Conjetura de Galileo e Experiência de Robert Boyle (1657)

No vazio, todos os corpos caem da mesma maneira.

► Pena e Chumbo no vazio

Movimento de uma massa pontual na superfície da Terra

Segunda lei de Newton: $m\ddot{x} = m\vec{g} + \vec{F}$, onde \vec{F} é a resistência do ar. Experiência mostra que $\vec{F} = F(\dot{x})$.

Trajectoria parabólica

$$\dot{x}(t) = \left(g + \frac{F}{m}\right)t + v_0,$$

$$x(t) = \left(g + \frac{F}{m}\right)\frac{t^2}{2} + v_0t + x_0.$$

♣ Assumindo $F = 0$ temos

$$g + \frac{F}{m} = -g_2\mathbf{e}_2, x_0 = 0 \Rightarrow x_1(t) = v_{01}t \Rightarrow$$

Parabola no espaço:

$$x_2(t) = \frac{-g_2}{2v_{01}^2}x_1(t)^2 + \frac{v_{02}}{v_{01}}x_1(t).$$

Força central

Problema de dois corpos \Rightarrow força central

- ♣ Seja duas massas m_1 no ponto P_1 e m_2 no ponto P_2 .
- ♣ \vec{F} central: tem a direcção da reta entre P_1 e P_2 e uma norma que apenas depende da distância relativa r entre P_1 e P_2 .
- ♣ Seja G o centro de massa do sistema, seja $\vec{x}_1 := \overrightarrow{GP_1}$ e $\vec{x}_2 := \overrightarrow{GP_2}$.
- ♣ Num referencial centrado em G temos por definição $m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 = 0$ (★). (cf. mais tarde no curso.)
- ♣ Definimos a posição relativa $\vec{r} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$. Assim $\|\vec{r}\| = r$.
- ♣ As leis de Newton escrevem-se como $m_1\ddot{\vec{x}}_1 = \vec{F}(r) = \vec{r}f(r)$ e, por (★), $m_2\ddot{\vec{x}}_2 = -\vec{F}(r) = -\vec{r}f(r)$.
- ♣ Por diferença temos $m_1\ddot{\vec{r}} = (1 + \frac{m_1}{m_2})\vec{r}f(r)$, ou seja $M\ddot{\vec{r}} = \vec{r}f(r)$, com $M := \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$.
- ♣ Notas: (i) aceleração é sempre relativa a G ; (ii) $\vec{r} = r\vec{g}_r$.

Força central deriva de um potencial V

Força central

$\vec{F} = F(r)\underline{g}_r$. Por exemplo, a Gravidade

$F_g(r) = \frac{GMm}{r^2} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{GMm}{r}\right)$, com O = centro da Terra.

♣ Newton: $m\ddot{x} = F(r)\underline{g}_r$, onde $x = r\underline{g}_r$.

Potencial

♣ Seja O e P dois pontos tais que $x = \overrightarrow{OP} = r\underline{g}_r$.

♣ Temos $\vec{F} = F(r)\underline{g}_r = \frac{F(r)}{r}\overrightarrow{OP}$ com F continua.

♣ Teorema: Tal força deriva de um potencial V .

DEM. Seja $r = (x_i^2)^{1/2}$ e define $V(r) := V(r_0) - \int_{r_0}^r F(\rho)d\rho$ com

$r_0 \neq 0$. Calculamos $-(\nabla V)_i = -\frac{\partial V(r)}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial r}V(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = F(r)\frac{x_i}{r}$.

Portanto $-\nabla V = F(r)\frac{x}{r} = \frac{F(r)}{r}\overrightarrow{OP} = \vec{F}$.

Momento angular

♣ Seja O fixado e seja o vector posição $x = \overrightarrow{OP}$.

Momento angular

$$L_O := x \times m\dot{x} \quad (\text{produto vectorial})$$

Conservação do momento angular (num referencial inercial)

Teorema : $\frac{d}{dt} L_O = x \times F.$

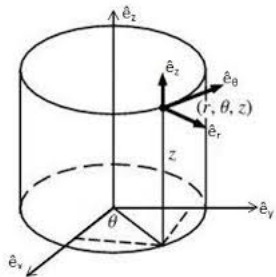
DEM. Imediato, pela 2a Lei de Newton.

Corolário: Se F é uma força central, então $\frac{d}{dt} L_O = 0.$ Além disso, a trajetória está num plano perpendicular a L_O . Se $L_O = 0$, então o movimento é retilíneo. (\star).

► Conservação do momento angular

(Lembrete: se $F = 0$, então $\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0$ (conservação do momento linear)).

Movimento em coordenadas polares cilíndricas



Em 2D

$$x = x_{2D} = r \underline{g}_r$$

Em 3D

$$x = x_{3D} = r \underline{g}_r + z \underline{g}_z$$

$$\underline{g}_r = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_y$$

$$\underline{g}_\theta = -\sin \theta \underline{e}_x + \cos \theta \underline{e}_y$$

Velocidade, Aceleração, Momento

$$\dot{x}_{2D} = \dot{r} \underline{g}_r + r \dot{\theta} \underline{g}_\theta \quad (\star)$$

$$\ddot{x}_{2D} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \underline{g}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) \underline{g}_\theta \quad (\star)$$

$$L_0 = x \times m \dot{x} = m r^2 \dot{\theta} \underline{g}_z \quad (\star)$$

Lei de Newton

$$m(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \underline{g}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(m r^2 \dot{\theta}) \underline{g}_\theta = F(r) \underline{g}_r$$

Movimento central plano

$$1) L_0 = m K \underline{g}_z, \text{ onde } K \text{ é constante.}$$

$$2) r^2 \dot{\theta} = K.$$

$$3) m \ddot{r} = F(r) + m \frac{K^2}{r^3} = -\partial_r (U + \frac{m K^2}{2 r^2}).$$

Conservação da energia mecânica total

♣ Consideramos um caminho entre x_0 e x dois pontos de \mathbb{R}^3 .

Trabalho de uma força

$$W_F(x; x_0) := \int_{x_0}^x F(\xi) \cdot d\xi. \text{ (Nota: depende do caminho)}$$

Condição de potencialidade

♣ Teorema: F é uma força potencial se e somente se seu trabalho de x_0 a x é independente do caminho, i.e., se e somente se $\text{Curl } F = 0$. (★)

♣ Energia potencial é $U(x) := -W_F(x; x_0)$ e $F = -\text{Grad } U$.
(Ex.: Gravidade: $U(x) = \hat{U}(r) = -k/r = -\frac{GMm}{r}$).

Energia cinética $T(\dot{x}) := \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

Energia mecânica total de um sistema potencial

$$E(t) = T(\dot{x}) + U(x), \text{ onde } m\ddot{x}(t) = -\text{Grad } U(x(t)).$$

Conservação da energia mecânica total

Lei de conservação da energia mecânica total (num R.I.)

Teorema: $\boxed{\frac{d}{dt}E(t) = 0.} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}T(\dot{x}) = F \cdot \dot{x}(t) (= \text{Potência}). (\star)$

♣ Movimento no plano, sistema cilíndrico:
$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \Rightarrow E(t) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{U + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2}}_V$$

(★)

♣ Nota-se que: $V = U + \frac{mK^2}{2r^2} = -\frac{k}{r} + \frac{mK^2}{2r^2}$,
onde K : constante de Kepler e k : constante de Newton (gravifica).

♣ Lei de Newton=conservação da energia mecânica total:

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0 \Rightarrow m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{mK^2}{r^3}$$

Triedro de Frenet-Serret

♣ Seja $C \in \mathbb{R}^3$ uma curva regular. A posição de $x \in C$ é dada por $s \mapsto x(s)$ com $s \in J$ a abscissa curvilínea.

★ Vector tangente $\vec{t} := \frac{\frac{d}{ds}x(s)}{\|\frac{d}{ds}x(s)\|}$. Temos $(\vec{t}, \vec{t}) = 1 \Rightarrow (\vec{t}, \frac{d}{ds}\vec{t}) = 0$.

★ Define a curvatura da curva $\kappa := \|\frac{d}{ds}\vec{t}(s)\|$ e o vector normal \vec{n} tal que $\frac{d}{ds}\vec{t} = \kappa\vec{n}$.

★ Define o triedro de Frenet-Serret como $\{x(s), \vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$ onde $\vec{b} := \vec{t} \times \vec{n}$. É um exemplo de base móvel curvilínea.

★ Por $\frac{d}{ds}\vec{b} = \frac{d}{ds}\vec{t} \times \vec{n} + \vec{t} \times \frac{d}{ds}\vec{n} = \vec{t} \times \frac{d}{ds}\vec{n}$ deduzimos que $\frac{d}{ds}\vec{b} \perp \vec{t}$. D'outro lado $(\vec{b}, \vec{b}) = 1 \Rightarrow \vec{b} \perp \frac{d}{ds}\vec{b}$. Portanto existe $s \mapsto \xi(s)$ tal que $\frac{d}{ds}\vec{b} = -\xi\vec{n}(s)$, onde ξ é chamado torsão da curva.

★ De $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$ deduzimos que $\frac{d}{ds}\vec{n}(s) = -\kappa(s)\vec{t}(s) + \xi(s)\vec{b}(s)$.

★ Finalmente, definindo o vector de Darboux (de rotação infinitesimal) $\vec{\omega}(s) = \xi(s)\vec{t}(s) + \kappa(s)\vec{b}(s)$, obtemos $\frac{d}{ds}\vec{t}(s) = \vec{\omega} \times \vec{t}$, $\frac{d}{ds}\vec{n}(s) = \vec{\omega} \times \vec{n}$ e $\frac{d}{ds}\vec{b}(s) = \vec{\omega} \times \vec{b}$.

Sistema integrável (campo central)

♣ Consideramos um movimento no plano: $t \mapsto (r(t), \theta(t))$.

♣ 2a Lei de Newton $m\ddot{r} = -\partial_r V \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V) = 0$.

Propriedade qualitativa do movimento

♣ $\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r(t)))}$, onde $V = U + \frac{mK^2}{2r^2}$ é o potencial efectivo (por exemplo $U = -k/r$ o potencial de Newton).

$\dot{r} \neq 0 \Rightarrow$ (derivada função recíproca) $\frac{dt}{dr} = \pm (\frac{2}{m}(E - V(r)))^{-1/2}$

$\Rightarrow t - t_0 = \int_{r(t_0)}^{r(t)} (\frac{2}{m}(E - V(\xi)))^{-1/2} d\xi$.

♣ $\dot{\theta} = \frac{K}{r^2} \Rightarrow \frac{d}{dr}\hat{\theta}(r) = \dot{\theta} \frac{dt}{dr} = \frac{K}{r^2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r))}}$.

$U = -k/r \Rightarrow$ (Órbita de Kepler): $\hat{\theta}(r) = \arccos \frac{K/r - k/K}{\sqrt{2E/m + k^2/mK^2}}$.

"Integrabilidade"

Consideramos o tempo necessário para que uma partícula, partindo de r_0 no tempo t_0 , atinja $r(t)$ com velocidade positiva e uma energia E . Se a solução é dada por um integral, diz-se que o sistema é integrável.

Newton no plano de fase -1- Plano de fase.

Re-escrever a equação de Newton como sistema de 2 ODEs

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= v(t) = p(t)/m \\ \dot{p}(t) &= F(x(t)) \end{cases}$$

Plano de Fase

Definido como $t : z(t) := (q(t), p(t)) := (x(t), p(t)) \in \mathbb{R}^2$.

Newton escreve-se como

$$\frac{d}{dt} z^i(t) = f^i(z(t)), \quad i = 1, 2. (\blacksquare)$$

Newton no plano de fase -2- Teorema de existência.

Teorema de Cauchy

Seja $z^0 \in \mathbb{R}^2$. Se f for localmente Lipschitziana, então existe (localmente no tempo) uma solução a (■) que verifique $z(0) = z^0$.

♣ DEF. (Solução local) $[0, T)$ é o intervalo maximal de existência $\Leftrightarrow \exists T > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow T} \|q(t)\| = \infty$. (★)

Teorema: Solução global \equiv extensão da solução.

(i) $F = -\text{Grad } V$ com V limitada inferiormente $\Rightarrow T = \infty$. (★)

(ii) $\lim_{q \rightarrow \pm\infty} V(q) = +\infty \Rightarrow$ "trajétorias limitadas", i.e.,

$|q(t)| \leq C, \forall t, t_0 \in [0, T[,$ i.e. $C > 0$ independente de t_0, t . (★)

Newton no plano de fase -3- Solução local ou global?

DEM. (i) Seja $M \in \mathbb{R}$ t.q. $M \leq V(q(t)), \forall t \geq t_0$. Como $E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2(t) + V(q(t)), \forall t \geq t_0$, temos $|q(t)| \leq |q(t_0)| + \int_0^t |\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(q(t)))}| \leq |q(t_0)| + \int_0^t |\sqrt{\frac{2}{m}(E - M)}| \leq |q(t_0)| + \int_0^T |\sqrt{\frac{2}{m}(E - M)}|$ se assumir (★). Então $|q(t)| \leq C(E, M; t_0), \forall t \geq t_0$, o que contradiz (★) \Rightarrow a solução é prolongável ate ∞ .

(ii) $\lim_{q \rightarrow \pm\infty} V(q) = +\infty \Rightarrow \exists W(q)$ continua t.q. $W > V$, $W(q) = W(-q)$ e $W'(q) \geq 0, q \geq 0$. Seja $M = \min_q V(q)$, $E \geq M$ e $q_E = W^{-1}(E) \geq 0$. Isto implica que $q(t) \leq q_E$. De facto, se assumir $q > q_E$ teríamos $V(q(t)) > W(q_E) = E$, o seja $\dot{q}(t)^2 < 0$, uma contradicção. Portanto $|q(t)| \leq q_E$ independente de t_0 e t .

Noção de Equilíbrio

Definição

Uma massa pontual é em equilíbrio, ou no repouso, num referencial $\mathcal{B}(t)$ e durante um intervalo de tempo I , se a sua velocidade é nula para todos os $t \in I$.

Pela 2a lei de Newton (o princípio fundamental da dinâmica) temos:

Teorema

Uma massa pontual é em equilíbrio num referencial INERCIAL, e durante um intervalo de tempo I , se a sua velocidade é nula para pelo menos um $t_0 \in I$, e se a soma das forças aplicadas na massa pontual, $F = 0$, para todos os $t \in I$.

DEM. Imediato pela 2a lei de Newton.

♣ No caso de uma força potencial, a condição será $F = \nabla U = 0$, ou seja equilíbrio $\Leftrightarrow v = 0$ (ou $T(v) = 0$) e U é estacionário (i.e., $\partial_t U = 0$).

Estudo qualitativo do movimento, coordenadas lagrangiana



Movimento unidimensional com constrangimento

Abcissa curvilínea ou coordenada lagrangiana

$s \mapsto \{x(s), y(s), z(s)\}$.

Dados:

Energia potencial $V(s) = mgz(s)$.

Newton: $m(\ddot{s} + g \frac{d}{ds} z(s)) = 0$ (Lembrete: triedro de Frenet).

Conservação: $\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + V(s) = E$, i.e., $\dot{s} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(s))}$.

Estudo de:

★ Pontos de reflexão

★ Pontos de equilíbrio

Estudo qualitativo qualitativo de um ponto de reflexão

♣ DEF. **Abcissa** a t.q. $V(a) = E$ (**velocidade zero**) e $V'(a) \neq 0$.

- ▶ abcissa $s(t_1) = a$ t.q. $V(a) = E \Rightarrow v(t_1) = 0, V'(a) > 0$.
- ▶ abcissa $s(t_0) = b < a$ t.q. $V(s(t)) < E, \forall t \in [b, a[$.
- ▶ supomos que $\dot{s}(t_0) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(s))} > 0$, ou seja, o mobile vai em direcção à abcissa a , onde chegará num tempo finito se tivermos $I := t_1 - t_0 = \int_b^a \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(s))}} < \infty$.
- ▶ DEM. Assume-se $V \in \mathcal{C}^2(I)$ e faz-se um desenvolvimento de Taylor finito de V em a . Portanto

$$V(s) = V(a) - (a - s)[V'(a) - V''(a + \theta(s - a))\frac{a - s}{2}], 0 < \theta < 1,$$
 i.e., $E - V(s) = (a - s)\Pi(s)$. Temos $\Pi(a) > 0$ e $E \geq V \Rightarrow \Pi(b) > 0$. $E > V$. Portanto $I < \sqrt{\frac{m}{2k}}\sqrt{a - b} < \infty$.

Estudo qualitativo de um ponto de equilíbrio instável

♣ DEF. **Abcissa** a t.q. $V(a) = E$ (**velocidade zero**) e $V'(a) = 0$.

- ▶ abcissa $s(t_1) = a$ t.q. $V(a) = E \Rightarrow v(t_1) = 0, V'(a) = 0$.
- ▶ abcissa $s(t_0) = b < a$ t.q. $V(s(t)) < E, \forall t \in [b, a[$.
- ▶ supomos $\dot{s}(t_0) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(s))} > 0$, ou seja, o mobile vai em direcção à a , onde, por definição de ser instável chegará num tempo infinito: $I_\alpha := \int_b^\alpha \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(s))}} \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow a$.
- ▶ DEM. Assume-se $V \in \mathcal{C}^2(I)$ e faz-se um desenvolvimento de Taylor finito de V em a . Portanto

$$V(s) = V(a) - (a - s)[-V''(a + \theta(s - a))\frac{a-s}{2}], 0 < \theta < 1,$$
 i.e., $E - V(s) = \frac{(a-s)^2}{2}\Psi(s)$. Pela continuidade de $\Psi, \exists K > 0$, t.q. $E - V(s) \leq \frac{(a-s)^2}{2}K$.
 Portanto $I_\alpha = \sqrt{K^{-1}}\sqrt{m} \ln \frac{a-b}{a-\alpha} \rightarrow \infty$, quando $\alpha \rightarrow a$.

Movimento periódico

Quando a solução do sistema será periódica?

$$\begin{cases} \dot{q}(t) &= p(t)/m \\ \dot{p}(t) &= -\partial_q V(q(t)) \end{cases},$$

i.e., DEF. quando $\exists T$ t.q. $q(t+T) = q(t)$, $\forall t$?

Conservação de energia

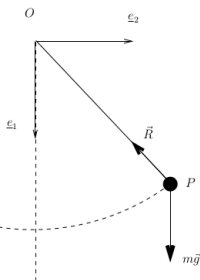
$$E = E(t) = E(t_0) = \frac{m}{2}v_0^2 + V(q_0),$$

onde $q_{\min}(E) < q_0 < q_{\max}(E)$ soluções de $V(q) = E$.

Teorema

A solução $t \mapsto q(t)$, $t \in [0, \infty)$ é periódica com um período positivo minimal T_E se e somente se $q_0 \in]q_{\min}, q_{\max}[$ onde $V'(q_{\max}) > 0$ e $V'(q_{\min}) < 0$. Este período é $T_E := 2 \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(s))}} < \infty$.

DEM: A demonstração usa 2 vezes o lemma de reflexão e as definições de $t_{\max} := \sup\{t \geq t_0 : \dot{q}(\tau) > 0, \tau \in [t_0; t]\}$ e $t_{\min} := \sup\{t \geq t_{\max} : \dot{q}(\tau) < 0, \tau \in [t_{\max}; t]\}$.



♣ Ha (pelo menos) 4 caminhos para encontrar as equações do movimento:

$$\ell \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \quad (*)$$

$$\overrightarrow{OP} = \ell \underline{g}_r, \quad \ell = |\overrightarrow{OP}|, \quad \cos \theta = \underline{e}_1 \cdot \overrightarrow{OP},$$

$$T = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2 \text{ e } U = -mgl \cos \theta.$$

1) **Conservação da energia mecânica:**

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \implies (*) .$$

2) **2ª Lei de Newton no referencial $\{\underline{g}_r, \underline{g}_\theta, \underline{e}_z\}$**

legado a P: $m\vec{g} + \vec{R} = m(\vec{a}_R + \vec{a}_T + \vec{a}_C)$, onde

$$\vec{v}_R = 0 \implies \vec{a}_R = \vec{a}_C = 0 \text{ e } \vec{a}_T =$$

$$\ddot{\theta} \underline{e}_z \times \ell \underline{g}_r + \dot{\theta} \underline{e}_z \times (\dot{\theta} \underline{e}_z \times \ell \underline{g}_r) = \ell \ddot{\theta} \underline{g}_\theta - \ell \dot{\theta}^2 \underline{g}_r \implies$$

$$(\text{longo } \underline{g}_r : R = mg \cos \theta + \ell \dot{\theta}^2), \text{ e } (*) \text{ longo } \underline{g}_\theta.$$

3) **Conservação do momento linear:**

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP} \times m\vec{v}) = \overrightarrow{OP} \times (\vec{R} + m\vec{g}) = \overrightarrow{OP} \times m\vec{g},$$

$$\text{onde } \overrightarrow{OP} = \ell \cos \theta \underline{e}_1 + \ell \sin \theta \underline{e}_2 \implies (*).$$

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -1-

Sistema de N pontos

$$x^A : t \mapsto x^A(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3, 1 \leq A \leq N.$$

Sistema de N massas pontuais

$$m^A : A \mapsto m(A) : \{1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Sistema de N^2 forças de interacção

$$(A, B) \mapsto f^{AB} : \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

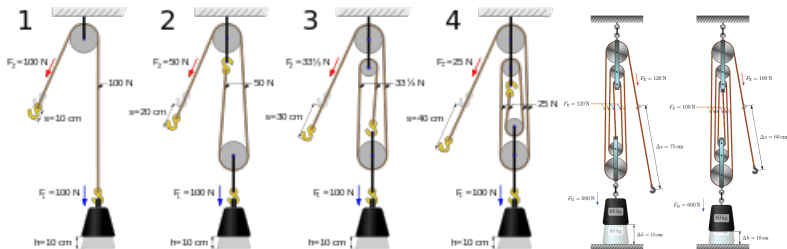
Sistema de N forças pontuais

$$A \mapsto f^A := \sum_{B=1, \neq A}^N f^{AB} : \{1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Terceira Lei de Newton, ou Princípio de Acção e Reacção

$$f^{AB} \times (x^B - x^A) = 0 \text{ e } f^{AB} = -f^{BA}.$$

A tensão como força recíproca: conjunto de roldanas



Regra de ouro

♣ $F = P/N$, onde P é o peso, e N o número de fios que trazem a massa.

♣ O comprimento de corda para puxar é proporcional a N .

♣ Portanto: a força (muscular) diminui mas o trabalho da mesma fica o mesmo.

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -3-

♣ Seja O a origem de um referencial inercial.

Sistema aberto

Força total em A : $F^A := f^A + f'^A$, onde f'^A : força exterior.

Quantidade de movimento (Momento linear)

$$P_O := \sum_{A=1}^N m_A \dot{x}^A.$$

Lei de conservação da quantidade de movimento (num referencial inercial)

$$\frac{d}{dt} P_O = \sum_{A=1}^N F^A = \sum_{A=1}^N f'^A. \quad (\star)$$

♣ Sistema isolado $\Leftrightarrow f'^A = 0, \forall A \Rightarrow \frac{d}{dt} P_O = 0$.

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -4-

Massa total e centro de massa

♣ Massa: $M := \sum_{A=1}^N m_A$

♣ Posição (com respeito ao ponto O): $x^A = \overrightarrow{OA}$.

♣ Definição de centro de massa (com respeito a O):
é o único ponto G tal que $X_O := \frac{\sum_{A=1}^N m_A x^A}{M} = \overrightarrow{OG}$.

♣ Definição intrínseca: $X_O = \frac{\sum_{A=1}^N m_A \overrightarrow{OA}}{M} \Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall t : 0 = \frac{\sum_{A=1}^N m_A \overrightarrow{GA}}{M}.}$$

♣ $P_O = M \dot{X}_O = M \overrightarrow{\dot{OG}}$ e $P_G = 0$. (★)

♣ Conservação do momento linear: $\frac{dP_O}{dt} = M \ddot{X}_O = \sum_{A=1}^N f'^A$.

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -5-

Momento angular com respeito a um ponto O

$$L_O := \sum_{A=1}^N \vec{x}^A \times m_A \dot{\vec{x}}^A.$$

Redução ao centro de massa

$$\clubsuit L_O = \vec{OG} \times M \dot{\vec{OG}} + \sum_{A=1}^N \vec{GA} \times m_A \overbrace{(\dot{\vec{GA}} + \dot{\vec{OG}})}^{=\dot{\vec{x}}^A} =$$

$$\vec{OG} \times M \dot{\vec{OG}} + \sum_{A=1}^N \vec{GA} \times m_A \dot{\vec{GA}} \quad (\star).$$

$$\clubsuit \text{ Assim } L_G = \sum_{A=1}^N \vec{GA} \times m_A \dot{\vec{GA}} \text{ e } L_O = \vec{OG} \times M \dot{\vec{OG}} + L_G.$$

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -6-

Lei de conservação do momento cinético (num referencial inercial)

$$\frac{d}{dt}L_O = \sum_{A=1}^N x^A \times F^A = K_O := \sum_{A=1}^N x^A \times f'^A, (\star)$$

♣ Teorema: No referencial do centro de massa (que pode não ser inercial), temos: $\frac{d}{dt}L_G = \sum_{A=1}^N \overrightarrow{GA} \times f'^A =: K_G (\star)$

► Conservação do momento cinético de 2 corpos em rotação

♣ Campo central $\Leftrightarrow f'^A = \varphi^A(r)\underline{g}_r, \forall A \Rightarrow \frac{d}{dt}L_O = 0. (\star)$

♣ Sistema isolado $\Leftrightarrow f'^A = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}L_O = 0. (\star)$

► Queda do gato 1

► Queda do gato 2: conservação do momento cinético de 3 corpos

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -7-

Energia cinética e teorema de Koenig:

$$T_O := \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} m_A (\dot{x}^A)^2 = \frac{1}{2} M (\dot{\vec{OG}})^2 + \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} m_A (\dot{\vec{GA}})^2. \quad (\star)$$

Lei de conservação da energia cinética
(num referencial inercial)

$$\frac{d}{dt} T_O := \sum_{A=1}^N \dot{x}^A \cdot F^A. \quad (\star)$$

♣ “Variação de energia cinética = Potência das forças”.

♣ Corolário: no referencial do centro de massa (que pode não ser inercial), temos $\frac{d}{dt} T_G = \sum_{A=1}^N \dot{\vec{GA}} \cdot F^A$, ou seja

$$\frac{d}{dt} \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} m_A (\dot{\vec{GA}})^2 := \sum_{A=1}^N \dot{\vec{GA}} \cdot F^A.$$

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -8-

$$\text{DEM. } \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M (\vec{\dot{O}G})^2 + \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} m_A (\vec{\dot{G}A})^2 \right) = \sum_{A=1}^N (\vec{\dot{O}G} + \vec{\dot{G}A}) \cdot$$

$$(f^A + f'^A). \text{ Mas } \frac{d}{dt} \frac{1}{2} M (\vec{\dot{O}G})^2 = M \vec{\dot{O}G} \cdot \ddot{\vec{O}G} = \vec{\dot{O}G} \cdot \sum_{A=1}^N f'^A.$$

$$\text{D'outro lado temos } \sum_{A=1}^N f^A = 0.$$

Caso de um sólido = sistema “rígido”

$$d(A, B) = \text{cst} \Rightarrow \frac{d}{dt} \|\vec{AB}\|^2 = 0 \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{\dot{A}B} \Rightarrow$$

$$f^{AB} \cdot \vec{\dot{O}A} + f^{BA} \cdot \vec{\dot{O}B} = -f^{AB} \cdot \vec{\dot{A}B} = -\gamma^{AB} \vec{AB} \cdot \vec{\dot{A}B} = 0.$$

$$\clubsuit \text{ Neste caso: } \frac{d}{dt} T_O := \sum_{A=1}^N \dot{x}^A \times f'^A:$$

“Variação de energia cinética = apenas a potência das forças exteriores”.

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -9-

Velocidade de um ponto de um sistema rígido em movimento

Seja \mathcal{B}_0 um referencial inercial. Seja \overrightarrow{AB} a posição relativa de 2 pontos A e B do sólido. Seja um referencial $\mathcal{B}(t)$ com centro o centro de massa G e base $\{\underline{g}_i(t)\}$. Escrevemos $\overrightarrow{AB} = \sum_{i=1}^3 x_i \underline{g}_i$. Como \overrightarrow{AB} é constante com respeito a G , temos $\dot{x}_i = 0$. Portanto $\dot{\overrightarrow{AB}} = \sum_{i=1}^3 x_i \dot{\underline{g}}_i(t) = \sum_{i=1}^3 x_i \omega \times \underline{g}_i(t) = \omega \times \overrightarrow{AB}$. D'outro lado, $\dot{\overrightarrow{AB}} = \dot{\overrightarrow{0B}} - \dot{\overrightarrow{0A}} = v(B) - v(A)$, ou seja $v(A) = v(B) - \omega \times \overrightarrow{AB}$. Tomando $B = G$: $v(A) = v(G) + \omega \times \overrightarrow{GA}$ (redução ao C.M.).

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -10-

Equações de um corpo rígido

É suficiente resolver o sistema seguinte:

$$\boxed{M \frac{dV_G}{dt} = F, \quad \frac{dL_G}{dt} = K_G,}$$

onde $V_G := \dot{\overrightarrow{OG}}$ é a velocidade do centro de massa G ,
 L_G é o momento angular (ou cinético) com respeito a G , e
 $K_G = \sum_{A=1}^N \overrightarrow{GA} \times f'^A = K_O - \overrightarrow{OG} \times f'$.

♣ No caso de atuar num ponto só $K_G = \overrightarrow{GP} \times F$ é o momento das forças com respeito a G (onde P é ponto de aplicação de F).

Energia cinética de um sólido em torno de um eixo passando por G .

♣ Seja \mathcal{B}_O um referencial fixo, e G , o centro de massa do sólido (ponto fixo particular). Sabemos que $T_O = \frac{1}{2} \sum_{A=1}^N m_A \|O\dot{A}\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{A=1}^N m_A \|O\dot{G}\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{A=1}^N m_A \|G\dot{A}\|^2$.

♣ Portanto: $T_O = \frac{1}{2} M \|O\dot{G}\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{A=1}^N m_A \|\vec{\omega}^A \times \vec{GA}\|^2 = \frac{1}{2} M \|O\dot{G}\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{A=1}^N m_A \sum_{i=1}^3 (\omega_i^A)^2 \|\underline{g}_i \times \vec{GA}\|^2 = \frac{1}{2} M \|O\dot{G}\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{A=1}^N m_A \sum_{i=1}^3 (\omega_i^A)^2 \|\sum_{j=1}^3 \underline{g}_i \times \underline{g}_j y_j^A\|^2$.

♣ Seja $T_I := \frac{1}{2} \sum_{A=1}^N m_A \sum_{i=1}^3 (\omega_i^A)^2 \|\sum_{j=1}^3 \underline{g}_i \times \underline{g}_j y_j^A\|^2$.

Energia cinética de um sólido em torno de um eixo passando por G (continuação).

♣ Tomando um referencial $\{G; \underline{g}_i\}$ com $\vec{\omega}^A = \omega \underline{g}_1$, temos:

$$T_I = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{A=1}^N m_A \left\| \sum_{j=1}^3 \underline{g}_1 \times \underline{g}_j y_j^A \right\|^2 =$$

$$\frac{1}{2} \omega^2 \sum_{A=1}^N m_A ((y_2^A)^2 + (y_3^A)^2) = \frac{1}{2} \omega^2 I_1,$$

onde $I_i := \sum_{A=1}^N m_A (y_j^A)^2, j \neq i$

é o momento do sólido relativamente ao eixo i passando por G .

♣ Portanto, temos: $I := I_1 + I_2 + I_3 = 2I_G$ onde

$I_G := \sum_{A=1}^N m_A (\vec{GA})^2$ é o momento do sólido relativamente ao seu centro de inércia G .

♣ No caso isotropo, $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{3} I_G = \frac{2}{3} \sum_{A=1}^N m_A (\vec{GA})^2$.

Energia cinética de um sólido em torno de um eixo passando por G (continuação).

♣ Assim, temos $T_{I_1} = \frac{1}{2}\omega^2 I_1 = \frac{1}{3}\omega^2 I_G = \frac{1}{3}\omega^2 \sum_{A=1}^N m_A (\vec{GA})^2$.

♣ Em geral, temos $T_I = \frac{1}{2}\omega_1^2 I_1 + \frac{1}{2}\omega_2^2 I_2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 I_3$.

♣ Daí, no caso de um eixo só, a fórmula :

$$T_O = \frac{1}{2}M\|\vec{OG}\|^2 + \frac{1}{2}\omega^2 I_1,$$

onde I_1 = momento de inércia do corpo em torno de \underline{g}_1 : depende apenas da sua geometria.

♣ Em particular $T_G = \frac{1}{2}\omega^2 I = \frac{1}{3}\omega^2 I_G$.

♣ Ex. Corpo esférico de raio r : $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}mr^2$ e $I_G = \frac{3}{5}mr^2$.

Dinâmica de um sólido em rotação em torno de um eixo passando por G

♣ Temos

$$L_G = \sum_{A=1}^N \vec{GA} \times m_A \dot{\vec{GA}} = \sum_{A=1}^N \vec{GA} \times m_A (\vec{\omega}^A \times \vec{GA}) = \sum_{A=1}^N \omega^A m_A \|\vec{GA}\|^2 = \omega \sum_{A=1}^N m_A \|\vec{GA}\|^2. \text{ Logo } \boxed{L_G = \omega I_G.}$$

Equações de um corpo rígido

♣ Seja O um ponto fixo. É suficiente resolver o sistema seguinte:

$$\boxed{M \frac{dV_G}{dt} = F \quad (V_G := \frac{dx_G}{dt}), \quad \frac{dL_G}{dt} = I_G \frac{d\omega}{dt} = K_G \quad (\omega := \frac{d\theta}{dt}),}$$

onde $V_G := \dot{\vec{OG}}$ é a velocidade do centro de massa G ,

L_G é o momento angular (ou cinético) com respeito a G , e onde ω é a velocidade de rotação do sistema.

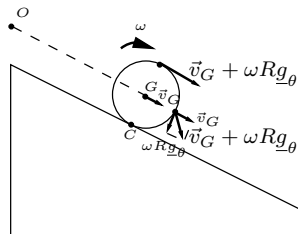
Deslizamento sem rolamento e Rolamento sem atrito

Deslizamento sem rolamento

Todos os pontos do sólido têm o mesmo movimento do que o seu centro de massa: velocidade de translação.

Rolamento “perfeito” ou sem atrito de Coulomb

Os pontos do sólido têm um movimento de rotação em torno do seu centro de massa.



♣ Atrito de Coulomb:

$F = -\gamma \|\vec{v}_C\|$, $\gamma > 0$, onde \vec{v}_C é a velocidade do ponto C relativa ao chão.

♣ Seja \vec{V} a velocidade do chão (ou do suporte) orientada como \vec{v}_G .

♣ No ponto de contacto C :

$$F = \gamma \|\vec{v}_C\| = 0 \Rightarrow$$

$$\|\vec{v}_G - \vec{V} + \omega R \underline{g}_\theta(C)\| = \|\vec{v}_G\| - \omega R = V$$

♣ Suporte fixo ($V = 0$):

$$v_G = \omega R.$$

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -8-

Potencialidade das forças de interacção

♣ Já sabemos que: $F^{AB} = \hat{F}^{AB}(x^D - x^C), \forall 1 \leq C, D \leq N$.

♣ F^{AB} é potencial se $F^{AB} = \tilde{F}^{AB}(\|x^B - x^A\|) \frac{x^B - x^A}{\|x^B - x^A\|}$ e

$$F^{AB} = -\text{Grad } U^{AB}(x^B - x^A), \quad U^{AB}(x) = -\int_0^{\|x\|} \tilde{F}^{AB}(\rho) d\rho.$$

♣ Em particular, temos: $F^{AB} = -F^{BA}$. (★)

Energia potencial do sistema

$$U(x) := \sum_{A>B}^N U^{AB}(x) + \sum_{A=1}^N U'^A(x), \quad f'^A := -\text{Grad } U'^A.$$

Lei de conservação da energia mecânica total (num R.I.)

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T + U) = 0.} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d}{dt}(T + U_{\text{int}}) = \sum_{A=1}^N f'^A \cdot v^A,}$$

$$\text{onde } U_{\text{int}} := \sum_{A>B}^N U^{AB}.$$

Colisões unidimensionais



Objetivo

Determinar as velocidades v'_1 e v'_2 dos dois corpos depois da colisão.

Metódo

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 & = & m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 & = & \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \end{cases}$$

Solução

$$v'_1 = \frac{2m_2 v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}, \quad v'_2 = \frac{2m_1 v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}. (\star)$$

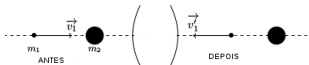
Problemas de alvos-projéteis

Pomos $v_2 = 0$.

Portanto: $v'_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$ e $v'_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$

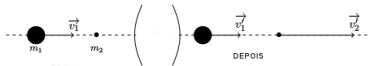
♣ Projétil leve, alvo pesado: $m_2 \gg m_1$: $v'_1 = -v_1$ e $v'_2 = 0$

Exemplo: Bola de ping-pongue contro bola de bilharde.



♣ Projétil pesado, alvo leve: $m_2 \ll m_1$: $v'_1 = v_1$ e $v'_2 = 2v_1$

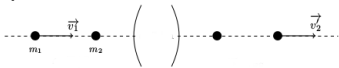
Exemplo: Bola de bilharde contro bola de ping-pongue.



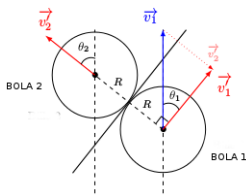
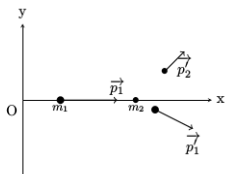
♣ Projétil e alvo tem mesma

massa: $m_2 = m_1$: $v'_1 = 0$ e $v'_2 = v_1$

Exemplo: Duas bolas de bilharde.



Choque elástico



Demonstrar que depois do choque, as bolas vão em direcções perpendiculares.

Demonstração

Pela conservação do momento linear, temos: $m\vec{v}_1 = m\vec{v}_1' + m\vec{v}_2'$.

Pela conservação da energia cinética: $\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2$.

Simplificando por $1/2$ e m , temos por um lado (pela condição 1), $\vec{v}_1^2 = (\vec{v}_1' + \vec{v}_2')^2$, e pelo outro (pela condição 2), $v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$.

Isto demonstra que $\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = 0$.

Choque elástico: caso geral no plano

Equações

Projeções nos eixos x e y do momento linear:

$$\begin{cases} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} &= m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \\ m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} &= m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y} \end{cases}.$$

Energia cinética:

$$m_1(v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + m_2(v_{2x}^2 + v_{2y}^2) = m_1(v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2) + m_2(v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2).$$

O sistema é mal posto

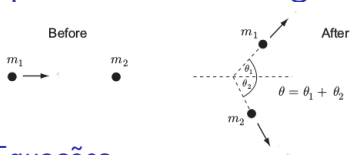
Não tem solução, em geral, pois que há 4 incógnitas

$v'_{1x}, v'_{1y}, v'_{2x}, v'_{2y}$, e só 3 equações.

Há solução se introduzir uma informação, fixar um parâmetro.

Por exemplo, se sabe que depois do choque, \vec{v}_1' faz um ângulo de θ com \vec{v}_1 . Ou seja $v_{1x}' = v_1' \cos \theta$, e $v_{1y}' = v_1' \sin \theta$. Agora, as incógnitas são $v_1' = \|\vec{v}_1'\|, v_{2x}', v_{2y}'$.

Choque elástico: caso geral no plano, cálculo do ângulo



Equações

Momento linear: $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$

Energia cinética: $m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$.

Toma o quadrado do momento linear

Portanto: $m_1^2 v_1^2 = m_1^2 v_1'^2 + m_2^2 v_2'^2 + 2m_1 m_2 \vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2'$

Multiplique a energia cinética por m_1

Portanto: $m_1^2 v_1^2 = m_1^2 v_1'^2 + m_1 m_2 v_2'^2$

Subtrai as duas expressões, e divide por m_2

Obtemos: $2m_1 \vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = (m_1 - m_2) v_2'^2$, i.e.: $\cos \theta = \frac{(m_1 - m_2) v_2'}{2m_1 v_1'}$.

Conceito de vínculo (ligação)

Ligação ou constrangimento (*constraint*)

Um ponto material é sujeito a ligações se o seu movimento é limitado por constrangimentos ou obstáculos.

Constrangimento de posição: deve ficar numa superfície

♣ Superfície imóvel $f(x, y, z) = 0$ ou móvel $f(x, y, z : t) = 0$.

♣ Curva móvel $f_i(x, y, z : t) = 0$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq m \leq 2$.

Eliminação de graus de liberdade

♣ Considere um ponto material: $n := \# \text{ GDL}$ $q_i = 3 - \# \text{ vínculos}$.

♣ q_i : coordenadas generalizadas ou **lagrangianas**.

Exemplo: caso sem vínculo

♣ $x_i = \hat{x}_i(q_j)$. Ex: coord. polares $q_i = (r, \theta, z)$

♣ Se $m = 0$, $\det \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \neq 0$. No caso geral, $\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right)$ de rango m .

♣ Da mais jeito: $r = cst$ do que $x_i^2 = cst$

Conceito de força de vínculo

Um ponto material é vinculado a uma superfície se a mesma exercer uma força $\vec{\ell}$ neste ponto. Geralmente, esta força não é conhecida: só sabemos que é necessária para um determinado movimento.

Metódo

- ♣ Eliminar esta incognita para encontrar as equações de movimento
- ♣ Escrever as equações sem a força de vínculo.
- ♣ No caso sem atrito, a força é sempre orthogonal á superfície, portanto não efetua nenhum trabalho, pois a velocidade do seu ponto de aplicação está sempre perpendicular a força.
- ♣ As outras forças são chamadas **exteriores**.

Considere \mathcal{B}_O , e o vector posição $x = \overrightarrow{OP}$.

- ♣ Em estática, os vínculos: $f_i(x_j) = 0$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq m \leq 2$.
- ♣ Coordenadas lagrangianas q_j t.q. $x_j = \hat{x}_j(q_k)$, $1 \leq j \leq 3$.

Princípio dos trabalhos virtuais em estática

Acréscimos virtuais

♣ Dando a q_j um acréscimo δq_j compatível com os vínculos ($\delta q_j = \text{forma diferencial}$), temos uma variação de x_i correspondente, ou seja o **deslocamento virtual compatível com os vínculos** $\delta x := \delta x_i \underline{e}_i$, onde o acréscimo virtual δx_i é definido como o diferencial de $x_i = \hat{x}_i(q_j)$, i.e., $\delta x_i := \sum_j \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$.

Acréscimos reais

♣ No caso de termos o deslocamento real, então $\delta q = q'(t)dt$ e $\delta x_i = dx_i = \sum_j \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} dq_j = \sum_j \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} q'_j(t)dt = \frac{dx_i}{dt} dt$ associado ao movimento real do sistema $t \mapsto q_j(t)$.

♣ Lembrete: δu é um diferencial exacto se pode ser escrito como $\exists u : \delta u = du$ (sua integração longo um caminho depende apenas das extremidades).

Teorema dos trabalhos virtuais em estática

Definição

O trabalho virtual de uma força \vec{F} aplicada a x é $(\vec{F}, \delta x)$, onde $\vec{F} = \vec{\ell} + \vec{e}$, com \vec{e} , as forças exteriores.

Teorema

Seja I um intervalo de tempo e seja x no repouso (em equilíbrio) em $t = t_0 \in I$ no referencial \mathcal{B}_O , sujeito em I a vínculos sem atrito e independentes do tempo. Então $x(t)$ é em equilíbrio em I e em \mathcal{B}_O se, e somente se, para qualquer deslocamento virtual δx compatível com os vínculos, o trabalho virtual da soma das forças exteriores é nula em I : $(\vec{e}, \delta x) = 0$.

Força generalizada \vec{Q}

$$0 = \langle \vec{e}, \delta x \rangle = \sum_j \sum_i (e_i, \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}) \delta q_j = \sum_j Q^j \delta q_j$$

$$\Rightarrow Q^j = 0, \forall 1 \leq j \leq n = 3 - m, \text{ ou } 0 = \vec{Q} = (Q^1, \dots, Q^n).$$

Força virtual e potencial

Força externa deriva de um potencial

Existe $U = \hat{U}(x_i)$ diferenciável t.q. $\vec{e} = -\nabla \hat{U}$. Portanto temos

$$Q^j := (\vec{e}, \frac{\partial x}{\partial q_j}) = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \hat{U}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial q_j}, \text{ com } U = \tilde{U}(q_k).$$

♣ Ou seja: $\vec{e} = -\nabla_x \hat{U} \implies \vec{Q} = -\nabla_q \tilde{U}$.

O Teorema pode ser re-escrito como

Seja I um intervalo de tempo e seja x no repouso (em equilíbrio) em $t = t_0 \in I$ em \mathcal{B}_O e sujeito em I a vínculos sem atrito e independentes do tempo. Então $x(t)$ é em equilíbrio para todos os $t \in I$ e em \mathcal{B}_O se, e somente se, as forças generalizadas são nulas em I : $Q^j = 0 \ \forall 1 \leq j \leq 3 - m$.

Exemplo

Caso de uma massa pontual numa circunferência: $q = \theta$,
 $U(\theta) = -mgr \sin \theta$ e $Q(\theta) = mgr \cos \theta$.

Trabalhos virtuais em dinâmica

Temos os vínculos: $f_i(x_j; \mathbf{t}) = 0$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq m \leq 2$ e as coordenadas lagrangianas q_j t.q. $x_i = \hat{x}_i(q_j)$, $1 \leq i \leq 3$.

Relação fundamental da dinâmica

♣ A soma das forças externas, de vínculo e de inércia é nula.

$$\text{Em } \mathcal{B}_O : \quad \vec{F} - m\vec{a} = 0, \quad \vec{F} = \vec{\ell} + \vec{e}.$$

♣ A relação $(\vec{\ell}, \delta x) = 0$ implica que

$$0 = (\vec{F} - m\vec{a}, \delta x) = \sum_j Q^j \delta q_j - m(\vec{a}, \delta x).$$

♣ Seja $\delta x_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$ o diferencial de $x_i = \hat{x}_i(q_j)$.

Calculo de $(\vec{a}, \delta x)$

$$m(\vec{a}, \delta x) = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}, \delta x\right) = m \sum_k \left(\frac{d\vec{v}}{dt}, \frac{\partial x}{\partial q_k}\right) \delta q_k =$$

$$m \sum_k \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{v}, \frac{\partial x}{\partial q_k} \right) - \left(\vec{v}, \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_k} \right) \right] \delta q_k.$$

Operador de Lagrange

Funcional velocidade

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} = \sum_j \frac{\partial x}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x}{\partial t} = \hat{v}(q_k, \dot{q}_k; t).$$

Portanto, derivando, temos: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x}{\partial q_k}$. Temos também:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_k} = \sum_j \frac{\partial^2 x}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 x}{\partial q_k \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_j \left(\frac{\partial x}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x}{\partial t} \right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_k}.$$

Isto justifica a permutação das derivadas parciais em q_j e total no tempo.

Voltamos ao cálculo de $m(a, \delta x)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\vec{v}, \frac{\partial x}{\partial q_k} \right) - \left(\vec{v}, \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_k} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\vec{v}, \frac{\partial v}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\vec{v}, \frac{\partial v}{\partial q_k} \right) = \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 \right). \end{aligned}$$

Operador de Lagrange

$$\text{Portanto: } m(\vec{a}, \delta x) = \sum_k \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \right] T \delta q_k, \quad T = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2.$$

Funcional de Lagrange

Trabalhos virtuais em dinamica

A relação $0 = (\vec{F} - m\vec{a}, \delta x)$ implica

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q^k, 1 \leq k \leq n.$$

Caso das forças potenciais

$Q^k = -\frac{\partial U}{\partial q_k}$ (onde $U = \tilde{U}(q_k)$) \Rightarrow

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_k} \right] L = 0, \quad L = T - U,$$

chamadas as equações lagrangianas do ponto, onde L é o Lagrangiano do ponto.

♣ O numero de tal equações diferenciais do segundo ordem é igual ao numero de graus de liberdade do sistema.

Variação de um funcional

Comprimento de uma curva

Seja uma curva

$$\gamma = \{(t, x) : x = \hat{x}(t) \in \mathbb{R}^3, t_0 \leq t \leq t_1; \hat{x}(t_0) = a, \hat{x}(t_1) = b\}.$$

O funcional comprimento é: $\Phi(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}_i(t)^2} dt$.

Definição

♣ Um “funcional” é uma aplicação do conjunto de curvas, em \mathbb{R} .

♣ Uma variação admissível h é uma curva

$$\gamma' = \gamma + h := \{(t, x) : x = \hat{x}(t) + h(t); h(t_0) = h(t_1) = 0\}.$$

Variação ou Diferencial de Fréchet de um funcional

O funcional Φ é diferenciável se $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = F[h] + R_\gamma(h)$, onde F é linear e contínuo em h e $R(h, \gamma) = O(h^2)$ é o resto tal que $\frac{|R_\gamma(h)|}{\|h\|_X} \rightarrow 0$ quando $\|h\|_X \rightarrow 0$ (convergência uniforme).

(Gâteaux-diferenciável se $\frac{|R_\gamma(th)|}{t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$).

Pontos estacionários de um funcional, Euler-Lagrange

Teorema 1

Seja $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$, onde $L(u, v, t)$ é diferenciável,

e $\gamma = \{(t, q) : q = \hat{q}(t) \in \mathbb{R}^n, t_0 \leq t \leq t_1, \hat{x}(t_0) = a, \hat{x}(t_1) = b\}$.

Então Φ é diferenciável, e a sua diferencial é

$$F[h] = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) (t) \cdot h(t) dt. \quad (\star)$$

Ponto estacionário (definição)

Uma curva γ é um extremal de Φ ou um ponto estacionário se $F[h] = 0$, $\forall h$ variação admissível.

Teorema 2: Equações de Euler-Lagrange

A curva $\gamma : q = \hat{q}(t)$ é um extremal de Φ no conjunto de curvas tais que $q(t_0) = q_0$ e $q(t_1) = q_1$, se e somente se, em $q = \hat{q}(t)$:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad \forall k.$$

Princípio de mínima acção de Hamilton

Teorema 3: Princípio de “minima” acção de Hamilton

O movimento do sistema mecânico conservativo $\frac{d}{dt}(mv) + \nabla U = 0$ coincidem com os pontos estacionarios do funcional **acção**:

$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$, onde $L = T - U$ é a diferença entre a energia cinetica e potencial do sistema, chamada Lagrangiano de γ . Portanto, verifica-se Euler-Lagrange, i.e.,

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad \forall k, \quad \text{ou} \quad \boxed{\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}, p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad \forall k,}$$

onde $1 \leq k \leq n$, com n o numero de graus de liberdade do sistema, e p_k , o k .mo **momento linear generalizado**. Em particular, sem vinculos, $n = 3N$ com N o numero de massas pontuais do sistema. Neste caso, as coordenadas Cartesianas são $q_k = x_k$.

Independência no sistema de coordenadas

♣ Seja $\{q_i\}$ e $\{x_j\}$ dois sistemas de coordenadas generalizadas; seja $L(q_i, \dot{q}_i) = \tilde{L}(x_j, \dot{x}_j)$

Lemma: independência no sistema de coordenadas

A propriedade, para uma trajetória, de ser extremal duma acção é independente do sistema de coordenadas.

♣ Dem. Temos $x = \hat{x}(q) \Rightarrow \dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$ e $\frac{\partial}{\partial q_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j}$

$$= \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j}.$$

Temos também $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j}.$

Portanto, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_j} \right) = \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_j} \right)$ e

$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_j}.$ Então

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_j} \right)$$

♣ Demostrámos que EL nas coordenadas $q \Rightarrow$ EL nas coordenadas x . Portanto EL estão independentes do sistema de coordenadas.

Exemplo 1

Massa pontual “livre”, ou “sem forças” exteriores:

$L = T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. Equações de Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \equiv 2^a$

Lei de Newton ; Princípio de Hamilton: $x(t)$ extremal de

$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)dt$: é um mínimo, pois que Φ é convexo. O

mínimo é o movimento do sistema, ou seja as retas $x(t) = vt + x_0$.

Note que as retas são mínimos do comprimento. $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}(t)^2}dt$.

Exemplo 2

Coordenadas generalizadas polares: $q_1 = r, q_2 = \theta$. Temos

$T(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$ e $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q_1)$. Os

momentos lineares generalizados são $p_1 = m\dot{r}$ e $p_2 = mr^2\dot{\theta}$.

♣ Euler-Lagrange 1: $\dot{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial r}$ ou $m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \partial_r U$.

♣ Euler-Lagrange 2: $\dot{p}_2 = 0$ ou $p_2 = mr^2\dot{\theta} = K = \text{cste}$ (de Kepler).

Sistemas. Newton vs. Lagrange

Sistema SEM vínculos:

Equações de Newton chegam.

Sistema COM vínculos:

Equações de Newton NÃO chegam:

♣ As equações do movimento em coordenadas Cartesianas não incorporem os vínculos. Tem que se determinar as eq. satisfeitas pelos vínculos, e resolve-las simultaneamente com o movimento.

♣ As forças de vínculo ℓ^A não são conhecidas:

$$m_A \dot{v}^A = e^A + \ell^A, \quad 1 \leq A \leq N.$$

♣ As vezes Newton permite de determinar os vínculos, como no caso (a seguir) do pendulo simples.

Caso de um sistema= N pontos materiais

♣ $f_i(x, y, z : t) = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq m < 3N.$

♣ $x_i = \hat{x}_i(q_j), \quad 1 \leq i \leq 3N, \quad 1 \leq j < 3N - m.$

Caso de um sistema= N pontos materiais

Lagrange+d'Alembert num sistema

$$\sum_A m_A \dot{x}^A \cdot \delta x^A = \sum_A (e^A + \ell^A) \cdot \delta x^A = \sum_A e^A \cdot \delta x^A \Rightarrow$$

$$\sum_A m_A \dot{x}^A \cdot \frac{\partial x^A}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_A e^A \cdot \frac{\partial x^A}{\partial q_j} \delta q_j \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_A m_A \dot{x}^A \cdot \frac{\partial x^A}{\partial q_j} = \sum_A e^A \cdot \frac{\partial x^A}{\partial q_j} = Q^j, \forall j.}$$

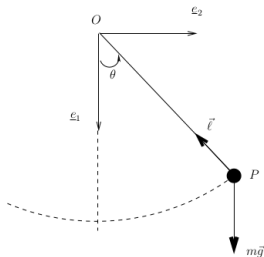
Teorema

Num sistema onde os vínculos são independentes, e não trabalham:

$$\boxed{\sum_A m_A \dot{x}^A \cdot \frac{\partial x^A}{\partial q_j} = Q^j = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \forall j = \dots, n.}$$

Caso com atrito

Supomos que existe uma função $F(\dot{x}_i)$ tal que as forças de atrito são $f_i := \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$. Portanto $Q_j = f_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}$.



♣ Ha (pelo menos) 4 caminhos para encontrar as equações do movimento:

$$\ell \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \quad (\star)$$

$$\overrightarrow{OP} = \ell \underline{g}_r, \ell = |\overrightarrow{OP}|, \cos \theta = \underline{e}_1 \cdot \overrightarrow{OP},$$

$$T = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2 \text{ e } U = -mgl \cos \theta.$$

1) Lagrangiano ou Euler-Lagrange:

$$q = (q_1, q_2) = (r, \theta) \implies$$

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \right) (T(q, \dot{q}) - U(q_2)) \implies (\star).$$

2) Conservação da energia mecânica:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \implies (\star).$$

3) 2ª Lei de Newton no referencial $\{\underline{g}_r, \underline{g}_\theta, \underline{e}_z\}$

legado a P : $m\vec{g} + \vec{R} = m(\vec{a}_R + \vec{a}_T + \vec{a}_C)$, onde

$$\vec{v}_R = 0 \implies \vec{a}_R = \vec{a}_C = 0 \text{ e } \vec{a}_T =$$

$$\ddot{\theta} \underline{e}_z \times \ell \underline{g}_r + \dot{\theta} \underline{e}_z \times (\dot{\theta} \underline{e}_z \times \ell \underline{g}_r) = \ell \ddot{\theta} \underline{g}_\theta - \ell \dot{\theta}^2 \underline{g}_r \implies$$

$$(\text{longo } \underline{g}_r : R = mg \cos \theta + \ell \dot{\theta}^2), \text{ e } (\star) \text{ longo } \underline{g}_\theta.$$

4) Conservação do momento linear:

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP} \times m\vec{v}) = \overrightarrow{OP} \times (\vec{R} + m\vec{g}) = \overrightarrow{OP} \times m\vec{g},$$

$$\text{onde } \overrightarrow{OP} = \ell \cos \theta \underline{e}_1 + \ell \sin \theta \underline{e}_2 \implies (\star).$$

Pequenas oscilações

♣ Sabemos que $T(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{x} \cdot \dot{x} = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial x}{\partial q_i}(q) \frac{\partial x}{\partial q_j}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$
 $= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} T_{ij}^0 \dot{q}_i \dot{q}_j + O(|q||\dot{q}^2|)$, onde $T_{ij}^0 = m \frac{\partial x}{\partial q_i}(0) \frac{\partial x}{\partial q_j}(0)$
 \Rightarrow os termos no cubo da oscilação em torno de $q = 0$ são considerados como negligíveis.

♣ No caso de um sistema: $T(q, \dot{q}) = \sum_{A=1}^N \frac{m_A}{2} \dot{x}^A \cdot \dot{x}^A \Rightarrow$
 $T(q, \dot{q}) \sim \frac{1}{2} T_{ij}^0 \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} [\dot{q}]^t T^0 [\dot{q}]$, $T_{ij}^0 = \sum_{A=1}^N m_A \frac{\partial x^A}{\partial q_i}(0) \frac{\partial x^A}{\partial q_j}(0)$.

♣ Temos $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$ quando $q = \dot{q} = \ddot{q} = 0$. Portanto, por Euler-Lagrange: $\frac{\partial U}{\partial q_i}(0) = 0$. Por Taylor,

$$U(q) = U(0) + \frac{\partial U}{\partial q_i}(0) q_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}(0) q_i q_j + O(|q|^3) \Rightarrow$$

$$U(q) \sim \frac{1}{2} U_{ij}^0 q_i q_j = \frac{1}{2} [q]^t U^0 [q], \text{ onde } U^0 := \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}(0).$$

Pequenas oscilações

Teorema (Pequenas oscilações)

Assumindo pequenas oscilações em torno de $q = 0$, Euler-Lagrange escreve-se como: $0 = T^0 \ddot{q} + U^0 q$. (\star)

Solução em pequenas oscilações

As soluções de $0 = T^0 \ddot{q} + U^0 q$ são do tipo

$$q = \alpha \cos(\omega t + \delta), \quad \text{onde} \quad \omega : (U^0 - \omega^2 T^0) \alpha = 0$$

♣ Tais ω são chamadas frequências normais do sistema, e são solução de

$$\det[U^0 - \omega^2 T^0] = 0.$$

♣ Tais $q = \alpha \cos(\omega t + \delta)$ associados são chamados modos normais do sistema.

Sistemas autônomos

Teorema: A função energia

Se um tal sistema for também potencial (i.e. $\exists U : Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$), então verifica-se: $0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}$, $\forall j = \dots, n$. Isto equivale a:

$$\boxed{\frac{d}{dt} E = -\frac{\partial L}{\partial t}},$$

onde $E := \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$ é chamada a **energia do sistema**. (★)

Teorema: sistema autônomo (ou conservativo)

Um sistema onde os vínculos são independentes, não trabalham e não dependem do tempo (i.e., $\partial_t x_i = 0$) é autônomo se L não depende **explicitamente** do tempo. Portanto a energia E é a igual a energia mecânica, é conservada, pois que $\frac{d}{dt} E = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, pelo teorema anterior.

Sistemas autônomos

Demonstração

Temos $T = \sum_A \frac{m_A}{2} \|\dot{x}^A\|^2 = \sum_A \sum_j \frac{m_A}{2} \|\nabla_q x^A\|^2 \dot{q}_j^2$ ($\partial_t x_i = 0$).

D'outro lado, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$.

Portanto, $\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T$.

Demostrámos que $E = T + U$ é a energia mecânica do sistema.

Conservação dos momentos generalizados

Definindo $p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, temos p_j e q_j **conjugados**, e

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \text{ e } L = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - E, \text{ onde } E = \text{cste.}$$

Caso quando os vínculos dependem do tempo

Se $x = \hat{x}(q, t)$ with $\partial_t x \neq 0$ portanto mesmo no caso autônomo (i.e. $\partial_t L = 0$), temos conservação da função energia $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$, mas a energia mecânica não é conservada.

Transformada dual de Legendre (1752-1833)

♣ Seja $F = F(u) = F(u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{C}_u^2$ t.q. $\det D^2 F \neq 0$ (assim F é invertível)

♣ Define $v_i = \hat{v}_i(u) := \frac{\partial F}{\partial u_i}(u)$. Temos também $u_i = \tilde{u}_i(v)$.

♣ Definimos um novo funcional, a **transformada de Legendre** de F , como $\boxed{G(v) := \sum_{i=1}^n u_i v_i - F(u)} = \sum_{i=1}^n \tilde{u}_i(v) v_i - F(\tilde{u}(v))$.

♣ Variação de G para acréscimos δv de v : $\delta u = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \delta v \Rightarrow$
 $\delta G = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial v_i} \delta v_i = \sum_{i=1}^n (u_i \delta v_i + v_i \delta u_i) - \frac{\partial F}{\partial u_i} \delta u_i = \sum_{i=1}^n u_i \delta v_i$
 $\Rightarrow \boxed{u_i = \tilde{u}_i(v) = \frac{\partial G}{\partial v_i}(v)}.$

Lembrete: diferenças (“acrescimos virtuais”)

♣ **Acrescimo virtual** $\delta v =$ forma diferencial com variáveis q_i t.q.
 $\int_{v_1}^{v_2} \delta v$ depende do caminho entre v_1 e v_2 .

Ou seja, sendo $\delta v = f_i(q_j) dq_i$ e sendo Γ_1 e Γ_2 dois caminhos distintos entre os pontos A e B na variedade dos q 's, temos

$$\int_{\Gamma_1} \delta v - \int_{\Gamma_2} \delta v = \int_{\Gamma_1 \cup \{-\Gamma_2\}} f_i(q_j) dq_i = \int_S \text{Curl } f \cdot n dS(q),$$

onde S é uma superfície com bordo $\Gamma_1 \cup \{-\Gamma_2\}$.

♣ O diferencial é dito **exacto**, ou seja $\int_{\Gamma_1} \delta v = \int_{\Gamma_2} \delta v$ se $\exists v$ t.q.
 $f = \nabla_q v$, pois que $\text{Curl}_q \nabla_q v = 0$. Assim $\delta v = \frac{\partial v}{\partial q_i} dq_i$ é exacto.

♣ **Acrescimo real**: $q_i = \hat{q}_i(t)$, portanto

$\delta v = \frac{\partial v}{\partial q_i} dq_i = \frac{\partial v}{\partial q_i} q'_i(t) dt = v'(t) dt =$ diferencial **exacta** t.q.

$\int_{v_1}^{v_2} \delta v = \int_{t_1}^{t_2} v'(t) dt = v(t_2) - v(t_1)$ não depende do caminho (mas apenas dos tempos inicial e final).

Transformada dual de Legendre (1752-1833)

DUALIDADE

Velho Sistema

Funcção: $F(u)$

Variável: u_1, \dots, u_n

Novo Sistema

Funcção: $G(v)$

Variável: v_1, \dots, v_n

Transformação

$$G = \sum_{i=1}^n u_i v_i - F(u)$$

$$v_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}$$

$$F = \sum_{i=1}^n u_i v_i - G(v)$$

$$u_i = \frac{\partial G}{\partial v_i}$$

Formalismo Hamiltoniano (Lagrange-Cauchy-Hamilton)

♣ Seja $F_w(u) := F(w; u) \in \mathcal{C}_u^2$ e fazemos a transformação de Legendre de $u \mapsto F_w(u) : G_w = \sum_{i=1}^n u_i v_i - F_w(u)$. Temos

$$\frac{\partial F_w}{\partial w_i} = - \frac{\partial G_w}{\partial w_i}.$$

Aplicação ao Lagrangiano $F_{q,t}(\dot{q}_i) := L(q_i; \dot{q}_i; t)$

♣ As novas variáveis são chamadas **momentos**: $p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

♣ A nova função é chamada o **Hamiltoniano**, ou a **energia**:

$$H := \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L = \hat{H}(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t).$$

♣ Vimos que corresponde a energia mecânica total no caso de um sistema autônomo com vínculos independentes do tempo.

Formalismo Hamiltoniano (Lagrange-Cauchy-Hamilton)

Equações do movimento segundo Lagrange-Cauchy-Hamilton

Formalismo Lagrangiano

Lagrangiano: $L(q_i; \dot{q}_i; t)$

Variáveis activas: velocidades \dot{q}_i

$$H := \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Euler-Lagrange: $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

Formalismo Hamiltoniano

Hamiltoniano: $H(q_i; p_i; t)$

Variáveis: momentos p_i

$$L := \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \text{ \& } \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$



Propriedade: $\frac{d}{dt}H = \partial_p H \dot{p} + \partial_q H \dot{q} + \partial_t H = \partial_t H = -\partial_t L.$

Coordenadas cíclicas

Coordenada cíclica ou ignorável

É uma coordenada q_i ausente do Lagrangiano, ou seja $\partial_{q_i} L = 0$.

Portanto a equação de Euler-Lagrange correspondente é

$\frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}_i} L = 0$, ou seja o momento linear conjugado $p_i = \partial_{\dot{q}_i} L$ é conservado: $p_i = \text{cte}$. Um tal p_i é chamado *integral primeiro* do movimento.

Exemplo do Hamiltoniano

O Hamiltoniano de um sistema conservativo (i.e., autônomo) é um *integral primeiro* do movimento.

♣ DEM. Pelas equações de Hamilton, temos $\frac{d}{dt} H = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$, pois t é uma variável passiva na transformada de Legendre. (★)

(Também pode ser visto pelo teorema de sistemas autônomos, se os vínculos não trabalham e não dependem do tempo explicitamente).

Parênteses de Poisson (1781-1940)

Seja $f(p, q; t)$ e $g(p, q; t)$ duas funções de p , q e do tempo.

Parêntese de Poisson

A parêntese de Poisson de f e g é $[f, g] = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}$.

Derivada temporal como parênteses de Poisson

Temos $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}$.

Integral primeiro do movimento (ou constante do movimento) mediante as parênteses de Poisson

A função f é um integral primeiro do movimento se $[f, H] + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

Equações do movimento mediante as parênteses de Poisson

♣ De $x_i = \hat{x}_i(q_j)$, temos $q_j = \hat{q}_j(x_i)$. Portanto

$$\begin{cases} \dot{p}_i &= [p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= [q_i, H] = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}, \text{ pois que } \partial_t q_j = \partial_t p_j = 0.$$

Teorema de Poisson

Algumas propriedades das parênteses de Poisson

♣ $[f, g] = -[g, f]$, e então $[f, f] = 0$

♣ $\frac{\partial}{\partial t}[f, g] = [\frac{\partial}{\partial t}f, g] - [\frac{\partial}{\partial t}g, f] = [\frac{\partial}{\partial t}f, g] + [f, \frac{\partial}{\partial t}g]$

♣ Jacobi: $\forall f, g, h : [f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$

Teorema de Poisson

Se f e g são integrais primeiros do movimentom então também $[f, g]$ é um integral primeiro do movimento.

♣ DEM. Pela definição de integral primeiro do movimento e as 3 propriedades das parenteses de Poisson. (★)

Gerador de integrais primeiros para sistemas conservativos

Seja f um integral primeiro do movimento. Portanto $[f, H]$ também é um integral primeiro do movimento. Pela definição $\frac{\partial f}{\partial t} = -[f, H]$ deduzimos que $\frac{\partial f}{\partial t}$ é um integral primeiro do movimento, tal como todas as $\frac{\partial^k f}{\partial t^k}$, $k \in \mathbb{N}_*$.