Mecânica racional

Aulas teoricas

Docente: Nicolas Van Goethem

vangoeth@fc.ul.pt,
Sala 6.2.20.

May 21, 2021

As 3 componentes do curso

Parte teorica

Apreender os conceitos, as ferramentas. (Com slides e quadro).

Parte pratica

Fazer contas, exercicios. Complemento da parte teorica. (Em pequenos grupos, com desempenho dos alunos ao quadro).

Avaliação

Fim do semestre (oral ou escrito?). Avaliação intermedia? Trabalhos individuais de aprofundamento da materia. Trabalhos individuais de resolução exercicios (homework).

Conteúdo das aulas teoricas -1-

- Aula 1: Estoria da disciplina, Mecânicos famosos (26/2)
- Aula 2: Conceitos, Cinemática, Movimento em $\mathbb{R}^N$ (01/3)
- Aula 3: Dinâmica, Leis de Newton (5/3)
- Aula 4: Campo central, leis de conservação (08/3)
- Aula 5-6: Dinâmica do ponto e movimentos conservativos com 1 grau de liberdade (12/3 e 15/3)
- Aula 7-9: Dinâmica de N corpos (19 a 26/3 e 05/04)
- Aula 10: Colisões, problemas de alvos-projéteis (12/4)
- Aula 11: Trabalhos virtuais em statica e dinâmica (16/4)
- Aula 12-13: Mecânica de Lagrange, estudo do pendulo, Sistemas (19/4 a 23/4)

Conteúdo das aulas teoricas -2-

- Aula 14, 15 e 16: Teorema de Noether e Transformação de Legendre, Formalismo de Hamilton, Teorema de Poincaré (30/4 e 03/05)
- Aula 17: Estudo da curva Braquistócrona (07/05)
- Aula 17: Estudo de geodésicas (10/05)

Referências bibliograficas

- V. Arnold: Mathematical Methods of Classical Mechanics
- **M. Lunn: A first course in Mechanics**
- **R. Gregory: Classical mechanics**
- **N. Rouche: Mécanique rationnelle**

As 3 componentes da disciplina

Observação

A observação do mondo exterior (o “que”) é seguida do questionamento (o “como”).

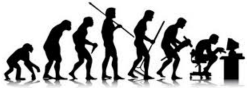
Experimentação

Melhoria do quotidiano.
Mecânica vem do grego “mêchhanê”, a **máquina**. Para os gregos a mecânica permite de **superar a natureza**.
Mais recentemente: permite de perceber os fenomenos e de validar as hipóteses.

Conceptualisação

Permite formalizar os fenomenos e fazer argumentação logica.
Nascimento de teorias ou de “modelos”: de Newton, da relatividade de Einstein/Poincaré/Lorenz, da mecânica quântica.

Nascimento



★ Estoria da Mecânica é estoria do Homo (e é estoria do pensamento)  $\rightsquigarrow$

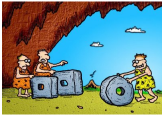
 $\rightsquigarrow$

★ Sobrevivência $\to$ Encontrar “truques” $\to$ Evolução das **ferramentas**

$\Rightarrow$

★ Descobertas de varios **mecanismos** e **movimentos** ($=$ Mecânica)

Desenvolvimento 1 (Mesopotamia, Egito)

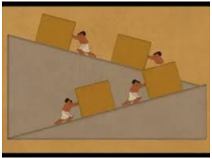


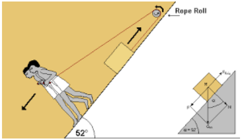
★ Como reduzir o **atrito**?

★ Primeira roda é cheia ∼ 3000 BC (Slovenia)

★ Carro com 4 rodas ∼ 2600 BC (Mesopotamia).

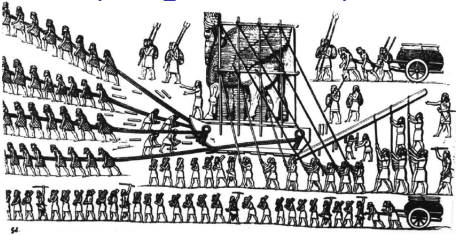
★ Pirâmide de Kheops (∼ 2600 BC)





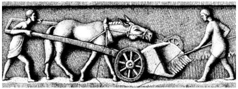
★ Truques para trasportar blocos de 3 toneladas?
Plano inclinado, rotas com inclinação minima, sistema de polias ...

Desenvolvimento 2(Grego-Romano)



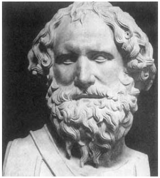
★ Basso relievo asiriano ($\sim$ 700 BC).
Mecânica=**Ciência das máquinas**: utilização de troncos, alavancas, cordas, carros com rodas "modernas"...

★ Carro romano. Na agricultura, a **energia** é fornecidas pelos animais.

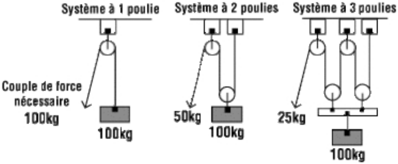


★ O cavalo é mais rapido mas tem menos **potençia** do que o boi.

Mecânicos famosos 1: Arquimedes

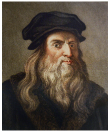


$\sim$ 287-212 BC. Syracusa (Sicilia), Alexandria (Grecia).



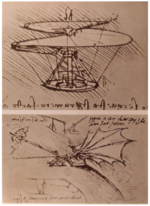
♣ A regra de ouro das máquinas: como diminuir as **forças**? (formalizado mais tarde por Heron de Alexandria $\sim$ 50 AC).
♣ Primeiro ciêntista a prestar atenção à teoria bem como à experimentação.
♣ Metodo do **passagem ao limite**.
♣ **Empuxo** de Archimedes (fluidos).

Mecânicos famosos 2: Leonardo da Vinci

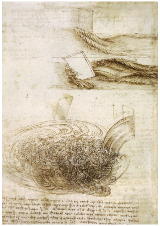


$\sim$ 1452-1519. Firenze (Itália).

♣ Não é bem um teorico, mas sim um artista, um inventor.



★ Concepção de máquinas e mecanismos. Estudo do movimento.
★ Primeiras máquinas voantes. Máquinas de guerra.



★ Observação do voo dos pássaros (mecanismo das asas).
★ Estudo da turbulência nos fluidos.

Mecânicos famosos 3: Nicolau Copérnico

∼ 1473-1543. Polonha.

♣ Observe incoerências na **observação** das trajetórias dos planetas.

↬ Propõe o heliocentrismo.

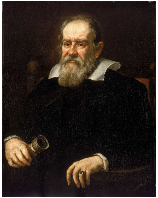
♣ Revulòção "Coperniciana"= do pensamento.

♣ Abordagem "moderna":

▲ **Axiomas**: no texto *Commentariolus*

▲ **Provas** matemáticas: no texto *De Revolutionibus*

Mecânicos famosos 4: Galileo Galilei



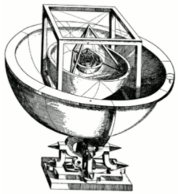
$\sim$ 1564-1642. Pisa (Itália).

★ Experimentação das oscilações do pendulo.

▲ Inventor da bomba d'agua.
▲ MRUV: *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado*.
▲ Trajetórias parabolicas de projéctis.
▲ **Provas experimentais da teoria de Copérnico**: invenção do telescopio e observação dos satelites de Júpiter e fases de Vênus, etc ...

Mecânicos famosos 4: Johannes Kepler

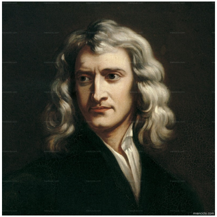
$\sim$ 1571-1630. Alemanha.



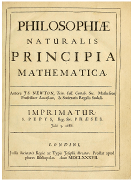
★ O sistema solar segundo Kepler (baseado em poliedros).

▲ Trajetorias eliticas dos planetas (em *Astronomia Nova, 1609*)
▲ Principios de Optica.
▲ Problema de 2 corpos (solução analitica).
▲ Conjetura de Kepler (problema de matemática). Densidade de esferas (demonstrado apenas em 2014).

Mecânicos famosos 6: Isaac Newton



$\sim$ 1642-1727. Inglaterra.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

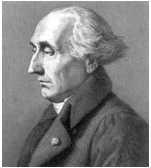
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

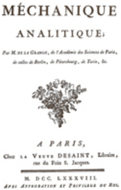
★*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687) $\Rightarrow$ Origem da Mecânica moderna, "racional", "classica".

▲ A partir de Kepler: força centrifuga, lei em $1/d^2$
▲ Principios de Optica (natureza corpuscular da luz, difracção).
▲ Lei da Gravitação, conceito de peso (*gravitas*= gravidade).
▲ **As 3 leis do movimento**.

Mecânicos famosos 7: Joseph-Louis Lagrange



$\sim$ 1736-1813. Itália, França



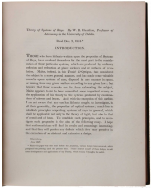
MÉCHANIQUE
ANALITIQUE;
Par M. DE LA GRANGE, de l'Académie des Sciences de Paris,
de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, &c.
A PARIS,
Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire,
rue du Foin S. Jacques.
M. DCC. LXXXVIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

★ Invenção do formalismo da mecânica racional, *analítica*.
★ Considera a Mecânica como um ramo plenamente da matemática.

▲ Calculo das variações
▲ Principio de minima acção.
▲ O Lagrangiano, os multiplicadores de Lagrange.
▲ Mecânica celeste, problema dos 3 corpos.

Mecânicos famosos 8: William Rowan Hamilton

$\sim$ 1805-1865. Irlanda.



Theory of Systems of Rays. By W. R. Hamilton, Professor of Astronomy in the University of Dublin.

Read Dec. 3, 1824.*

INTRODUCTION.

THOSE who have hitherto written upon the properties of Systems of Rays, have confined themselves for the most part to the consideration of those particular systems, which are produced by ordinary reflexion and refraction at plane surfaces and at surfaces of revolution. Malus, indeed, in his *Traité D'Optique*, has considered the subject in a more general manner, and has made some valuable remarks upon systems of rays, disposed in any manner in space, or issuing from any given surface according to any given law; but besides that those remarks are far from exhausting the subject, Malus appears to me to have committed some important errors, in the application of his theory to the systems produced by combinations of mirrors and lenses. And with the exception of this author, I am not aware that any one has hitherto sought to investigate, in all their generality, the properties of optical systems; much less to establish principles respecting systems of rays in general, which shall be applicable not only to the theory of light, but also to that of sound and of heat. To establish such principles, and to investigate such properties is the aim of the following essay. I hope that mathematicians will find its results and reasonings interesting, and that they will pardon any defects which they may perceive in the execution of so abstract and extensive a design.

Observatory,
June 1827.

* Since this paper was first read before the Academy, various delays have occurred, which postponed the printing until the present time. I have availed myself of these delays, to add some developments and applications of my Theory, which would, I thought, be useful.

★ *Theory of Systems of Rays: teoria ondulatoria da luz* (1828).

★ Propõe um funcçãional que unifica otica, mecânica e matemática.

▲ O principio variacional de Hamilton permite uma nova formulação da teoria da Mecânica e permite resolver as equações de movimento, como o problema de 3 corpos.

▲ Origem da Mecânica quântica.

Mecânicos famosos 9: Henri Poincaré

$\sim$ 1854-1912. França

★ *Science et hypothèse* (1902).

★ Origem da teoria da relatividade restrita.

▲ Introduz a noção de onde gravitacional.

▲ Corige incoerências observada com Mercúrio.

▲ Problema de 3 corpos: *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* .

▲ Inicio do estudo qualitativo das equações diferenciais.

Principio de relativismo e de determinismo

O espaço e o tempo

O espaço é Euclidiano de dimenção 3, o tempo é de dimenção 1.

O principio de relativismo

- As Leis da Natureza são iguais em qualquer instante e em todos os *referênciais (ou "sistemas de coordenadas") inerciais (R.I.)* (cf. Newton 1).
- Existência é postulada: existe pelo menos um R.I. onde nenhuma força atua sobre uma massa pontual. A mesma tem portanto uma velocidade constante ("uniforme").
- Todos os sistemas em movimento relativo de **traslação uniforme** com respeito a um R.I. são tambem inerciais.

Principio de determinismo de Newton

O estado inical de um sistema define de modo unico o seu movimento futuro. Tambem chamado "principio de **causa-efeito**".

Grupo de Galileo

Espaço Afim $\mathbb{A}^n$

A origem não é fixada (vs. $\mathbb{R}^n$). Grupo das translações de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{A}^n$: $(a, \vec{v}) \to b := a + \vec{v} \in \mathbb{A}^n,\ a \in \mathbb{A}^n, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
Soma não é definida, ao contrario da diferência: $b - a = \vec{v}$. $(\star)$

A estrutura espacio-temporal de Galileo

- O Universo $X \sim \mathbb{A}^4$. Elementos de X = "acontecimentos".
- O tempo: $t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^4$: translações de X): aplicação linear. O núcleo de t=translações **simultaneas**.
- A distância entre 2 acontecimentos simultaneos: $\|x - y\|_{\mathbb{R}^3}$.

Transformação de Galileo

Transformação afim de $\mathbb{A}^4$ que conservam intervalos de tempo e distâncias de acontecimentos simultaneos. $(\star)$

Cinemática e dinâmica

Cinemática

Estudo descritivo do movimento (sem se preocupar das suas causas).

$\looparrowright$ Posição, velocidade, acceleração, trajetória.
Dados num referencial inercial (ou não).

Dinâmica

Teoria explicativa dos movimentos.

$\looparrowright$ Quais são as causas (= as forças)

Movimento em $\mathbb{R}^N$

Movimento

Aplicação diferenciável $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$.

Velocidade: $v(t_0) = \dot{x}(t_0) := \frac{d}{dt}x(t_0)$.
"velocity" vector v; "speed" $\|v\|_E$

Aceleração: $a(t_0) = \ddot{x}(t_0) = \frac{d^2}{dt^2}x(t_0)$.

$\mathrm{Im}(x) =$ **trajetória** de $\mathbb{R}^N$.

$\mathrm{Gr}(x) = \{t, x(t)\} =$ **linha de Universo**.

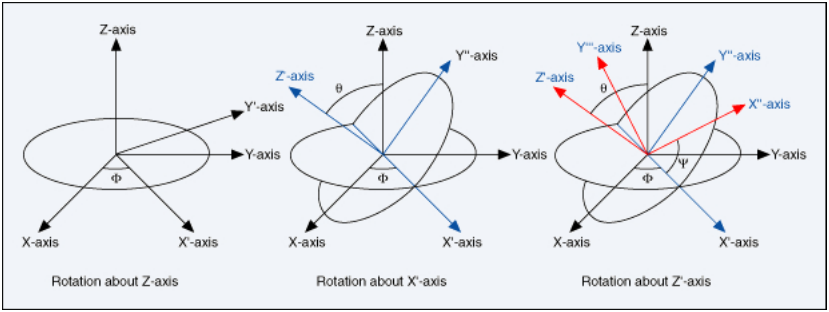
O movimento de N pontos

- Definido como N linhas de Universo num Espaço de Galileo.

$$X : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^3)^N$$

Movimento rigido

- Toma 3 pontos não alinheados P_A:
  $t \mapsto \|P_A(t), P_B(t)\| = cst, \ \forall t, \quad A, B = 1, 2, 3, \ i \neq j.$
- 9 incognitas: $(x_A(P_B)), A, B = 1, 2, 3,$ mas apenas 6 são independentes.
- Movimento rigido$=1$ Translação (3)$+ \ 1$ Rotação (3).
- 3 Ângulos de Euler: Preceção, Rotação, Nutação



Velocidade ângular ou vector de rotação instântanea

- $\mathcal{B}_0 = \{0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ (referencial fixo) e $t \mapsto \mathcal{B}(t) = \{O(t), \underline{g}_1(t), \underline{g}_2(t), \underline{g}_3(t)\}$ (referencial variável).
- Teorema: Existe unica velocidade angular $\vec{\omega}$ t.q. $\mathcal{B}(t) =$ roto-translação de $\mathcal{B}_0$: $\vec{\omega}(t) = \omega_k(t)\underline{g}_k(t)$ onde $\omega_k = \epsilon_{kij}\dot{\underline{g}}_i \cdot \underline{g}_j$. Temos $\frac{d}{dt}\underline{g}_i(t) = \vec{\omega}(t) \times \underline{g}_i(t)$.
Seja $u(t) = u_i(t)\underline{g}_i(t)$ uma funcção vetorial exprimida na base movél. Então
$\frac{d}{dt}u(t) = \dot{u}_i(t)\underline{g}_i(t) + u_i\frac{d}{dt}\underline{g}_i(t) = \dot{u}_i(t)\underline{g}_i(t) + \vec{\omega}(t) \times u(t)$.
- Definição:
A derivada **relativa** de $u(t)$ é $\frac{d}{dt}u(t)_{|\mathcal{B}(t)} := \dot{u}_i(t)\underline{g}_i(t)$
(=derivada para um observador na base movél).
A derivada **absoluta** de $u(t)$ é
$\frac{d}{dt}u(t)_{|\mathcal{B}_0} = \frac{d}{dt}u(t)_{|\mathcal{B}(t)} + \vec{\omega}(t) \times u(t)$
(=derivada para um observador na base fixa).

Velocidad absoluta e relativa -1-

- Velocidade **absoluta** (ou seja, relativa ao referêncial $\mathcal{B}_0$) de $P(t)$ relativamente a 0: temos que derivar no tempo $\overrightarrow{0P}(t) = P(t) = \overrightarrow{0O}(t) + \overrightarrow{OP}(t)$ onde $\overrightarrow{OP}(t) = y_i \underline{g}_i(t)$ é exprimida em $\mathcal{B}(t)$ (nota: y_i por enquanto não depende de t). Temos $v(P(t))_{|\mathcal{B}_0} := \frac{d}{dt}\overrightarrow{0P}(t)$ e $v(O(t))_{|\mathcal{B}_0} := \frac{d}{dt}\overrightarrow{0O}(t)$.
  Portanto a velocidade **de transporte** de $P(t)$ é $v_T(P) := v(P(t))_{|\mathcal{B}_0} = v(O(t))_{|\mathcal{B}_0} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}(t)$, sendo
  $$\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}(t)_{|\mathcal{B}_0} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}(t)$$
  a velocidade absoluta de $P(t)$ relativamente a $O(t)$.
- Nota: neste caso, a velocidade **relativa** (ou seja, relativa ao referêncial $\mathcal{B}(t)$) de $P(t)$ relativamente a $O(t)$ e nula, pois que $\dot{y}_i = 0$.

Velocidade absoluta e relativa -2-

Queremos a velocidade absoluta de $P(t)$ relativamente a 0, agora com $\overrightarrow{OP}(t) = y_i\mathbf{(t)}\underline{g}_i(t)$ (nota: y_i depende de t). Temos que derivar no tempo $\overrightarrow{0P}(t)$ e temos:

$$v(P)_{|\mathcal{B}_0} = v(O(t))_{|\mathcal{B}_0} + \frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}(t)_{|\mathcal{B}_0}.$$

Sendo que

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}(t)_{|\mathcal{B}_0} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}(t) + \mathbf{v_R(P)}.$$

onde $v_R(P) := v(P)_{|\mathcal{B}(t)} = \dot{y}_i(t)\underline{g}_i(t) = (v_R)_i\underline{g}_i(t)$
é a velocidade relativa a $\mathcal{B}(t)$ de $\overrightarrow{OP}(t)$, obtemos

$$v(P)_{|\mathcal{B}_0} = v_T(P) + \mathbf{v_R(P)} = v(O(t))_{|\mathcal{B}_0} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}(t) + \mathbf{v_R(P)}.$$

Acceleração absoluta, relativa, de Coriolis, e de transporte

Acceleração absoluta de $P(t)$ relativamente a 0. Sendo no caso geral, $\overrightarrow{0P}(t) = P(t) = \overrightarrow{0O}(t) + \overrightarrow{OP}(t)$, onde $\overrightarrow{OP}(t) = y_i\mathbf{(t)}\underline{g}_i(t)$, temos que calcular

$$\begin{aligned} a(P)_{|\mathcal{B}_0} &= \frac{d}{dt} v(P)_{|\mathcal{B}_0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(v(O(t))_{|\mathcal{B}_0} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}(t) + \dot{y}_i(t)\underline{g}_i(t) \right) \\ &= a(O)_{|\mathcal{B}_0} + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{OP}(t) + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}(t) \right) \\ &+ \vec{\omega} \times \left(\dot{y}_i(t)\underline{g}_i(t) \right) + \dot{y}_i(t)\vec{\omega} \times \underline{g}_i(t) + \ddot{y}_i(t)\underline{g}_i(t). \end{aligned}$$

Teorema de Coriolis (1835)

Portanto, acabamos de demonstrar o Teorema (Coriolis, 1835):
$a(P)(t)_{|\mathcal{B}_0} = \dot{v}(P)(t)_{|\mathcal{B}_0} = \ddot{P}(t)_{|\mathcal{B}_0} = a_R(P) + a_T(P) + a_C(P)$,
com a acceleração relativa

$$a_R(P) := a(P)_{|\mathcal{B}(t)} = \ddot{y}_i(t)\underline{g}_i(t),$$

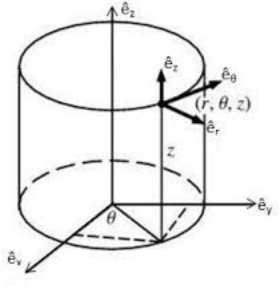
a acceleração de Coriolis

$$a_C(P) = 2\dot{y}_i(t)\dot{\underline{g}}_i(t) = 2(v_R)_i\dot{\underline{g}}_i(t) = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_R,$$

e a acceleração de transporte

$$a_T(P) := a(O)_{|\mathcal{B}_0} + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{OP}(t) + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}(t)\right).$$

Movimento em coordenadas polares cilindricas



$$\underline{g}_r = \cos\theta \underline{e}_x + \sin\theta \underline{e}_y$$
$$\underline{g}_\theta = -\sin\theta \underline{e}_x + \cos\theta \underline{e}_y$$
$$x = x_{2D} = r\underline{g}_r$$

Velocidade, Acceleração, Momento

$$\dot{x}_{2D} = \dot{r}\underline{g}_r + r\dot{\theta}\underline{g}_\theta \ (\star)$$
$$\ddot{x}_{2D} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underline{g}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\underline{g}_\theta \ (\star)$$

Em $3D$

$$x = x_{3D} = r\underline{g}_r + z\underline{g}_z$$
$$\dot{x}_{2D} = \dot{x}_{2D} + \dot{z}\underline{g}_z$$
$$\ddot{x}_{3D} = \ddot{x}_{2D} + \ddot{z}\underline{g}_z$$
$$\omega = \underline{g}_k(\epsilon_{kij}\dot{\underline{g}}_i \cdot \underline{g}_j) = \dot{\theta}\underline{g}_z \ (\star)$$

Acceleração centripeda: $-r\dot{\theta}^2\underline{g}_r$

Primeira lei de Newton

Primeira Lei: O Principio de Inercia

- Sem influências externas sobre uma particula (=massa pontual), a mesma tem velocidade constante.
- Velocidade nula $\Rightarrow$ Reposo.
- Existe pelo menos um referencial onde esta lei é valida.

Segunda lei de Newton

Segunda Lei: O Principio fundamental da Dinâmica

Seja $\mathcal{B}_0$ (Copernico). Então:

$\vec{F} = ma_{|\mathcal{B}_0}$ ou

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \vec{F},$$

$P := m\dot{x} =$ **quantidade de movimento (ou momento linear)**.

♣ A suma de todas as **forças** $\vec{F} =$ **causa** de uma acceleração.

Validação experimental

Medições

- Medição de **força** e de **massa**: escolha de unidade, grandeza padrão: depende pouco do referencial
- Acceleração tambem pode ser medida: depende muito da escolha do referencial
- A lei de Newton é valida só numa subclasse de referênciais.
- A escolha da chronologia: calcular velocidade, acceleração

Dominio de validade da Mecânica classica

- Definição do tempo: **sideral**=angulo horario do ponto vernal.
- Triedro de Copernico (origem no centro do sol, eixos com respeito ás estrelas) $\looparrowright$ Anomalia no movimento da lua.
- **Tempo atómico**=frequência átomo de Caesium.

Expressão num sistema qualquer

Seja $\mathcal{B}_0 =$ Triedro de Copernico.

2a Lei Newton+Coriolis

$\vec{F} = ma_{|\mathcal{B}_0} = m(a_R + a_T + a_C)$ ou seja,

$$ma_R = \vec{F} - ma_T - ma_C,$$

com ma_T, a força **centrifuga**, e ma_C, a força **de Coriolis**

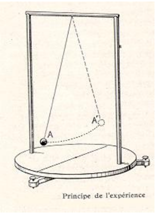
Sistema referencial inercial

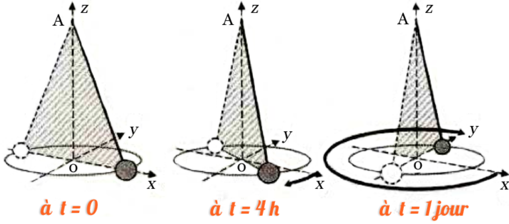
Definido como tal sistema movél onde $ma_R = \vec{F}$.

Teorema (Princípio de Galileo)

Seja $\mathcal{B}(t)$ um sistema referencial. Então $\mathcal{B}(t)$ é um sistema referencial inercial, se e somente se, $\mathcal{B}(t)$ tem, relativamente ao sistema de Copernico, um movimento de translação uniforme. $(\star)$

O pendulo de Foucault





Em $\mathcal{B}_0$, triedro de Copernico. Considere o Plano de Oscilações

$\frac{d}{dt}\vec{P}(t) = \vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t (\vec{g} + \frac{\vec{T}}{m})(\tau)d\tau \in$ Plano(0).

♣ Isto não corresponde á observação (vê figura a direita).

♣ Existe uma rotação do plano.

Em $\mathcal{B}(t)$, referêncial legado a Terra:

$\frac{d}{dt}\vec{P}(t) = \vec{F} - \vec{F}_C - \vec{F}_T \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_{plano} + \vec{v}_\perp$

♣ Onde $\vec{v}_\perp = -\int_0^t (\dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{OP} + 2\vec{\omega} \times \vec{v})(\tau)d\tau$.

♣ Prova que $\omega \neq 0$, observando que $\vec{\omega} = cte =$ Rotação da Terra.

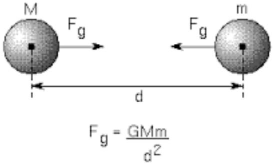
Restrições pelas transformações de Galileo

- Determinismo: $\forall (x(t_0), \dot{x}(t_0)) \in \mathbb{R}^N, \exists! x : [t_0, T] \to \mathbb{R}^N$, t.q. $m\ddot{x}(t) = F(x(t), \dot{x}(t), t). \quad (ODE)$
- Translação do tempo: $x = \varphi$ solução $\Rightarrow x = \varphi(\cdot + s)$ tambem é solução $\Rightarrow m\ddot{x}(t) = F(x(t), \dot{x}(t))$.
- •Translação do espaço: $x = \varphi$ solução $\Rightarrow x = \varphi + r$ tambem é solução
  $\Rightarrow m\ddot{x}_i(t) = F_i(x_j(t) - x_k(t), \dot{x}(t)),\ i, j, k = 1 \cdots N.$

  •Referêncial em movimento de translação uniforme
  $\Rightarrow m\ddot{x}^A(t) = F^A(x^B(t) - x^C(t), \dot{x}^B(t) - \dot{x}^C(t)),\ A, B, C = 1 \cdots N.$
- Rotação $\Rightarrow$ **Isotropia** $\Rightarrow F(Rx(t), R\dot{x}(t)) = RF(x(t), \dot{x}(t))$.

Força de Gravidade

Gravidade entre 2 corpos (Newton)



Gravidade na superficie da Terra

$G = 6.67\ 10^{-11}, M = 5.972\ 10^{24}, R = 6.378\ 10^{12}$ (unidade SI).
Acceleração da gravidade na superficie da Terra:
$g = g_0 = -\frac{F_g}{m} \sim 9,81 m/s^2$ (Galileo).

Gravidade longe da superficie da Terra

Acceleração da gravidade na superficie da Terra: $g(r) = g_0 \frac{R^2}{r^2}$

Movimento de uma massa pontual na superficie da Terra

Conjetura de Galileo e Experiênca de Robert Boyle (1657)

No vazio, todos os corpos caiem da mesma maneira.

▸ Pena e Chumbo no vazio

Movimento de uma massa pontual na superficie da Terra

Segunda lei de Newton: $m\ddot{x} = m\vec{g} + \vec{F}$, onde $\vec{F}$ é a resistência do ar. Experiênca mostra que $\vec{F} = F(\dot{x})$.

Trajectoria parabolica

$\dot{x}(t) = (g + \frac{F}{m})t + v_0$,
$x(t) = (g + \frac{F}{m})\frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$.
♣ Assumindo $F = 0$ temos
$g + \frac{F}{m} = -g_2 \underline{e}_2, x_0 = 0 \Rightarrow x_1(t) = v_{01} t \Rightarrow$

Parabola no espaço: $x_2(t) = \frac{-g_2}{2v_{01}^2} x_1(t)^2 + \frac{v_{02}}{v_{01}} x_1(t)$.

Força central

Problema de dois corpos $\Rightarrow$ força central

♣ Seja duas massas m_1 no ponto P_1 e m_2 no ponto P_2.
♣ $\vec{F}$ central: tem a direcção da reta entre P_1 e P_2 e uma norma que apenas depende da distância relativa r entre P_1 e P_2.
♣ Seja G o centro de massa do sistema, seja $\vec{x}_1 := \overrightarrow{OP_1}$ e $\vec{x}_2 := \overrightarrow{OP_2}$.
♣ Num referêncial centrado em G temos por definição $m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 = 0$. (cf. mais tarde no curso.)
♣ Definimos a posição relativa $\vec{r} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$. Assim $\|\vec{r}\| = r$.
♣ As leis de Newton escrevem-se como $m_1\ddot{\vec{x}}_1 = -\vec{r}f(r)$ e $m_2\ddot{\vec{x}}_2 = \vec{r}f(r)$.
♣ Por diferência temos $m_2\ddot{\vec{r}} = (1 + \frac{m_2}{m_1})\vec{r}f(r)$, ou seja $M\ddot{\vec{r}} = \vec{r}f(r)$, com $M := \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$.
♣ Notas: (i)acceleração é sempre relativa a G; (ii) $\vec{r} = r\underline{g}_r$.

Força central deriva de um potencial V

Força central

$\vec{F} = F(r)\underline{g}_r$. Por exemplo, a Gravidade
$F_g(r) = -\frac{GMm}{r^2} = -\frac{d}{dr}(GMm/r)$, com $O =$ centro da Terra.
♣ Newton: $m\ddot{x} = F(r)\underline{g}_r$, onde $x = r\underline{g}_r$.

Potencial

♣ Seja O e P dois pontos tais que $\overrightarrow{OP} = r\underline{g}_r$.
♣ Temos $\vec{F} = F(r)\underline{g}_r = \frac{F(r)}{r}\overrightarrow{OP}$ com F continua.
♣ Teorema: Tal força deriva de um potencial V.
♣ DEM. Seja $r = (x_i^2)^{1/2}$ e define $V(r) := V(r_0) + \int_{r_0}^{r} f(s)ds$ com $r_0 \neq 0$. Calculamos
$-(\nabla V)_i = -\frac{\partial V(r)}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial r}V(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = -f(r)\frac{x_i}{r}$. Portanto
$-\nabla V = f(r)x = \frac{f(r)}{r}O\vec{P} = \vec{F}$.

Momento angular

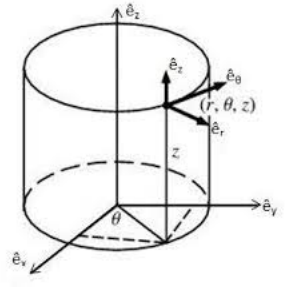
♣ Seja O fixado e seja $x = \overrightarrow{OP}$.

Momento angular

$$L_O := x \times m\dot{x}.$$

(produto vectorial).

Movimento em coordenadas polares cilindricas



$$\underline{g}_r = \cos\theta\,\underline{e}_x + \sin\theta\,\underline{e}_y$$
$$\underline{g}_\theta = -\sin\theta\,\underline{e}_x + \cos\theta\,\underline{e}_y$$

Velocidade, Acceleração, Momento

$$\dot{x}_{2D} = \dot{r}\underline{g}_r + r\dot{\theta}\underline{g}_\theta \ (\star)$$
$$\ddot{x}_{2D} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underline{g}_r + \tfrac{1}{r}\tfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\underline{g}_\theta \ (\star)$$
$$L_0 = x \times m\dot{x} = mr^2\dot{\theta}\underline{g}_z \ (\star)$$

Lei de Newton

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underline{g}_r + \tfrac{1}{r}\tfrac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})\underline{g}_\theta = F(r)\underline{g}_r$$

Movimento central plano

1)$L_O = mK\underline{g}_z$, onde K é constante.

2)$r^2\dot{\theta} = K$.

3)$m\ddot{r} = F(r) + m\frac{K^2}{r^3} = -\partial_r(U + \frac{mK^2}{2r^2})$.

Em $2D$

$$x = x_{2D} = r\underline{g}_r$$

Em $3D$

$$x = x_{3D} = r\underline{g}_r + z\underline{g}_z$$

Conservação da energia mecânica total

♣ Consideramos um caminho entre x_0 e x dois pontos de $\mathbb{R}^3$.

Trabalho de uma força

$$W_F(x; x_0) = \int_{x_0}^{x} F(\xi) \cdot d\xi.$$

Condição de potencialidade

♣ Teorema: F é uma força potencial se o somente se seu trabalho de x_0 a x for independente do caminho, se e somente se $\text{Curl } F = 0.$ $(\star)$

♣ Energia potencial é $U(x) := -W_F(x; x_0)$ e $F = -\text{Grad } U$.
(Ex.: Gravidade: $U(x) = \hat{U}(r) = -k/r = -\frac{GMm}{r}$).

Energia cinética

$$T(\dot{x}) := \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

Conservação da energia mecânica total -2-

Lei de conservação da energia mecânica total (num R.I.)

Teorema:

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0.$$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}T(\dot{x}) = F \cdot \dot{x}(t)$ (=Potência). $(\star)$

♣ Movimento no plano, sistema cilindrinco:

$T(\dot{x}) = \frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \Rightarrow E(t) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \overbrace{U + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2}}^{V}$
$(\bigstar)$

♣ Nota-se que: $V = U + \frac{mK^2}{2r^2} = -\frac{k}{r} + \frac{mK^2}{2r^2}$,
onde K: constante de Kepler e k: constante de Newton (gravifica).

♣ Lei de Newton=conservação da energia mecânica total:
$\frac{d}{dt}E(t) = 0 \Rightarrow m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{mK^2}{r^3}$

Triedro de Frenet-Serret

♣ Seja $C \in \mathbb{R}^3$ uma curva regular. A posição de $x \in C$ é dada por $s \mapsto x(s)$ com $s \in J$ a abcissa curvilinea.

★ Vector tangente $\vec{t} := \frac{\frac{d}{ds}x(s)}{\|\frac{d}{ds}x(s)\|}$. Temos $(\vec{t}, \vec{t}) = 1 \Rightarrow (\vec{t}, \frac{d}{ds}\vec{t}) = 0$.

★ Define a curvatura da curva $\kappa := \|\frac{d}{ds}\vec{t}(s)\|$ e o vector normal $\vec{n}$ tal que $\frac{d}{ds}\vec{t} = \kappa\vec{n}$.

★ Define o triedro de Frenet-Serret como $\{x(s), \vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$ onde $\vec{b} := \vec{t} \times \vec{n}$. É um exemplo de base movél curvilinear.

★ Por $\frac{d}{ds}\vec{b} = \frac{d}{ds}\vec{t} \times n + \vec{t} \times \frac{d}{ds}\vec{n} = \vec{t} \times \frac{d}{ds}\vec{n}$ deduzimos que $\frac{d}{ds}\vec{b} \perp \vec{t}$. D'outro lado $(\vec{b}, \vec{b}) = 1 \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{b}$. Portanto existe $s \mapsto \xi(s)$ tal que $\frac{d}{ds} = -\xi\vec{n}(s)$, onde ξ é chamado torsão da curva.

★ De $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$ deduzimos que $\frac{d}{ds}\vec{n}(s) = -\kappa(s)\vec{t}(s) + \xi(s)\vec{b}(s)$.

★ Finalmente, definindo o vector de Darboux (de rotação infinitesimal) $\vec{\omega}(s) = \xi(s)\vec{t}(s) + \kappa(s)\vec{b}(s)$, obtemos $\frac{d}{ds}\vec{t}(s) = \vec{\omega} \times \vec{t}$, $\frac{d}{ds}\vec{n}(s) = \vec{\omega} \times \vec{n}$ e $\frac{d}{ds}\vec{t}(s) = \vec{\omega} \times \vec{b}$.

Sistema integravél (campo central)

♣ Consideramos um movimento no plano: $t \mapsto (r(t), \theta(t))$.
♣ 2a Lei de Newton $m\ddot{r} = -\partial_r V \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V) = 0$.

Propriedade qualitativa do movimento

♣ $\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r(t)))}$, onde $V = U + \frac{mK^2}{2r^2}$ é o potencial efectivo (por exemplo $U = -k/r$ o potencial de Newton).
$\dot{r} \neq 0 \Rightarrow$ (derivada funcção reciproca) $\frac{dt}{dr} = \pm(\frac{2}{m}(E - V(r)))^{-1/2}$
$\Rightarrow t - t_0 = \int_{r(t_0)}^{r(t)} (\frac{2}{m}(E - V(\xi))^{-1/2} d\xi$.
♣ $\dot{\theta} = \frac{K}{r^2} \Rightarrow \frac{d}{dr}\hat{\theta}(r) = \dot{\theta}\frac{dt}{dr} = \frac{K}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(r))}}$.
$U = -k/r \Rightarrow$ (Orbita de Kepler): $\hat{\theta}(r) = \arccos \frac{K/r - k/K}{\sqrt{2E/m + k^2/mK^2}}$.

"Integrabilidade"

Representa o tempo necessário para que uma partícula, partindo de r_0 no tempo t_0, atinja $r(t)$ com velocidade positiva e uma energia E. Esta solução é dada por um integral: o sistema é integravél.

Newton no plano de fase -1- Plano de fase.

Re-escrever a equação de Newton como sistema de 2 ODEs

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & v(t) = p(t)/m \\ \dot{p}(t) & = & F(x(t)) \end{cases}$$

Plano de Fase

Definido como $t : z(t) := (q(t), p(t)) := (x(t), p(t)) \in \mathbb{R}^2$.
Newton escreve-se como

$$\frac{d}{dt} z^i(t) = f^i(z(t)), \quad i = 1, 2.(\blacksquare).$$

Newton no plano de fase -2- Teorema de existência.

Teorema de Cauchy

Seja $z^0 \in \mathbb{R}^2$. Se f for localmente Lipschitziana, então existe (localmente no tempo) uma solução a (■) que verifique $z(0) = z^0$.

♣ DEF. (Solução local) $[0, T)$ é o intervalo maximal de existência $\Leftrightarrow \exists T > 0$ s.t. $\lim_{t \to T} \|q(t)\| = \infty$. (★)

Teorema: Solução global $\equiv$ extenção da solução.

(i) $F = -\nabla V$ com V limitada inferiormente $\Rightarrow T = \infty$. ($\star$)
(ii) $\lim\limits_{q \to \pm\infty} V(q) = +\infty \Rightarrow$ "trajétorias limitadas", i.e., $|q(t)| \leq C, \ \forall t, t_0 \in [0, T[$, i.e. $C > 0$ independente de t_0, t. ($\star$)

Newton no plano de fase -3- Solução local ou global?

DEM. (i)Seja $M \in \mathbb{R}$ t.q $M \leq V(q(t)), \forall t \geq t_0$. Como $E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2(t) + V(q(t))$, $\forall t \geq t_0$, temos $|q(t)| \leq |q(t_0)| + \int_0^t |\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(q(t)))}| \leq |q(t_0)| + \int_0^t |\sqrt{\frac{2}{m}(E - M)}| \leq |q(t_0)| + \int_0^T |\sqrt{\frac{2}{m}(E - M)}|$ se assumir ($\bigstar$). Então $|q(t)| \leq C(E, M; t_0)$, $\forall t \geq t_0$, o que contradiz ($\bigstar$) $\Rightarrow$ a solução é prolongavél ate ∞.

(ii) $\lim_{q \to \pm\infty} V(q) = +\infty \Rightarrow \exists W(q)$ continua t.q. $W > V$, $W(q) = W(-q)$ e $W'(q) \geq 0, q \geq 0$. Seja $M = \min_q V(q)$, $E \geq M$ e $q_E = W^{-1}(E) \geq 0$. Isto implica que $q(t) \leq q_E$. De facto, se assumir $q > q_E$ teriamos $V(q(t)) > W(q_E) = E$, o seja $\dot{q}(t)^2 < 0$, uma contradicção. Portanto $|q(t)| \leq q_E$ independente de t_0 e t.

Noção de Equilibrio

Definição

Uma massa pontual é em equilibrio, ou no reposo, num referencial $\mathcal{B}(t)$ e durante um intervalo de tempo I, se a sua velocidade é nulla para todos os $t \in I$.
Pela 2a lei de Newton (o princípio fundamental da dinâmica) temos:

Teorema

Uma massa pontual é em equilibrio num referencial INERCIAL, e durante um intervalo de tempo I, se a sua velocidade é nulla para pelo menos um $t_0 \in I$, e se a suma das forças aplicadas na massa pontual, $F = 0$, para todos os $t \in I$.

DEM. Imediato pela 2a lei de Newton.

♣ No caso de uma força potencial, a condição será $F = \nabla U = 0$, ou seja equilibrio $\Leftrightarrow$ $v = 0$ (ou $T(v) = 0$) e U é estacionario (i.e., $\partial_t U = 0$).

Estudo qualitativo do movimento, coordenadas lagrangiana

Movimento unidimensional com constrangimento

Abcissa curvilineare ou coordenada lagrangiana

$s \mapsto \{x(s), y(s), z(s)\}$.

Dados:

Energia potencial $V(s) = mgz(s)$.

Newton: $m(\ddot{s} + g\frac{d}{ds}z(s)) = 0$ (Lembrete: triedro de Frenet).

Conservação: $\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + V(s) = E$, i.e., $\dot{s} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(s))}$.

Estudo de:

★ Pontos de reflexão ★ Pontos de equilibrio

Estudo qualitativo qualitativo de um ponto de reflexão

♣ DEF. **Abcissa** a **t.q** $V(a) = E$ **(velocidade zero) e** $V'(a) \neq 0$**.**

- abcissa $s(t_1) = a$ t.q. $V(a) = E \Rightarrow v(t_1) = 0, V'(a) > 0$.
- abcissa $s(t_0) = b < a$ t.q. $V(s(t)) < E, \forall t \in [b, a[$.
- supomos que $\dot{s}(t_0) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(s))} > 0$, ou seja, o mobile vai em direcção à abcissa a, onde chegará num tempo finito se vale: $I := t_1 - t_0 = \int_b^a \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(s))}} < \infty$.
- DEM. Assume-se $V \in \mathcal{C}^2(I)$ e faz-se um desenvolvimento de Taylor finito de V em a. Portanto $V(s) = V(a) - (a-s)[V'(a) - V''(a + \theta(s-a))\frac{a-s}{2}], 0 < \theta < 1$, i.e., $E - V(s) = (a - s)\Pi(s)$. Temos $\Pi(a) > 0$ e $E \geq V \Rightarrow$ $\Pi(b) > 0$. $E > V$. Portanto $I < \sqrt{\frac{m}{2k}}\sqrt{a - b} < \infty$.

Estudo qualitativo de um ponto de equilibrio instavél

♣ DEF. **Abcissa** a **t.q** $V(a) = E$ **(velocidade zero) e** $V'(a) = 0$**.**

- abcissa $s(t_1) = a$ t.q. $V(a) = E \Rightarrow v(t_1) = 0, V'(a) = 0.$
- abcissa $s(t_0) = b < a$ t.q. $V(s(t)) < E, \forall t \in [b, a[.$
- supomos $\dot{s}(t_0) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(s))} > 0$, ou seja, o mobile vai em direcção à a, onde, por definição de ser instavél chegará num tempo infinito: $I_\alpha := \int_b^\alpha \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(s))}} \to \infty, \ \alpha \to a.$
- DEM. Assume-se $V \in \mathcal{C}^2(I)$ e faz-se um desenvolvimento de Taylor finito de V em a. Portanto $V(s) = V(a) - (a - s)[-V''(a + \theta(s - a))\frac{a-s}{2}], 0 < \theta < 1,$ i.e., $E - V(s) = \frac{(a-s)^2}{2}\Psi(s)$. Pela continuidade de $\Psi, \exists K > 0$, t.q. $E - V(s) \leq \frac{(a-s)^2}{2}K.$
  Portanto $I_\alpha = \sqrt{K^{-1}}\sqrt{m}\ln\frac{a-b}{a-\alpha} \to \infty$, quando $\alpha \to a$.

Movimento periodico

Quando a solução do sistema será periodica?

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = p(t)/m \\ \dot{p}(t) = -\partial_q V(q(t)) \end{cases},$$

i.e., DEF. quando $\exists T$ t.q. $q(t+T) = q(t), \ \forall t$?

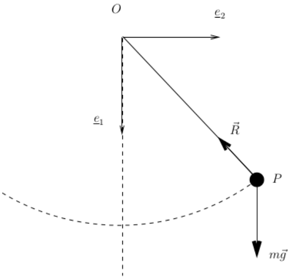
Conservação de energia

$$E = E(t) = E(t_0) = \frac{m}{2} v_0^2 + V(q_0),$$

onde $q_{min}(E) < q_0 < q_{max}(E)$ soluções de $V(q) = E$.

Teorema

A solução $t \mapsto q(t)$, $t \in [0, \infty)$ é periodica com um periodo positivo minimal T_E se e somente se $q_0 \in]q_{min}, q_{max}[$ onde $V'(q_{max}) > 0$ e $V'(q_{min}) < 0$. Este periodo é $T_E := 2 \int_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(s))}} < \infty$.



♣ Ha (pelo menos) 4 caminhos para encontrar as equações do movimento:

$$\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0(\star).$$

$\overrightarrow{OP} = \ell \underline{g}_r$, $\ell = |\overrightarrow{OP}|$, $\cos\theta = e_1 \cdot \overrightarrow{OP}$,
$T = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\theta}^2$ e $U = -mg\ell\cos\theta$.

1)**Conservação da energia mecânica**:
$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \Longrightarrow (\star)$.

2) 2^a **Lei de Newton no referêncial** $\{\underline{g}_r, \underline{g}_\theta, \underline{e}_z\}$ **legado a** P: $m\vec{g} + \vec{R} = m(\vec{a}_R + \vec{a}_T + \vec{a}_C)$, onde $\vec{v}_R = 0 \Rightarrow \vec{a}_R = \vec{a}_C = 0$ e $\vec{a}_T =$
$\ddot{\theta}\underline{e}_z \times \ell\underline{g}_r + \dot{\theta}\underline{e}_z \times (\dot{\theta}\underline{e}_z \times \ell\underline{g}_r) = \ell\ddot{\theta}\underline{g}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\underline{g}_r \Longrightarrow$
(longo $\underline{g}_r$: $R = mg\cos\theta + \ell\dot{\theta}^2$), e $(\star)$ longo $\underline{g}_\theta$.

3) **Conservação do momento linear**:
$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP} \times m\vec{v}) = \overrightarrow{OP} \times (\vec{R} + m\vec{g}) = \vec{OP} \times m\vec{g}$,
onde $\overrightarrow{OP} = \ell\cos\theta\underline{e}_1 + \ell\sin\theta\underline{e}_2 \Longrightarrow (\star)$.

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -1-

Sistema de N pontos

$x^A : t \mapsto x^A(t) : I \to \mathbb{R}^3, 1 \leq A \leq N.$

Sistema de N massas pontuais

$m^A : A \mapsto m(A) : \{1, \cdots, N\} \to \mathbb{R}^+$

Sistema de N^2 forças de interacção

$(A, B) \mapsto f^{AB} : \{1, \cdots, N\} \times \{1, \cdots, N\} \to \mathbb{R}^3$

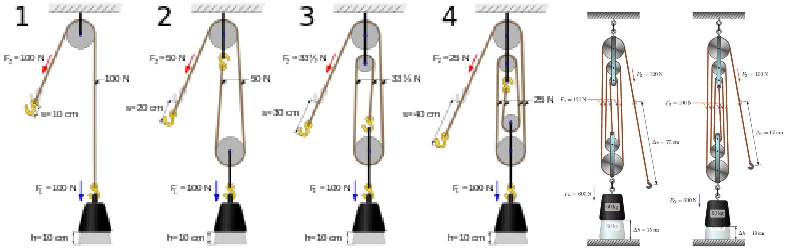
Sistema de N forças pontuais

$$A \mapsto f^A := \sum_{B=1, \neq A}^{N} f^{AB} : \{1, \cdots, N\} \to \mathbb{R}^3$$

Terceira Lei de Newton, ou Princípio de Acção e Reacção

$$f^{AB} \times (x^B - x^A) = 0 \text{ e } f^{AB} = -f^{BA}.$$

A tensão como força reciproca: conjunto de roldanas



Regra de ouro

♣$F = P/N$, onde P é o peso, e N o numero de fios que tragam a massa.

♣ O comprimento de corda para puxar é proportional a N.

♣ Portanto: a força (muscular) diminui mas o trabalho da mesma fica o mesmo.

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -3-

Sistema aberto

Força total em A: $F^A := f^A + f'^A$, onde f'^A : força exterior.

Quantidade de movimento (Momento linear)

$$P_O := \sum_{A=1}^{N} m_A \dot{x}^A.$$

Lei de conservação da quantidade de movimento (num referêncial inercial)

$$\frac{d}{dt} P_O = \sum_{A=1}^{N} F^A = \sum_{A=1}^{N} f'^A \quad (\star).$$

♣ Sistema isolado $\Leftrightarrow f'^A = 0, \forall A \Rightarrow \frac{d}{dt} P_O = 0.$

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -3b-

Massa total e centro de massa

♣ Massa: $M := \sum_{A=1}^{N} m_A$

♣ Posição (com respeito ao ponto O): $x^A = \overrightarrow{OA}$.

♣ Definição de centro de massa (com respeito a O):

é o unico ponto G tal que $X_O := \frac{\sum_{A=1}^{N} m_A x^A}{M} = \overrightarrow{OG}$.

♣ Definição intrinsica: $X_O = \frac{\sum_{A=1}^{N} m_A \overrightarrow{OA}}{M} \Leftrightarrow$

$$\forall t : 0 = \frac{\sum_{A=1}^{N} m_A \overrightarrow{GA}}{M}.$$

♣ $P_O = M\dot{X}_O = M\dot{\overrightarrow{OG}}$ e $P_G = 0$. $(\star)$

♣ Conservação do momento linear: $\frac{dP_O}{dt} = M\ddot{X}_O = \sum_{A=1}^{N} f'^A$.

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -4-

Momento angular com respeito a um ponto O

$$L_O := \sum_{A=1}^{N} x^A \times m_A \dot{x}^A.$$

Reducção ao centro de massa

♣ $L_O = \overrightarrow{OG} \times M\dot{\overrightarrow{OG}} + \sum_{A=1}^{N} \overrightarrow{GA} \times m_A \overbrace{(\dot{\overrightarrow{GA}} + \dot{\overrightarrow{OG}})}^{=\dot{x}^A} =$
$\overrightarrow{OG} \times M\dot{\overrightarrow{OG}} + \sum_{A=1}^{N} \overrightarrow{GA} \times m_A \dot{\overrightarrow{GA}}$ $(\star)$.

♣ Assim $L_G = \sum_{A=1}^{N} \overrightarrow{GA} \times m_A \dot{\overrightarrow{GA}}$ e $L_O = \overrightarrow{OG} \times M\dot{\overrightarrow{OG}} + L_G$.

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -5-

Lei de conservação do momento cinetico (num referêncial inercial)

$$\frac{d}{dt}L_O = \sum_{A=1}^{N} x^A \times F^A = \sum_{A=1}^{N} x^A \times f'^A, \quad (\star).$$

♣ Assim $\frac{d}{dt}L_G = \sum_{A=1}^{N} \overrightarrow{GA} \times f'^A$
(no referêncial do centro de massa). $(\star)$

Conservação do momento cinetico de 2 corpos em rotação

♣ Campo central $\Leftrightarrow f'^A = \varphi_A(r)\underline{g}_r, \forall A \Rightarrow \frac{d}{dt}L_O = 0.$ $(\star)$

♣ Sistema isolado $\Leftrightarrow f'^A = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}L_O = 0.$ $(\star)$

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -6-

Energia cinética e teorema de Koenig

$T_O := \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} m_A (\dot{x}^A)^2 = \frac{1}{2} M (\dot{\overrightarrow{OG}})^2 + \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} m_A (\dot{\overrightarrow{GA}})^2.$ $(\star)$

Lei de conservação da energia cinética (num referêncial inercial)

$$\frac{d}{dt} T_O := \sum_{A=1}^N \dot{x}^A \cdot F^A \quad (\star)$$

♣ "Variação de energia cinética = Potência das forças".

♣ <u>Corolario:</u> no referêncial do centro de massa (que pode não ser inercial), temos $\frac{d}{dt} \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} m_A (\dot{\overrightarrow{GA}})^2 := \sum_{A=1}^N \dot{\overrightarrow{GA}} \cdot F^A$.

DEM. $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M (\dot{\overrightarrow{OG}})^2 + \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} m_A (\dot{\overrightarrow{GA}})^2 \right) = \sum_{A=1}^N (\dot{\overrightarrow{OG}} + \dot{\overrightarrow{GA}}) \cdot$

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -7-

Caso de um solido = sistema "rigido"

$d(A,B) = \mathrm{cst} \Rightarrow \frac{d}{dt}\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \dot{\overrightarrow{AB}} \Rightarrow$
$f^{AB} \cdot \dot{\overrightarrow{OA}} + f^{BA} \cdot \dot{\overrightarrow{OB}} = -f^{AB} \cdot \dot{\overrightarrow{AB}} = -\gamma^{AB} \overrightarrow{AB} \cdot \dot{\overrightarrow{AB}} = 0.$

♣ $\frac{d}{dt}T := \sum_{A=1}^{N} \dot{x}^A \cdot f'^A$:

"Variação Energia cinética=apenas a potência das forças exteriores".

Energia cinetica de um solido em rotação em torno de G

♣ Seja $\mathcal{B}_O$ um referêncial fixo, e G, o centro de massa do solido (ponto fixo particular). Sabemos que $T = \frac{1}{2}\sum_{A=1}^{N} m_A \|\dot{\vec{OA}}\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{A=1}^{N} m_A \|\dot{\vec{OG}}\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{A=1}^{N} m_A \|\dot{\vec{GA}}\|^2$.

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -8-

Equações de um corpo rigido

É suficiente resolver o sistema seguinte:

$$M\frac{dV_G}{dt} = F, \quad \frac{dL_G}{dt} = K_G,$$

onde $V_G := \dot{\overrightarrow{OG}}$ é a velocidade do centro de massa G,
L_G é o momento angular (ou cinético) com respeito a G, e
$K_G = K_O - \overrightarrow{OG} \times F = \overrightarrow{GP} \times F$ é o momento das forças com respeito a G (P: ponto de aplicação de F)

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -9-

Velocidade de um ponto de um sistema rigido em movimento

Seja $\mathcal{B}_0$ um referêncial inercial. Seja $\overrightarrow{AB}$ a posição relativa de 2 pontos A e B do solido. Seja um referêncial $\mathcal{B}(t)$ com centro o centro de massa G e base $\{\underline{g}_i(t)\}$. Escrevemos $\overrightarrow{AB} = \sum_{i=1}^{3} x_i \underline{g}_i$. Como $\overrightarrow{AB}$ é constante com respeito a G, temos $\dot{x}_i = 0$. Portanto $\dot{\overrightarrow{AB}} = \sum_{i=1}^{3} x_i \dot{\underline{g}}_i(t) = \sum_{i=1}^{3} x_i \omega \times \underline{g}_i(t) = \omega \times \overrightarrow{AB}$. D'outro lado, $\dot{\overrightarrow{AB}} = \dot{\overrightarrow{0B}} - \dot{\overrightarrow{0A}} = v(B) - v(A)$, ou seja $v(A) = v(B) - \omega \times \overrightarrow{AB}$. Tomando $B = G$:

$$v(A) = v(G) + \omega \times \overrightarrow{GA}$$

(reducção ao C.M.).

Energia cinetica de um solido em rotação em torno de G (continuação).

♣ Portanto: $T_O = \frac{1}{2}M\|\dot{\vec{OG}}\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{A=1}^{N} m_A\|\vec{\omega}^A \times \vec{GA}\|^2 =$
$\frac{1}{2}M\|\dot{\vec{OG}}\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{A=1}^{N} m_A \sum_{i=1}^{3}(\omega_i^A)^2\|\underline{g}_i \times \vec{GA}\|^2 =$
$\frac{1}{2}M\|\dot{\vec{OG}}\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{A=1}^{N} m_A \sum_{i=1}^{3}(\omega_i^A)^2\|\sum_{j=1}^{3} \underline{g}_i \times \underline{g}_j y_j^A\|^2.$
♣ Seja $T_I := \frac{1}{2}\sum_{A=1}^{N} m_A \sum_{i=1}^{3}(\omega_i^A)^2\|\sum_{j=1}^{3} \underline{g}_i \times \underline{g}_j y_j^A\|^2$

♣ Tomando um referêncial $\{G; \underline{g}_i\}$ $\vec{\omega}^A = \omega\underline{g}_1$, temos:
$T_I = \frac{1}{2}\omega^2\sum_{A=1}^{N} m_A\|\sum_{j=1}^{3} \underline{g}_1 \times \underline{g}_j y_j^A\|^2 =$
$\frac{1}{2}\omega^2\sum_{A=1}^{N} m_A((y_2^A)^2 + (y_3^A)^2) = \frac{1}{2}\omega^2 I_1,$
onde $I_i := \sum_{A=1}^{N} m_A(y_j^A)^2, j \neq i$
é o i.mo **momento de inercia** relativamente a G, ou seja o momento relativo ao eixo i passando por G.

Energia cinetica de um solido em rotação em torno de G (continuação).

♣ Portanto, temos: $I := I_1 + I_2 + I_3 = 2I_G$ onde $I_G := \sum_{A=1}^{N} m_A(\vec{GA})^2$.

♣ No caso isotropo, $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{3}I_G = \frac{2}{3}\sum_{A=1}^{N} m_A(\vec{GA})^2$.

♣ Assim, temos $T_I = \frac{1}{2}\omega^2 I_1 = \frac{1}{3}\omega^2 I_G = \frac{1}{3}\omega^2 \sum_{A=1}^{N} m_A(\vec{GA})^2$.

♣ Em geral, temos $T_I = \frac{1}{2}\omega^2 I = \frac{1}{2}\omega^2 I_1 + \frac{1}{2}\omega^2 I_2 + \frac{1}{2}\omega^2 I_3$.

♣ Daí a formula geral:

$$T_O = \frac{1}{2}M\|\dot{\vec{OG}}\|^2 + \frac{1}{2}\omega^2 I,$$

onde $I =$momento de inercia do corpo: depende apenas da sua geometria.

♣ Ex. Corpo sferico de raio r: $I = \frac{2}{5}mr^2$.

Dinâmica de um solido em rotação em torno de um eixo passando por G

♣ De $T_G = \frac{1}{2}\omega^2 I$, obtemos $T_G = \frac{1}{3}\omega^2 I_G$. De outro lado $L_G = \sum_{A=1}^N \overrightarrow{GA} \times m_A \dot{\overrightarrow{GA}} = \sum_{A=1}^N \overrightarrow{GA} \times m_A \left(\vec{\omega}^A \times \overrightarrow{GA}\right) = \sum_{A=1}^N \omega^A m_A \|\overrightarrow{GA}\|^2 = \omega \sum_{A=1}^N m_A \|\overrightarrow{GA}\|^2$. Logo $L_G = \omega I_G$.

Equações de um corpo rigido

♣ Seja O um ponto fixo. É suficiente resolver o sistema seguinte:

$$M\frac{dV_G}{dt} = F \;(V_G := \frac{dx_G}{dt}), \quad \frac{dL_G}{dt} = I_G\frac{d\omega}{dt} = K_G \;(\omega := \frac{d\theta}{dt}),$$

onde $V_G := \dot{\overrightarrow{OG}}$ é a velocidade do centro de massa G, L_G é o momento angular (ou cinético) com respeito a G, ω a velociade de rotação do sistema, e $K_G = \overrightarrow{GP} \times F$ é o momento das forças com respeito a G (P: ponto de aplicação da força $\vec{F}$).

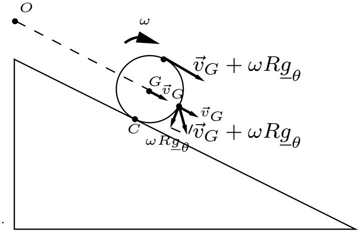
Deslizamento sem rolamento e Rolamento sem atrito

Deslizamento sem rolamento

Todos os pontos do solido têm o mesmo movimento do que o seu centro de massa: velocidade de translação.

Rolamento "perfeito" ou sem atrito de Coulomb

Os pontos do solido têm um movimento de rotação em torno do seu centro de massa.



♣ Atrito de Coulomb:
$F = -\gamma \|\vec{v}\|, \gamma > 0$
♣ No ponto de contacto C:
$F(C) = \gamma \|\vec{v}(C)\| = 0$
$\Rightarrow \|\vec{v}(C)\| =$
$\|\vec{v}_G + \omega R \underline{g}_\theta(C)\| =$
$\|\vec{v}_G\| - \omega R = 0$
♣ Portanto: $v_G = \omega R$.

Dinâmica dos sistemas (de N corpos) -8-

Potencialidade das forças de interacção

♣ Já sabemos que: $F^{AB} = \hat{F}^{AB}(x^D - x^C), \forall 1 \leq C, D \leq N$.

♣ F^{AB} é potencial se $F^{AB} = \tilde{F}^{AB}(\|x^B - x^A\|)\frac{x^B - x^A}{\|x^B - x^A\|}$ e $F^{AB} = -\,\mathrm{Grad}\; U^{AB}(x^B - x^A)$, $U^{AB}(x) = -\int_O^{\|x\|} \tilde{F}^{AB}(\rho)d\rho$.

♣ Em particular, temos: $F^{AB} = -F^{BA}$. $(\star)$

Energia potencial do sistema

$$\boxed{U(x) := \sum_{A>B}^{N} U^{AB}(x) + \sum_{A=1}^{N} U'^{A}(x),} \quad f'^{A} := -\,\mathrm{Grad}\; U'^{A}.$$

Lei de conservação da energia mecânica total (num R.I.)

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T + U) = 0.} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d}{dt}(T + U_{\mathrm{int}}) = \sum_{A=1}^{N} f'^{A} \cdot v^{A},}$$

onde $U_{\mathrm{int}} := \sum_{A>B}^{N} U^{AB}$.

Colisões unidimensionais

Objetivo

Determinar as velocidades v_1' e v_2' dos dois corpos depois da colisão.

Metódo

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 & = & m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 & = & \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \end{cases}$$

Solução

$$v_1' = \frac{2m_2 v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}, \; v_2' = \frac{2m_1 v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}. (\star)$$

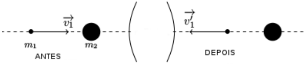
Problemas de alvos-projéteis

Pomos $v_2 = 0$.

Portanto: $v_1' = \frac{v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$ e $v_2' = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$

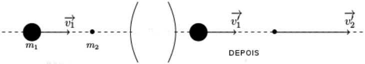
♣ Projetíl leve, alvo pesado: $m_2 \gg m_1$: $\boxed{v_1' = -v_1 \text{ e } v_2' = 0}$

Exemplo: Bola de ping-pongue contro bola de bilhardo.



♣ Projetíl pesado, alvo leve: $m_2 \ll m_1$: $\boxed{v_1' = v_1 \text{ e } v_2' = 2v_1}$

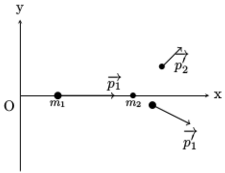
Exemplo: Bola de bilhardo contro bola de ping-pongue.

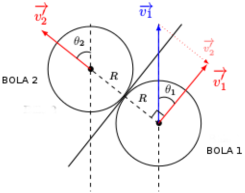


♣ Projetíl e alvo tem mesma massa: $m_2 = m_1$: $\boxed{v_1' = 0 \text{ e } v_2' = v_1}$

Exemplo: Duas bolas de bilhardo.

Choque elastico





Demostrar que depois do choque, as bolas vão em direcções perpendiculares.

Demostração

Pela conservação do momento linear, temos: $m\vec{v_1} = m\vec{v_1}' + m\vec{v_2}'$.
Pela conservação da energia cinetica: $\frac{1}{2}m{v_1}^2 = \frac{1}{2}m{v_1'}^2 + \frac{1}{2}m{v_2'}^2$.
Simplificando por $1/2$ e m, temos por um lado (pela condição 1), $\vec{v_1}^2 = (\vec{v_1}' + \vec{v_2}')^2$, e pelo outro (pela condição 2), ${v_1}^2 = {v_1'}^2 + {v_2'}^2$.
Isto demostra que $\vec{v_1}' \cdot \vec{v_2}' = 0$.

Choque elastico: caso geral no plano

Equações

Projeções nos eixos x e y do momento linear:

$$\begin{cases} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} & = & m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \\ m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} & = & m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y} \end{cases} .$$

Energia cinetica:

$$m_1(v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + m_2(v_{2x}^2 + v_{2y}^2) = m_1(v'^2_{1x} + v'^2_{1y}) + m_2(v'^2_{2x} + v'^2_{2y}).$$

O sistema é mal posto

Não tem solução, em geral, pois que há 4 incognitas $v'_{1x}, v'_{1y}, v'_{2x}, v'_{2y}$, e só 3 equações.

Há solução se introduzir uma informação, fixar um parametro.

Por exemplo, se sabe que depois do choque, $\vec{v_1}'$ faz um angûlo de θ com $\vec{v_1}$. Ou seja ${v_{1x}}' = v'_1 \cos\theta$, e ${v_{1y}}' = v'_1 \sin\theta$. Agora, as incognitas são $v'_1 = \|\vec{v_1}'\|, v'_{2x}, v'_{2y}$.

Choque elastico: caso geral no plano, calculo do angûlo

Equações

Momento linear: $\vec{p_1} = m_1\vec{v_1} = m_1\vec{v_1}' + m_2\vec{v_2}' = \vec{p_1}' + \vec{p_2}'$
Energia cinetica: $m_1 v_1^2 = m_1 {v_1'}^2 + m_2 {v_2'}^2$.

Toma o quadrado do momento linear

Portanto: $m_1^2 v_1^2 = m_1^2 {v_1'}^2 + m_2^2 {v_2'}^2 + 2m_1 m_2 \vec{v_1}' \cdot \vec{v_2}'$

Multiplique a energia cinetica por m_1

Portanto: $m_1^2 v_1^2 = m_1^2 {v_1'}^2 + m_1 m_2 {v_2'}^2$

Substrai as duas expressões, e divide por m_2

Obtemos: $2m_1 \vec{v_1}' \cdot \vec{v_2}' = (m_1 - m_2){v_2'}^2$, i.e.: $\cos\theta = \frac{(m_1 - m_2)v_2'}{2m_1 {v_1}'}$.

Conceito de vínculo (ligação)

Ligação ou constrangimento (*constraint*)

Um ponto material é sujeito a ligações se o seu movimento é limitado por constrangimentos ou obstacolos.

Constrangimento de posição: deve ficar numa superficie

♣ Superficie immovél $f(x, y, z) = 0$ ou movél $f(x, y, z : t) = 0$.
♣ Curva movél $f_i(x, y, z : t) = 0, \ i = 1, 2$.

Eliminação de graus de liberdade

♣ Considere um ponto material: $n :=$ ♯ GDL q_i =3-♯ vínculos.
♣ q_i: coordenadas generalizadas ou **lagrangianas**.

Exemplo: caso sem vínculo

♣ $x_i = \hat{x}_i(q_j)$. Ex: coord. polares $q_i = (r, \theta, z)$
♣ Caso geral: $\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) \neq 0$.
♣ Da mais jeito: $r = cst$ do que $x_i^2 = cst$

Conceito de força de vínculo

Força de vínculo

Um ponto material será vinculado á uma superficie se a mesma exercer uma força $\vec{\ell}$ neste ponto. Geralmente, esta força não é conhecida: só sabemos que é necessaria para ter um determinado movimento.

♣ Em principio, temos que eliminar esta incognita para encontrar as equações de movimento

Metódo

♣ Escrever as equações sem a força de vínculo.

♣ No caso sem atrito, a força é sempre orthogonal á superficie, portanto não efetua nenhum trabalho, pois a velocidade do seu ponto de aplicação está sempre perpendicular a força.

♣ As outras forças são chamadas **exteriores**.

Principio dos trabalhos virtuais em estática

Considere $\mathcal{B}_O$, e $x = \overrightarrow{OP}$

♣ Temos os vínculos: $f_i(x_j) = 0,\ 1 \le i \le m,\ 1 \le m \le 2$

♣ Coordenadas lagrangianas q_j t.q. $x_i = \hat{x}_i(q_j),\ 1 \le i \le 3$.

Acréscimos virtuais

♣ Dando a q_j um acréscimo δq_j, temos uma variação de x_i correspondente, ou seja o **deslocamento virtual compativel com os vínculos** $\delta x := \delta x_i \underline{e}_i$, onde:

$$\delta x_i = \sum_j \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

♣ De outro lado, temos o deslocamento real $dx := dx_i \underline{e}_i$, onde:

$$dx_i = \sum_j \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} dq_j = \sum_j \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} q_j'(t) dt,$$

associado ao movimento real do sistema $t \mapsto q_j(t)$.

Teorema dos trabalhos virtuais em estática

Definição

O trabalho virtual de uma força $\vec{F}$ aplicada a x é $(\vec{F}, \delta x)$, onde $\vec{F} = \vec{\ell} + \vec{e}$, com $\vec{e}$, as forças exteriores.

Teorema

Seja I um intervalo de tempo e seja x no reposo (em equilibrio) em $t = t_0 \in I$ no referêncial $\mathcal{B}_O$, sujeito em I a vínculos sem atrito e independentes do tempo. Então $x(t)$ é em equilibrio em I e em $\mathcal{B}_O$ se, o somento se, para qualquer delocamento virtual δx compativel com os vínculos, o trabalho virtual da suma das forças exteriores é nula em I: $(\vec{e}, \delta x) = 0$.

Força generalisada $\vec{Q}$

$$0 = \langle \vec{e}, \delta x \rangle = \sum_j \sum_i (e_i, \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}) \delta q_j = \sum_j Q^j \delta q_j$$

$\Rightarrow Q^j = 0, \forall 1 \leq j \leq n = 3 - m,$ ou $0 = \vec{Q} = (Q^1, \cdots, Q^n)$.

Força virtual e potencial

Força externa deriva de um potencial

Existe $U = \hat{U}(x_i)$ diferenciável t.q. $\vec{e} = -\nabla\hat{U}$. Portanto temos

$$Q^j := (\vec{e}, \tfrac{\partial x}{\partial q_j}) = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \hat{U}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial \tilde{U}}{\partial q_j}, \text{ com } U = \tilde{U}(q_k).$$

♣ Ou seja: $\vec{e} = -\nabla_x \hat{U} \Longrightarrow \vec{Q} = -\nabla_q \tilde{U}$.

O Teorema pode ser re-escrito como

Seja I um intervalo de tempo e seja x no reposo (em equilibrio) em $t = t_0 \in I$ em $\mathcal{B}_O$ e sujeito em I a vínculos sem atrito e independentes do tempo. Então $x(t)$ é em equilibrio para todos os $t \in I$ e em $\mathcal{B}_O$ se, o somento se, as forças generalisadas são nulas em I: $Q^j = 0 \; \forall 1 \leq j \leq 3 - m$.

Exemplo

1cm

Caso de uma massa pontual numa circumferência: $q = \theta$,

Trabalhos virtuais em dinamica

Temos os vínculos: $f_i(x_j; \mathbf{t}) = 0,\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq m \leq 2$ e as coordenadas lagrangianas q_j t.q. $x_i = \hat{x}_i(q_j; \mathbf{t}),\ 1 \leq i \leq 3$.

Relação fundamental da dinamica

A suma das forças externas, de vínculo e de inercia é nula.

$$\text{Em } \mathcal{B}_O : \quad \vec{F} - m\vec{a} = 0, \quad \vec{F} = \vec{\ell} + \vec{e}.$$

A relação $(\vec{\ell}, \delta x) = 0$ implica que
$$0 = (\vec{F} - m\vec{a}, \delta x) = \sum_j Q^j \delta q_j - m(\vec{a}, \delta x).$$

Calculo de $(\vec{a}, \delta x)$

$m(\vec{a}, \delta x) = m(\frac{d\vec{v}}{dt}, \delta x) = m \sum_k (\frac{d\vec{v}}{dt}, \frac{\partial x}{\partial q_k}) \delta q_k =$
$m \sum_k \left[\frac{d}{dt}(\vec{v}, \frac{\partial x}{\partial q_k}) - (\vec{v}, \frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_k}) \right] \delta q_k.$

Operador de Lagrange

Funcional velocidade

$\vec{v} = \frac{dx}{dt} = \sum_j \frac{\partial x}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x}{\partial t} = \hat{v}(q_k, \dot{q}_k; t)$.

Portanto, derivando, temos: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x}{\partial q_k}$. Temos tambem:

$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_k} = \sum_j \frac{\partial^2 x}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 x}{\partial q_k \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_k}\sum_j \left(\frac{\partial x}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x}{\partial t}\right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_k}$.

Voltamos ao calculo de $m(a, \delta x)$

$\frac{d}{dt}(\vec{v}, \frac{\partial x}{\partial q_k}) - (\vec{v}, \frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_k}) = \frac{d}{dt}(\vec{v}, \frac{\partial v}{\partial \dot{q}_k}) - (\vec{v}, \frac{\partial v}{\partial q_k}) =$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2) - \frac{\partial}{\partial q_k}(\frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2)$.

Operador de Lagrange

Portanto: $m(\vec{a}, \delta x) = \sum_k \left[\mathbf{\frac{d}{dt}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{\dot{q}_k}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q_k}}\right] T\delta q_k$, $T = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2$.

Funcional de Lagrange

Trabalhos virtuais em dinamica

A relação $0 = (\vec{F} - m\vec{a}, \delta x)$ implica

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q^k, 1 \leq k \leq n.}$$

Caso das forças potenciais

$Q^k = -\frac{\partial U}{\partial q_k}$(onde $U = \tilde{U}(q_k)) \Rightarrow$

$$\boxed{\left[\mathbf{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q_k}}\right] L = 0,\ L = T - U,}$$

chamadas as equações lagrangianas do ponto, onde L é o Lagrangiano do ponto.

♣ O numero de tal equações diferenciais do segundo ordem é igual ao numero de graus de liberdade do sistema.

Variação de um funcional

Comprimento de uma curva

Seja uma curva $\gamma = \{t, x : x = \hat{x}(t) \in \mathbb{R}^3, t_0 \leq t \leq t_1\}$.
O funcional comprimento é:
$\Phi(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}_i(t)^2} dt$.

Definição

♣ Um "funcional" é uma aplicação do conjunto de curvas, em $\mathbb{R}$.
♣ Uma variação admissivél h é uma curva
$\gamma' = \gamma + h := \{t, x : x = \hat{x}(t) + h(t), h(t_0) = h(t_1) = 0\}$.

Variação ou Differencial de Fréchet de um funcional

O funcional Φ é diferenciável se $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = F[h] + R(h, \gamma)$, onde F é linear e continuo em h e $R(h, \gamma) = O(h^2)$ é o resto.

Pontos estacionarios de um funcional, Euler-Lagrange

Teorema 1

Seja $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt$, onde $L(u, v, t)$ é diferenciável, e $\gamma = \{t, q : q = \hat{q}(t) \in \mathbb{R}^n, t_0 \leq t \leq t_1\}$. Então Φ é diferenciável, e o seu diferencial é $F[h] = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)(t) \cdot h(t)dt$. ($\star$)

Ponto estacionario

Uma curva γ é um extremal de Φ ou um ponto estacionario se $F[h] = 0$, $\forall h$ variação admissível.

Teorema 2: Equações de Euler-Lagrange

A curva $\gamma : q = \hat{q}(t)$ é um extremal de Φ no conjunto de curvas tais que $q(t_0) = q_0$ e $q(t_1) = q_1$, se e somente se, em $q = \hat{q}(t)$:

$$\boxed{0 = \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ \forall k.}$$

Princípio de minima acção de Hamilton

Teorema 3: Princípio de "minima" acção de Hamilton

O movimento do sistema mecânico conservativo $\frac{d}{dt}(mv) + \nabla U = 0$ coincidem com os pontos estacionarios do funcional **acção**: $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt$, onde $L = T - U$ é a diferência entre a energia cinetica e potencial do sistema, chamada Lagrangiano de γ. Portanto, verifica-se Euler-Lagrange, i.e.,

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ \forall k, \text{ ou } \quad \boxed{\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}\ \forall k,}$$

onde $1 \leq k \leq n$, com n o numero de graus de liberdade do sistema, e $p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$, o k.mo momento linear generalizado. Em particular, sem vinculos, $n = 3N$ com N o numero de massas pontuais do sistema. Neste caso, as coordenadas Cartesianas são $q_k = x_k$.

Independência no sistema de coordenadas

Lemma: independência no sistema de coordenadas

A propriedade, para uma trajetória, de ser extremal duma Acção é independente do sistema de coordenadas.

♣ Dem. Temos $x = \hat{x}(q) \Rightarrow \dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k$ e $\frac{\partial}{\partial q_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j}$ $= \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial q_k}\dot{q}_k\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j}$. Temos tambem $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j}$.
Portanto, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) = \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial q_k}\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right)$ e $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\frac{\partial L}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial q_k}\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}$.
Então

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j}\right)$$

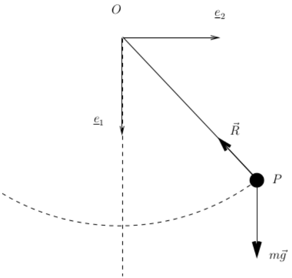
♣ Demostrámos que EL nas coordenadas $q \Rightarrow$ EL nas coordenadas x. Portanto EL estão independetes do sistema de coordenadas.

Exemplo 1

Massa pontual "livre", ou "sem forças" exteriores:
$L = T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. Equações de Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \equiv 2^a$ Lei de Newton ; Princípio de Hamilton: $x(t)$ extremal de $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)dt$: é um minimo, pois Φ é convesso. O minimo é o movimento do sistema, ou seja as retas $x(t) = vt + x_o$.
Note que as retas são minimos do comprimento. $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}(t)^2}dt$.

Exemplo 2

Coordenadas generalizadas polares: $q_1 = r, q_2 = \theta$. Temos $T(q,\dot{q}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$ e $L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q_1)$. Os momentos lineares generalizados são $p_1 = m\dot{r}$ e $q_2 = mr^2\dot{\theta}$.
♣ Euler-Lagrange 1: $\dot{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial r}$ ou $m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \partial_r U$.
♣ Euler-Lagrange 2: $\dot{p}_2 = 0$ ou $p_2 = mr^2\dot{\theta}^2 = K = \mathrm{cste}$ (de Kepler).



♣ Ha (pelo menos) 4 caminhos para encontrar as equações do movimento:

$$\boxed{\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \ (\star)}$$

$\overrightarrow{OP} = \ell \underline{g}_r$, $\ell = |\overrightarrow{OP}|$, $\cos\theta = e_1 \cdot \overrightarrow{OP}$,

$T = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\theta}^2$ e $U = -mg\ell\cos\theta$.

1) **Lagrangiano ou Euler-Lagrange**:

$q = (q_1, q_2) = (r, \theta) \Longrightarrow$

$0 = \left(\frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\right)(T(q,\dot{q}) - U(q_2)) \Longrightarrow (\star)$.

2) **Conservação da energia mecânica**:

$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \Longrightarrow (\star)$.

3) 2^a **Lei de Newton no referêncial** $\{\underline{g}_r, \underline{g}_\theta, \underline{e}_z\}$ **legado a** P: $m\vec{g} + \vec{R} = m(\vec{a}_R + \vec{a}_T + \vec{a}_C)$, onde $\vec{v}_R = 0 \Rightarrow \vec{a}_R = \vec{a}_C = 0$ e $\vec{a}_T =$
$\ddot{\theta}\underline{e}_z \times \ell\underline{g}_r + \dot{\theta}\underline{e}_z \times (\dot{\theta}\underline{e}_z \times \ell\underline{g}_r) = \ell\ddot{\theta}\underline{g}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\underline{g}_r \Longrightarrow$
(longo $\underline{g}_r$: $R = mg\cos\theta + \ell\dot{\theta}^2$), e $(\star)$ longo $\underline{g}_\theta$.

4) **Conservação do momento linear**:

$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP} \times m\vec{v}) = \overrightarrow{OP} \times (\vec{R} + m\vec{g}) = \vec{OP} \times m\vec{g}$,

onde $\overrightarrow{OP} = \ell\cos\theta\underline{e}_1 + \ell\sin\theta\underline{e}_2 \Longrightarrow (\star)$.

Sistemas. Newton vs. Lagrange

Sistema SEM vínculos:

Equações de Newton chegam.

Sistema COM vínculos:

Equações de Newton NÃO chegam:

♣ As equações do movimento em coordenadas Cartesianas não incorporem os vínculos. Tem que se determinar as eq. satisfeitas pelos vinculos, e resolve-las simultaneamente com o movimento.

♣ As forças de vinculo ℓ^A não são conhecidas:

$m_A \dot{v}^A = e^A + \ell^A, \ \leq A \leq N.$

Princípio de d'Alembert

$$\sum_A m_A \dot{v}^A \cdot \delta x^A = \sum_A (e^A + \ell^A) \cdot \delta x^A = \sum_A e^A \cdot \delta x^A \Rightarrow$$

$$\sum_A m_A \dot{v}^A \cdot \frac{\partial x^A}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_A e^A \cdot \frac{\partial x^A}{\partial q_j} \delta q_j \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_A m_A \dot{v}^A \cdot \frac{\partial x^A}{\partial q_j} = \sum_A e^A \cdot \frac{\partial x^A}{\partial q_j} = Q^j, \ \forall j.}$$

Função energia

Lagrange+d'Alembert num sistema: Teorema

Num sistema onde os vinculos são independentes, e não trabalham,

temos $\boxed{\sum_A m_A \dot{v}^A \cdot \frac{\partial x^A}{\partial q_j} = Q^j = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j},\ \forall j = \cdots, n.}$

Teorema: A função energia

Se um tal sistema for tambem potencial, então verifica-se:
$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j},\ \forall j = \cdots, n.$ Isto equivale a escrever:

$\boxed{\frac{d}{dt}E = -\frac{\partial L}{\partial t},}$

onde $E := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L$ é chamada a **energia do sistema**. $(\star)$

Sistemas autonomos -1-

Teorema: sistema autonomo (ou conservativo)

Um sistema onde os vinculos são independentes, não trabalham e não dependem do tempo é autonomo se L não depende **explicitamente** do tempo. Portanto a energia E é conservada, pois $\frac{d}{dt}E = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, pelo teorema anterior.

Demostração

Temos $T = \sum_A \frac{m_A}{2} \|\dot{x}^A\|^2 = \sum_A \sum_j \frac{m_A}{2} \|\nabla_q x^A\|^2 \dot{q}_j^2$. D'outro lado, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$. Portanto, $\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T$. Demostrámos que $E = T + U$ é a energia mecânica do sistema.

Sistemas autonomos -2-

Conservação dos momentos generalizados

Definindo $p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, temos p_j e q_j **conjugados**, e

$$\boxed{\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \text{ e } L = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - E, \text{ onde } E = \text{cste.}}$$

Pequenas oscilações -1-

♣ Sabemos que $T(q,\dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{x}\cdot\dot{x} = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x}{\partial q_i}(q)\frac{\partial x}{\partial q_j}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$ $= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}T^0_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + O(|q||\dot{q}^2|)$, onde $T^0_{ij} = m\frac{\partial x}{\partial q_i}(0)\frac{\partial x}{\partial q_j}(0)$ $\Rightarrow$ os termos no cubo da oscilação em torno de $q=0$ são considerados como negligiveis.

♣ No caso de um sistema: $T(q,\dot{q}) = \sum_{A=1}^{N}\frac{m_A}{2}\dot{x}^A\cdot\dot{x}^A \Rightarrow$ $\boxed{T(q,\dot{q}) \sim \frac{1}{2}T^0_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}[\dot{q}]^t T^0[\dot{q}],}$ $T^0_{ij} = \sum_{A=1}^{N} m_A\frac{\partial x^A}{\partial q_i}(0)\frac{\partial x^A}{\partial q_j}(0)$.

Pequenas oscilações -2-

♣ Temos $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$ quando $q = \dot{q} = \ddot{q} = 0$. Portanto, por Euler-Lagrange: $\frac{\partial U}{\partial q_i}(0) = 0$. Por Taylor,
$U(q) = U(0) + \frac{\partial U}{\partial q_i}(0) q_i + \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}(0) q_i q_j + O(|q|^3) \Rightarrow$
$\boxed{U(q) \sim \frac{1}{2} U^0_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2}[q]^t U^0 [q].}$

Teorema (Pequenas oscilações)

Assumindo pequenas oscilações em torno de $q = 0$, Euler-Lagrange escreve-se como: $0 = T^0 \ddot{q} + U^0 q$. $(\star)$

Simetria e princípios de conservação

♣ Consideramos translações rigidas do vector n:

$$\boxed{x^{A,\lambda} := x^A + \lambda\vec{n}}$$

tais que os vincúlos ficam satisfeitos. Portanto existe coordenadas lagrangianas $q_j^\lambda := \hat{q}_j^\lambda(\lambda)$ t.q.

$$\boxed{x^{A,\lambda} = \hat{x}^{A,\lambda}(q_j^\lambda).}$$

♣ Teorema Lagrange+d'Alembert: $\sum_A m_A \dot{v}^{A,\lambda} \cdot \frac{\partial \hat{x}^{A,\lambda}}{\partial q_j} = \frac{\partial \hat{U}}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow \sum_A m_A \dot{v}^{A,\lambda} \cdot \frac{\partial \hat{x}^{A,\lambda}}{\partial q_j} \left[\frac{\partial \hat{q}_j}{\partial \lambda}\right]_{|\lambda=0} = \frac{\partial \hat{U}}{\partial q_j} \left[\frac{\partial \hat{q}_j}{\partial \lambda}\right]_{|\lambda=0}$$

$$\Rightarrow \sum_A m_A \dot{v}^{A,\lambda} \cdot \left[\frac{d\hat{x}^{A,\lambda}}{d\lambda}\right]_{|\lambda=0} = \sum_A m_A \dot{v}^A \cdot \vec{n} = \frac{d\tilde{U}}{d\lambda}(0)$$

1^o Teorema de Noether

Se um sistema onde os vinculos são independentes e não trabalham possui uma energia potencial **invariante por translações**, então o seu momento linear é conservado. $(\star)$

Transformada dual de Legendre (1752-1833)

♣ Seja $F = F(u) = F(u_1, \cdots, u_n)$ e define $v_i = \hat{v}_i(u) := \frac{\partial F}{\partial u_i}(u)$.

♣ Definimos uma nova funcção, a **transformada de Legendre** de F, $\boxed{G := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i - F(u)} = G(v) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_i(v) v_i - F\left(\tilde{u}(v)\right)$

♣ Variação de G para acrescimos δv de v: $\delta u = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \delta v \Rightarrow$
$\delta G = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial v_i} \delta v_i = \sum_{i=1}^{n} (u_i \delta v_i + v_i \delta u_i) - \frac{\partial F}{\partial u_i} \delta u_i = \sum_{i=1}^{n} u_i \delta v_i$
$\Rightarrow \boxed{u_i = \frac{\partial G}{\partial v_i}(u)}$

Transformada dual de Legendre (1752-1833) -2-

DUALIDADE

Velho Sistema		**Novo Sistema**
Funcção: $F(u)$		Funcção: $G(v)$
Variavél: $u_1, \cdots u_n$		Variavél: $v_1, \cdots, v_n$
	Transformação	
$G = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i - F(u)$		$F = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i - G(v)$
$v_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}$		$u_i = \frac{\partial G}{\partial v_i}$

Formalismo Hamiltoniano (Lagrange-Cauchy-Hamilton)

♣ Seja $F_w(u) := F(w; u)$ e fazemos a trasformada de Legendre de $u \mapsto F_w(u) : G_w = \sum_{i=1}^n u_i v_i - F_w(u)$. Temos $\boxed{\frac{\partial F_w}{\partial w_i} = -\frac{\partial G_w}{\partial w_i}.}$

Aplicação ao Lagrangiano $F_{q;t}(\dot{q}_i) := L(q_i; \dot{q}_i; t)$

♣ As novas variaveis são chamadas **momentos**: $\boxed{p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.}$

♣ A nova funcção é chamada o **Hamiltoniano**, ou a **energia**: $\boxed{H := \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L} = H(q_1, \cdots, q_n; p_1, \cdots, p_n; t).$

Formalismo Hamiltoniano (Lagrange-Cauchy-Hamilton) -2-

Formalismo Lagrangiano

Lagrangiano: $L(q_i; \dot{q}_i; t)$

Variaveis activas: velocidades $\dot{q}_i$

$H := \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L$

$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

Euler-Lagrange: $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

Formalismo Hamiltoniano

Hamiltoniano: $H(q_i; p_i; t)$

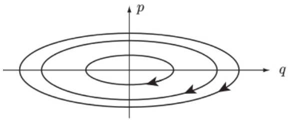
Variaveis: momentos p_i

$L := \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H$

$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$

$$\boxed{\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ \& \ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.}$$

Equações de Hamilton no plano de fase



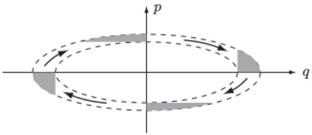
$L(q,\dot q) = \frac{\dot q^2}{4} - \frac{q^2}{9} \Rightarrow$
$H(p,q) = p^2 + \frac{q^2}{9} \Rightarrow$
$q = 3A\cos((2t/3)+\alpha),$
$p = -A\sin((2t/3)+\alpha).$

Teorema de Liouville: forma 1

Um sistema Hamiltoniano conserva o volume no espaço de fase.

♣ Dem. Seja $x = \hat x(t) = (p(t), q(t))$ e $X = \hat x(0) = (p_0, q_0)$. Portanto $V_0 = \int_{U_0} dp_0 dq_0$ e $V_t = \int_{U_t} dx = \int_{U_t} dp(t)dq(t)$. Pelo teorema de Reynolds temos: $\frac{d}{dt}V_t = \int_{U_t} \operatorname{div}\dot x dx =$
$\int_{U_t} \operatorname{div}(-\nabla_q H, \nabla_p H) = \int_{U_t}(-\nabla_p\nabla_q + \nabla_q\nabla_p)H dx = 0.$

Hamilton e Mecânica estatistica



♣ Informação em termos de q (posição, GdL) e momentos conjugados
♣ Maior info suitoobre q e pouca sobre p VS. Menos info sobre q e mais sobre p (um instante mais tarde).

♣ Seja um sistema dinamico Hamiltoniano com coordenadas canonicas p (os GdL) e os momentois conjugados q.
♣ Seja $(p,q) \mapsto \rho(p,q)$ a densidade de probabilidade do sistema, ou seja $\rho(p,q)dpdq$ é a probabilidade de o sistema se encontrar no estado $dpdq$.

Teorema de Liouville: forma 2

Portanto $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, ou seja, ρ é constante longo o flusso Hamiltoniano (longo uma trajetória no plano de fase).
♣ Dem. Pela equação de continuidade, temos $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \mathrm{div} v = 0$.
Temos tambem (vê infra) $\mathrm{div} v = 0$.

Coordenadas ciclicas

Coordenada ciclica ou ignoravél

E uma coordenada q_i ausende do Lagrangiano, ou seja $\partial_{q_i} L = 0$. Portanto a equação de Euler-Lagrange correspondente é $\frac{d}{dt}\partial_{\dot{q}_i} L = 0$, ou seja o momento linear conjugado $p_i = \partial_{\dot{q}_i} L$ é conservado: $p_i = cste$. Um tal p_i é chamado *integral primeiro* do movimento.

Exemplo do Hamiltoniano

O Hamiltoniano de um sistema conservativo é um *integral primeiro* do movimento.

♣ Dem. Pelas equações de Hamilton, temos $\frac{d}{dt}H = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$, pois t é uma variavél passiva na transformada de Legendre. $(\star)$ (Tambem pode ser visto pelo teorema de sistemas autonomos, se os vinculos não trabalham e não dependem do tempo explicitamente)..

Parênteses de Poisson

Seja $f(p,q:t)$ e $g(p,q;t)$ duas funções de p, q e do tempo.

Parentese de Poisson

A parentese de Poisson de f e g é $[f,g] = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$.

Derivada temporal como parênteses de Poisson

Temos $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = [f,H] + \frac{\partial f}{\partial t}$.

Integral primeiro do movimento (ou constante do movimento) mediante as parênteses de Poisson

A funcção f é um integral primeiro do movimento se $[f,H] + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

Equações do movimento mediante as parênteses de Poisson

$$\begin{cases} \dot{p}_i & = & [p_i,H] = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i & = & [q_i,H] = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

Teorema de Poisson

Algumas propriedades das parênteses de Poisson

♣ $[f,g]=-[g,f]$, e então $[f,f]=0$
♣ $\frac{\partial}{\partial t}[f,g]=[\frac{\partial}{\partial t}f,g]-[\frac{\partial}{\partial t}g,f]=[\frac{\partial}{\partial t}f,g]+[f,\frac{\partial}{\partial t}g]$
♣ Jacobi: $\forall f,g,h:[f,[g,h]]+[g,[h,f]]+[h,[f,g]]=0$

Teorema de Poisson

Se f e g são integrais primeiros do movimentom então tambem $[f,g]$ é um integral primeiro do movimento.
♣ Dem. Pela definição de integral primeiro do movimento e as 3 propriedades das parenteses de Poisson. $(\star)$

Gerador de integrais primeiros para sistemas conservativos

Seja f um integral primeiro do movimento. Portanto $[f,H]$ tambem é um integral primeiro do movimento. Pela definiçã $\frac{\partial f}{\partial t}=-[f,H]$ deduzimos que $\frac{\partial f}{\partial t}$ é um integral primeiro do movimento, tal como todas as $\frac{\partial^k f}{\partial t^k}, k\in\mathbb{N}_*$.

Teorema de Poincaré (1890)

Seja um sistema Hamiltoniano autonomo e considere o movimento de um conjunto de pontos no espaço de fase, que no tempo inicial estavam conteúdos num conjunto limitado U_0. Se o conjunto das trajetórias $\Phi(U_0, t \geq 0)$ é limitado, então existe pontos que irão regressar a U_0 depois de um tempo finito.
♣ Dem. Step 1. Seja o tempo $\tau > 0$ tal que $U_1 := \Phi(U_0, \tau) \cap U_0 = \emptyset$. Seja $U_k := \Phi(U_0, k\tau), k \geq 2$. Pelo teo. de Liouville, $vol(U_k) = cste, 0 \leq k \leq n$. Supomos que $U_k, 0 \leq k \leq n$ são mutuamente disjuntos. Portanto, $\exists n$ t.q. $vol(\cup_k U_k) \geq vol(\Phi(U_0, t \geq 0))$. O mesmo sendo limitado, temos pelo menos dois U_k com intersecção não vazia.
Step 2. Seja $x_1 = \Phi(X_1, k\tau) = x_2 = \Phi(X_2, l\tau)$. Sendo autonomo, por um translação da origem de $l\tau$: $x_1 = \Phi(X_1, (k-l)\tau) = x_2 = \Phi(X_2, 0)$. Portanto o ponto x_1 que estava em $X_1 \in U_0$ em $t = 0$, esta outra vez em U_0 em $t = (k-l)\tau$.

Teorema de Poincaré: aplicação

♣ Considere uma partícula numa superficie $x_3 = z = F(x_1, x_2)$ no campo da Gravidade. Temos
$L = \frac{m}{2}\dot{x}_i^2 - mgx_3 = \frac{m}{2}(x_1^2 + x_2^2 + (F_{,1}\dot{x}_1 + F_{,2}\dot{x}_2)^2) - mgF$.
Portanto $p_i = m(\dot{x}_i + (F_{,1}\dot{x}_1 + F_{,2}\dot{x}_2)F_{,i})$, e $H = E$.
♣ Verificar que U_0 é limitado. $(\star)$