

Geometria diferencial

Aulas teoricas

Docente: Nicolas Van Goethem

vangoeth@fc.ul.pt,
Sala 6.2.20.

May 17, 2021

Objectivos de aprendizagem

1. Teória

- ▶ Introdução aos conceitos de base da geometria extrínseca: curvas e superfícies em \mathbb{R}^n (com ênfase em \mathbb{R}^3)
- ▶ O conceito de geometria intrínseca (=curvas e superfícies como variedades diferenciáveis=sem ser conjuntos em ambiente Euclidiano); variedades Riemannianas
- ▶ Análise local das propriedades geométricas: regularidade, parametrização, curvatura
- ▶ Alguns teoremas clássicos: teorema fundamental das curvas, teorema egregium de Gauss e de Gauss-Bonnet, teorema fundamental das superfícies, Rigidez da esfera, teorema fundamental da geometria Riemanniana, teorema de Stokes

2. Prática

- ▶ Pôr em prática a teoria realizando exercícios
- ▶ Aprender a calcular e a demonstrar
- ▶ Aprender a conceber uma resposta escrita e a partilha-la oralmente; trabalhar em grupo e participar à dinâmica da turma

Avaliação

A avaliação tem 3 partes:

- ▶ Exercícios: relatórios escritos e participação aos TPs e a dinâmica da turma (40%)
- ▶ Exame escrito, parte prática: exercícios vistos nos TPs e/ou próximos dos exercícios feitos nos TPs (20%)
- ▶ Exame escrito de teoria. Se as condições sanitárias o permitir poderá ser feitos em duas partes: 1h30 em Março depois da parte A terminar, 1h30 em Junho depois da parte B terminar (com possibilidade de repetir a parte A).

Apoio e sessões de esclarecimento

- ▶ Durante a aula de TP, depois das apresentações dos exercícios (pode-se conversar além da hora prevista com quem o desejar)
- ▶ Quem participou a aula mas continua com dúvidas que não foram solucionadas nas TPs pode solicitar uma reunião zoom particular ou em grupo: é preferível enviar uma série de dúvidas por escrito anteriormente (email ou no blogue); todas as reuniões serão tornadas públicas no blogue com o link zoom disponível para quem quiser assistir

Sugestão de textbooks de apoio para a parte A

- ▶ **Manfredo do Carmo:** *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* (existe uma versão pdf em espanhol no link <https://www.academia.edu/38949108>); deve existir versões portuguesas ou inglesas quer em pdf/ps/djvu no web, quer nas bibliotecas. Este livro é a referência a nível internacional em geometria diferencial. Irão encontrar todas as definições necessarias, e todos os enunciados dos teoremas classicos com as demonstrações. Obviamente o livro contém mais detalhes, mais exercícios e mais resultados do que veremos nas aulas, mas aconselho a sua lida no acompanhamento dos meus apontamentos.
- ▶ **Christian Bär:** *Elementary Differential Geometry* (Cambridge university press)
- ▶ **M. Umehara, K. Yamada:** *Differential Geometry of Curves and Surfaces* (World Scientific press)

Sugestão de textbooks de apoio para a parte B

- ▶ **Manfredo do Carmo:** *Riemannian geometry* (Birkhäuser (1992))
- ▶ **B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov:** *Modern Geometry — Methods and Applications Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields* (Springer (1992))
- ▶ **Ph. G. Ciarlet:** *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications* (SIAM-Society for Industrial and Applied Mathematics (2013))

Objectivos do curso

1. PARTE A: Geometria diferencial em \mathbb{R}^n (Feb-Mar 2021)

- ▶ Curvas regulares em $3d$ parametrizações; triedro e fórmulas de Frenet (revisão). Hopf's Umlaufsatz (casos regular e irregular); teorema fundamental das curvas.
- ▶ Superfícies regulares; bases locais curvilíneas; símbolos de Christoffel; curvas em superfícies; cinemática das curvas; geodésicas; mapa de Gauss; primeira e segunda formas fundamentais; comprimento e área; superfícies isométricas, equilaterais e conformais; equações de Gauss e de Codazzi-Mainardi; teorema fundamental das superfícies.
- ▶ Curvaturas normal, principais, média e de Gauss; teorema de Weingarten; teorema "Egregium" de Gauss; aplicação a cartografia; caracterização dos pontos.
- ▶ Interpretações da curvatura de Gauss; coordenadas geodésicas (ou normais) e coordenadas das curvaturas principais.
- ▶ Um teorema global: a rigidez da esfera: "uma superfície isométrica à esfera é uma esfera" (evidente?).

Objectivos do curso - cont.

- ▶ Teorema de Gauss-Bonnet na forma local, global e topológica; triangulações; característica de Euler, género.
- 2. PART B: Cálculo diferencial em variedades diferenciáveis. (Março-Maio 2021)
 - ▶ Variedades topológicas e diferenciáveis; variedade metrizável; vetor e plano tangente; métrica e variedades Riemannianas.
 - ▶ Imersões e mergulhos; teoremas de Whitney (forma super fraca, clássica e super forte), teorema de Nash-Kuiper.
 - ▶ Introdução aos tensores e ao cálculo tensorial.
 - ▶ Derivação covariante de tensores; conexão; conexão compatível com a métrica (ou de Levi-Civita); símbolos de Christoffel; torção.
 - ▶ Curvatura de Riemann, de Ricci e curvatura escalar; simetrias; identidade de Bianchi.
 - ▶ Formas diferenciais; cálculo exterior; operador de Hodge, operador "push forward".
 - ▶ Integração e teorema de Stokes.

Conteúdo das aulas teóricas

PART A: Geometria das curvas e superfícies em \mathbb{R}^3

- ▶ Aula 1: Curvas planas e em $3d$; triedro e fórmulas de Frenet; (8-12/2)
- ▶ Aula 2: Teorema fundamental das curvas; número de enrolamento: classificação de curvas fechadas; teorema de Whitney; Hopf's Umlaufsatz. (12/2)
- ▶ Aula 3: Curvas em superfície em $3d$; geodésicas; primeira forma fundamental e comprimento das curvas.; (15/2)
- ▶ Aula 4: Superfícies isométricas, equilaterais e conformais; área e ângulos em superfícies; segunda forma fundamental. (19/2)
- ▶ Aula 5: Mapa de Weingarten; equações de compatibilidade (Gauss-Codazzi-Mainardi); Sistema de Pfaff; Compatibilidade da métrica e da conexão (Teorema de Levi-Civita). (22/2)
- ▶ Aula 6: Teorema fundamental das superfícies. (25/2)

Conteúdo das aulas teoricas

- ▶ Aula 7: Curvaturas principais, media, de Gauss; expressão explícita de K ; Caracterização dos pontos. (1/3)
- ▶ Aula 8: Análise de casos; expressão explícita dos símbolos de Christoffel e de K ; Teorema "Egregium" de Gauss. (5/3)
- ▶ Aula 9: Rigidez da esfera; geodesicas. (8/3)
- ▶ Aula 10: Propriedades variacionais das geodésicas; coordenadas geodésicas; métrica geodésic. (12/3)
- ▶ Aula 11: Interpretação geométrica da curvatura de Gauss; aplicação a cartografia; teorema de Gauss-Bonnet nos triangulos geodésicos. (15/3)
- ▶ Aula 12: Teorema de Gauss-Bonnet nos poligonos curvilineas e na forma global e topológica. (19/3)
- ▶ Aula 13: Derivação covariante em superficies em \mathbb{R}^3 .

PART B : Cálculo diferencial em variedades diferenciais

- ▶ Aula 14 Variedade topologicas e diferenciaveis; imersão e

Conteúdo das aulas teoricas

mergulho (22/3&26/3)

- ▶ Aula 15, 16 & 17: Teoremas de Whitney et de Nash-Kuyper; métrica e variedade Riemanniana; conexão. (29/3, 5/4 & 9/4)
- ▶ Aula 18: Conexão compatível com a métrica; símbolos de Christoffel; derivação covariante de tensores; transporte paralelo e geodésicas; torsão. (12/4)
- ▶ Aula 19: Gradiente de um tensor; sentido geométrico da torsão; curvatura de Riemann. (16/4)
- ▶ Aulas 20: Curvatura de Ricci e escalar; identidade de Bianchi; algebra de Grassman dos m vetores. (23/4)
- ▶ Aula 21: Formas diferenciais. (26/4)
- ▶ Aula 22: Diferenciação exterior. (30/4)
- ▶ Aula 23: Operador dual de Hodge; operador "pull back". (3/5)
- ▶ Aula 24: Integração; teorema de Stokes e aplicações. (6/5)

Curva parametrizada

Uma curva parametrizada é um par (I, γ) onde γ é um mapa suave $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ onde I é um intervalo de \mathbb{R} . A mesma é dita regular (γ torna-se portanto uma imersão) se o seu vetor velocidade $c := \dot{\gamma}(t) \neq 0, \forall t \in I$.

♣ A condição $\dot{c}(t) \neq 0$ significa que o ponto $c(t)$ está em movimento em t . Sem esta condição existem poucas propriedades genericas das mesmas. Exemplos e contro-exemplos:

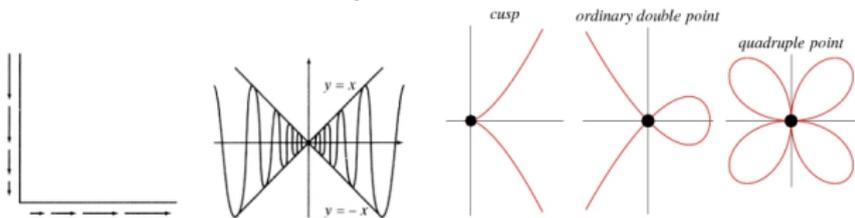


Figure: (i) Curva não suave com velocidade nula num ponto; (ii) curva suave com velocidade nula, sem tangente; (iii) curva suave com velocidade nula, com tangente; (iv) curva regular com um ponto duplo; (v) curva regular com ponto quadruplo.

Curva geométrica

Uma curva geométrica é um sub-conjunto de \mathbb{R}^n que pode ser em cada ponto, localmente, e num referencial bem escolhido, representado como o gráfico de uma função.

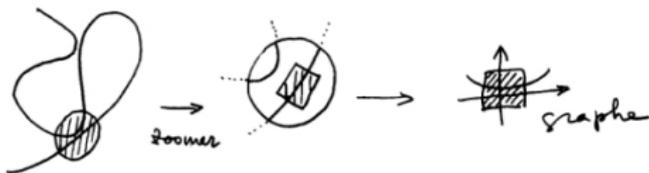


Figure: A curva é globalmente geométrica, pois zoomando em torno a um ponto qualquer pode ser representada por um gráfico.

Lema: Uma curva parametrizada regular (num intervalo aberto I) é sempre localmente uma curva geométrica:

$$\forall t \in I, \exists \epsilon : \gamma[t - \epsilon; t + \epsilon]$$

é uma curva geométrica.



Figure: A curva não é globalmente geométrica pois que γ não é injetiva, i.e., existe um ponto duplo; o pequeno segmento de curva é geométrica.

Ligação entre as duas noções

♣ A imagem $f(I)$ da curva parametrizada dá pouca informação:

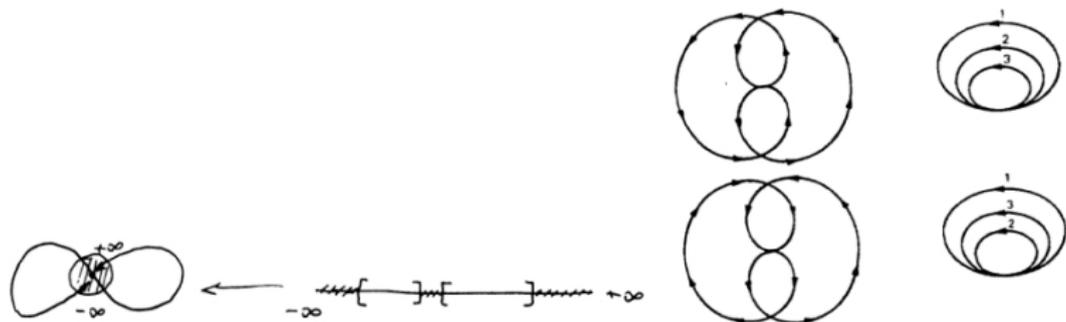


Figure: (i) $f : I =] - \infty, + \infty [\rightarrow \mathbb{R}^2$ é injetiva, porém a curva não é globalmente geométrica, pois que em cada compacto em torno ao ponto de cruzamento assintótico há sempre 3 pedaços de curva des-conexos; (ii) Curvas regulares, com $f(I)$ compacto, não injetivas e com tangente partilhada com duas parametrizações diferentes

♣ Sem hipótese suplementar, uma curva parametrizada regular pode ser horrível. Portanto introduzimos a noção de curva "genérica": sem pontos \geq duplos e sem pontos auto-tangentes.

Os dois primeiros invariantes

Reparametrização

Seja $\psi : I \rightarrow J$ um difeomorfismo (i.e., um homeomorfismo tal que ψ^{-1} é diferenciável), com $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Logo $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma reparametrização da curva. Pois que $\psi \circ \psi^{-1} = \text{Id}$, temos $\dot{\psi} \neq 0$ e portanto $\dot{\tilde{\gamma}} \neq 0$ e cada reparametrização de uma curva regular é regular. Além disto, se $\dot{\psi} > 0$ (resp. < 0) a reparametrização preserve (rep. inversa) a orientação.

Primeiro invariante: comprimento

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada. Portanto o seu comprimento é

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt, \quad \|a\| := (\sum_i a_i^2)^{1/2}, a \in \mathbb{R}^n.$$

O mesmo é invariante por re-parametrização (verificar em casa).

Abcissa curvilínea ou parametrização pelo comprimento

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada regular. Definimos $t \mapsto s(t) := \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau$. Sendo regular temos $\dot{s}(t) := \frac{d}{dt}s(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0$ logo é crescente e então invertível; portanto $s \mapsto t(s) = s^{-1}(t)$ com $t'(s) := \frac{d}{ds}t = 1/\dot{s}(t)$ e $\tilde{\gamma}(s) := \gamma \circ t(s)$ é uma re-parametrização da curva com $\tilde{\gamma} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $l := \mathcal{L}(\gamma)$. O novo parâmetro s é chamado abcissa curvilínea e satisfaz $\tilde{\gamma}'(s) = \frac{\dot{\gamma}(t(s))}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|}$, logo tem velocidade unitária $\|\tilde{\gamma}'\| = 1$.

Curvas em \mathbb{R}^2 . Referencial de Frenet e curvatura

Seja uma curva parametrizada pela sua abcissa. Definimos o vetor tangente $e = \gamma' = (e_1, e_2)$. O vetor normal é definido como $n = (-e_2, e_1)$. Sendo que $e^2 = 1$, temos $e \cdot e' = 0$ portanto $e'(s) = \gamma''(s) = \kappa(s)n(s)$ com κ a curvatura algébrica (i.e., com sinal). Temos

$$\kappa(s) = (\gamma' \times \gamma'') \cdot (e \times n) = \det(\gamma' | \gamma''). \quad (\star)$$

Lema. Segundo invariante: curvatura algébrica

Seja uma curva $\tilde{\gamma}(I) \subset \mathbb{R}^2$ parametrizada por $t \in I$ não necessariamente abscissa curvilínea. A curvatura algébrica, definida como $\kappa(t) := \frac{\det(\dot{\tilde{\gamma}}(t)|\ddot{\tilde{\gamma}}(t))}{\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|^3}$ é invariante por re-parametrização.

DEM. Re-escrevemos (\star) como $\kappa(s) = \frac{\det(\gamma'(s)|\gamma''(s))}{\|\gamma'(s)\|^3}$. Consideremos a re-parametrização $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(s(t))$. O resultado segue uma vez que $\det(\dot{\tilde{\gamma}}(t)|\ddot{\tilde{\gamma}}(t)) = \det(\gamma'(s)\dot{s}(t)|\gamma'(s)\ddot{s}(t) + \gamma''(s)(\dot{s}(t))^2) = (\dot{s}(t))^3 \det(\gamma'(s(t))|\gamma''(s(t)))$ e $\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = \dot{s}(t) \|\gamma'(s)\| = \dot{s}(t)$; logo, $\kappa(s(t)) = \frac{\det(\gamma'(s(t))|\gamma''(s(t)))}{\|\gamma'(s(t))\|^3} = \frac{\det(\dot{\tilde{\gamma}}(t)|\ddot{\tilde{\gamma}}(t))}{\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|^3} = \tilde{\kappa}(t)$. QED.

Corolário: decomposição normal e tangencial da aceleração
Seja uma curva $\tilde{\gamma}(I) \subset \mathbb{R}^2$ parametrizada por $t \in I$ não necessariamente abscissa curvilínea. Notamos $c := \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|$. Portanto $\ddot{\tilde{\gamma}} := \dot{c}e + \frac{c^2}{R}n$, onde $R := |\kappa|^{-1}$, e n é unitário, $\perp e$ e do lado de $\ddot{\tilde{\gamma}}$ (i.e. aponta para o centro de curvatura, ao contrário do anterior onde foi fixo).

DEM. $e^2 = 1$ implica $\dot{e} = \frac{de}{dt} = \alpha n$ com $\alpha \in \mathbb{R}_*$. Mas $\dot{\tilde{\gamma}} = \frac{d\tilde{\gamma}}{dt} = \gamma'(s) \frac{ds}{dt} = ec$, logo $\dot{e} = \frac{\ddot{\tilde{\gamma}}}{c} - \frac{\dot{\tilde{\gamma}}}{c^2} \dot{c}$, i.e., $\ddot{\tilde{\gamma}} = can + \dot{c}e$. Pelo Lema, $|\dot{\tilde{\gamma}} \times \ddot{\tilde{\gamma}}| = |\det(\dot{\tilde{\gamma}}(t) | \ddot{\tilde{\gamma}}(t))| = |\kappa|c^3 = \|ce \times \ddot{\tilde{\gamma}}\| = c^2|\alpha|$, logo $\alpha = \pm|\kappa|c$. Sendo n é escolhido t.q. $\alpha > 0$, segue o resultado. QED.

Acceleração centrípeta

Temos $\ddot{\gamma} = a^T + a^N$ com a componente tangencial $a^T := \dot{c}e$ e a componente normal ou centrípeta $a^N := (c^2/R)n$, $R := 1/|\kappa|$.



Curva cinemática com menor energia

O movimento de uma massa m ao longo da trajetória (i.e., da curva) γ é obtido sem gasto de energia se $a^t = 0$. Logo $\dot{c} = \frac{ds}{dt} = 0$, i.e., $t = \frac{s-s_0}{c}$. De facto, tal movimento é associado com uma potência nula: $ma \cdot ce = 0$. Em dimensão superior tais curvas são chamadas geodésicas (ver mais a frente).

Curvas em $\mathbb{3d}$. fórmulas de Frenet-Serret.

Seja $\gamma \in \mathbb{R}^3$ uma curva regular. A posição de $x \in \gamma$ é dada por $s \mapsto \gamma(s)$ com $s \in J$ a abscissa curvilínea.

(i) vetor tangente $\tau := \gamma'$; $\tau^2 = 1 \Rightarrow (\tau, \tau')_E = \tau \cdot \tau' = 0$.

(ii) Definimos a curvatura da curva $\kappa(s) := \|\tau'(s)\| = \|\gamma''(s)\|$ e o vetor normal n é definido tal que $\tau' = \kappa n$.

(iii) Definimos o triedro de Frenet-Serret no ponto $\gamma(s)$ como $\{\gamma(s); \tau(s), n(s), b(s)\}$ onde $b := \tau \times n$. É um exemplo de base movél curvilínea (no sentido em que depende de cada ponto).

(iv) Por $b' = \tau' \times n + \tau \times n' = \tau \times n'$ deduzimos que $b' \perp \tau$. D'outro lado $b^2 = 1 \Rightarrow b' \perp b$. Portanto existe $s \mapsto \xi(s)$ tal que $b'(s) = -\xi n(s)$, onde ξ é chamado torção da curva.

(v) De $n = b \times \tau$ deduzimos que $n'(s) = -\kappa(s)\tau(s) + \xi(s)b(s)$.

(vi) Finalmente, definindo o vetor de Darboux (ou "de rotação infinitesimal") $\omega := \xi\tau + \kappa b$, obtemos

$\tau' = \omega \times \tau$, $n' = \omega \times n$ e $b' = \omega \times b$.

Caso geral em \mathbb{R}^3 . Segundo e terceiro invariantes

♣ Seja $\gamma \in \mathbb{R}^3$ uma curva regular com parametrização qualquer e parâmetro t não necessariamente abscissa curvilínea. A ordem das definições é alterado:

(i) vetor tangente: $\tau(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$

(ii) vetor bi-normal (ou "out of plane"): $b(t) := \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|}$

(iii) vetor normal: $n(t) := b(t) \times \tau(t) = \frac{(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \times \dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\| \|\dot{\gamma}(t)\|}$

(iv) Curvatura: $\kappa(t) := \frac{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}$.

(v) torção: $\xi(t) := \frac{\det(\dot{\gamma} | \ddot{\gamma} | \ddot{\gamma})}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|^2}$.

♣ Se $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = 0$, i.e., se a aceleração é paralela à velocidade, logo a curva é localmente uma reta e n, b podem ser tomados quaisquer vetores unitários ortogonais à e . Senão, é evidente que τ, b e n são ortonormados, pelo que definem a base móvel (de Frenet-Serret) associada à curva. Falta verificar que κ e ξ coincidem com κ e ξ definidas anteriormente mediante a abscissa curvilínea.

Lema

κ e ξ são invariantes da curva.

DEM. Seja $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(s(t))$. Sendo por definição de s , $\|\dot{\tilde{\gamma}}\| = \frac{ds}{dt}$, logo $\tau = \gamma' = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\dot{\tilde{\gamma}}}{\|\dot{\tilde{\gamma}}\|}$ e $\tau' = \gamma'' = \frac{\ddot{\tilde{\gamma}}}{\|\dot{\tilde{\gamma}}\|^2} + \left(\frac{1}{\|\dot{\tilde{\gamma}}\|}\right)' \dot{\tilde{\gamma}}$. Temos $|\kappa| = \|\tau \times \kappa n\| = \|\gamma' \times \gamma''\| = \frac{\|\dot{\tilde{\gamma}}(t) \times \ddot{\tilde{\gamma}}(t)\|}{\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|^3} = |\tilde{\kappa}(t)|$ com $\tilde{\kappa} := \kappa \circ s$. Lembramos a identidade $\|a \cdot (b \times c)\| = |\det(a|b|c)|$ ($a, b, c \in \mathbb{R}^3$). Logo, $\tau \cdot (\tau' \times \tau'') = \tau \cdot (\kappa n \times \kappa(-\kappa\tau + \xi b)) = \kappa^2 \xi \tau \cdot (n \times b) = \kappa^2 \xi = |\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')| = |\det(\dot{\tilde{\gamma}}, \ddot{\tilde{\gamma}}, \ddot{\tilde{\gamma}})| / \|\dot{\tilde{\gamma}}\|^6$, deduzimos a fórmula pois que $\gamma''' = \frac{\ddot{\tilde{\gamma}}}{\|\dot{\tilde{\gamma}}\|^3} +$ combinação linear de $\dot{\tilde{\gamma}}$ e $\ddot{\tilde{\gamma}}$. QED.

♣ Seja $\mathcal{F} = (\tau|n|b)^T$. A representação de Darboux $\tau' = \omega \times \tau$, $n' = \omega \times n$ e $b' = \omega \times b$ pode ser re-escrita como

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \Omega \mathcal{F}, \quad \Omega := \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \xi \\ 0 & -\xi & 0 \end{pmatrix}. \quad (\star)$$

Teorema fundamental das curvas

Teorema fundamental das curvas espaciais

Seja $s \in [0, l] \mapsto (\kappa(s), \xi(s))$ suave e tal que $\kappa > 0$ em $[0, l]$. Logo existe uma única curva regular e invariante por difeomorfismo crescente (i.e., preservante a orientação) cuja abscissa curvilínea é s e cujas curvatura e torção são κ e ξ .

DEM. Tomemos $\mathcal{F}(0) = \mathbb{I}$. Logo (\star) tem uma solução única, nomeadamente a matriz $s \mapsto \mathcal{F}(s)$. Mostramos que \mathcal{F} é ortogonal: já que $\Omega = -\Omega^T$, logo temos $\frac{d}{ds}(\mathcal{F}^T \mathcal{F}) = (\mathcal{F}^T)' \mathcal{F} + \mathcal{F}^T \mathcal{F}' = \mathcal{F}^T \Omega^T \mathcal{F} + \mathcal{F}^T \Omega \mathcal{F} = 0$, i.e. $\mathcal{F}^T \mathcal{F}(s) = \mathcal{F}^T \mathcal{F}(0) = \mathbb{I}$. Portanto $\mathcal{F}(s)$ pode ser escrita como um triedro ortonormado $(\tau(s)|n(s)|b(s))^T$. Pela representação de Darboux, (\star) , a curva $\gamma(s) := \int_0^s \tau(\zeta) d\zeta$ torna-se a única curva procurada. QED.

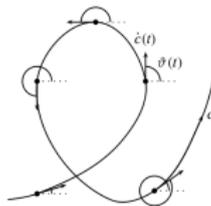
Aplicação às curvas planas

♣ Tomando $\xi(s) = 0, \forall s$, a curva é dita plana (i.e., não sai do quadro). Seja a curvatura $s \in [0, l] \mapsto \kappa(s) \in \mathbb{R}$. Sendo τ unitário, notamos $\tau(\zeta) = e^{i\vartheta(\zeta)} = (\cos \vartheta(\zeta), \sin \vartheta(\zeta))$. A única curva plana com curvatura κ (não necessariamente > 0) é dada por

$\gamma(s) = \int_0^s \tau(\zeta) d\zeta = \int_0^s e^{i\vartheta(\zeta)} d\zeta$ com $\vartheta(\zeta) = \int_0^\zeta \kappa(t) dt$ ($\star\star$). De facto, $\tau(s) := \gamma'(s) = e^{i(\int_0^s \kappa(t) dt)}$ é a tangente unitaria enquanto $\tau'(s) = \gamma''(s) = ie^{i(\int_0^s \kappa(t) dt)} \kappa(s) = n(s)\kappa(s)$ com $n(s) = ie^{i(\int_0^s \kappa(t) dt)}$ tal que $n \cdot \tau = 0$ é a normal (desta vez, definida sem ambiguidade como uma rotação de τ de $+90^\circ$).

♣ Sendo que $\tau(s) = e^{i\vartheta(s)} = (\cos(\vartheta(s)), \sin(\vartheta(s)))$, a função $\vartheta(s)$ representa o ângulo entre $e_x := (1, 0) = \tau(0)$ e $\tau(s)$, i.e., é o ângulo entre a tangente à curva e o eixo horizontal.

Na figura, a curva é re-nomeada $\gamma = c$.



Grau, índice e número de enrolamento

Número de enrolamento - winding number

Seja γ uma curva fechada e suave, i.e. $\gamma(0) = \gamma(l)$, $\gamma'(0) = \gamma'(l)$ (e todas as derivadas também coincidentes nas extremidades). A curvatura total de γ é definida como $\mathcal{K}_\gamma := \int_0^l \kappa(s) ds$. O número de enrolamento (ou número de voltas) de γ é definido como $i_\gamma := \frac{\mathcal{K}_\gamma}{2\pi}$.

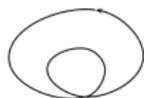
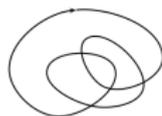
Lema

O número de enrolamento é um número inteiro.

DEM. Sendo que $\gamma'(l) = \gamma'(0)$
 $= e^{i\vartheta(l)} = e^{i\vartheta(0)}$ temos $\vartheta(l) =$
 $\vartheta(0) + 2k\pi$ com k inteiro.

Logo, por (**), $\vartheta(0) = 0$ e
 $\mathcal{K}_\gamma = \vartheta(l) = 2k\pi$. QED.

Na figura $i_\gamma = n_c$.


 $n_c = 2$

 $n_c = -3$

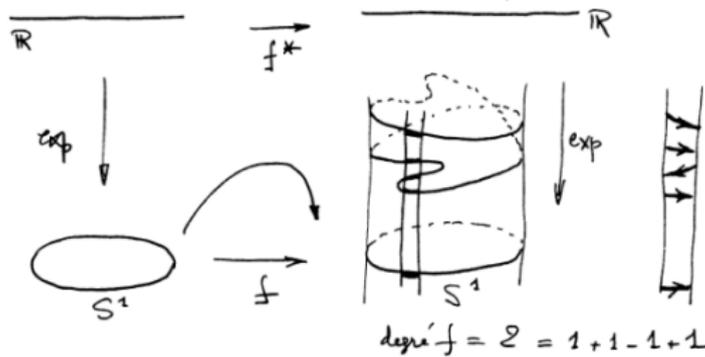
 $n_c = 0$

 $n_c = 1$

Grau de uma aplicação do círculo unitário

♣ Seja uma aplicação $f : S^1 \rightarrow S^1$ contínua. Consideramos a exponencial complexa $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ (i.e., $\exp(u) = e^{iu}$). Pela continuidade de f e sendo \exp localmente um difeomorfismo, existe uma aplicação $f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \circ \exp = \exp \circ f^*$. O grau de f é definido como $\mathcal{G}_f := \frac{f^*(2\pi) - f^*(0)}{2\pi}$. Sendo que $\exp(f^*(2\pi)) - \exp(f^*(0)) = f(\exp(2\pi)) - f(\exp(0)) = 0$ temos necessariamente que \mathcal{G}_f é um número inteiro.

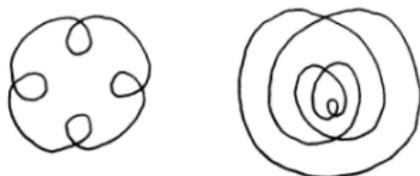
♣ O grau representa "quantas vezes o círculo unitário é recoberto por f ."



♣ O número de enrolamento i_γ de uma curva fechada regular γ foi definido a partir de parametrizações canônicas. Para uma parametrização qualquer, corresponde à noção de grau de $f = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} : [0, 2\pi] \mapsto S^1$, com $[0, 2\pi]$ identificado com S^1 . Portanto temos no plano um terceiro invariante, i_γ pois que $i_\gamma = \mathcal{G} \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}$. Esta invariância por re-parametrização não é a única: o índice de enrolamento é também invariante por difeomorfismos (p.e., rotação, expansão ou reflexão) do plano e por homotopia de curvas:

Teorema de Whitney

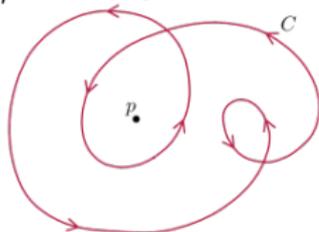
Duas curvas regulares e fechadas são homotopas se e somente se têm o mesmo número de enrolamento.



♣ Porém não têm a mesma "forma", i.e. não são difeomorfas no plano (por falta de homotopia mediante boas curvas, "genéricas")

Índice de um ponto com respeito à uma curva fechada

Seja uma parametrização periódica sobre $[0, 2\pi]$ de uma curva $\gamma(t)$, plana regular e fechada. Seja $p \in \mathbb{R}^2$ um ponto do plano. Definimos a aplicação $f_p(t) := \frac{p - \gamma(t)}{\|p - \gamma(t)\|}$. Logo, identificando t com um ponto de S^1 (i.e., um vetor unitário e um ângulo), $f_p : S^1 \rightarrow S^1$ representa um "ângulo" entre p e a curva. O índice de p com respeito à curva é definido como o grau de f : representa "quanta curva pode ser vista de p , incluído os enrolamentos". Em particular se p está no interior de $\gamma([0, 2\pi])$ e se $i_\gamma = 1$ (i.e., apenas um enrolamento), então o índice de p é 1; assim, o índice é igual á i_γ se p está no interior do último nó da curva; ao contrário, se p se afasta da curva, o índice tende à 0, e vale 0 no infinito.



Umlaufsatz -1-

♣ Seja uma curva plana regular, fechada e simples, i.e., injetiva, parametrizada $t \in I := [0, 1] \sim S^1$. A partir do mapa $g(p, t) := f_p(t)$ definimos o mapa contínuo $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$:
 $h(t_1, t_2) := g(\gamma(t_2), t_1) = \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\|}$ se $t_1 < t_2$ e $(t_1, t_2) \neq (0, 1)$
 e $h(t, t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$ se $t_1 = t_2$. Falta definir h em $(0, 1)$. Por continuidade e periodicidade, $h(0, 1) = -\frac{\dot{\gamma}(0)}{\|\dot{\gamma}(0)\|}$. Com s a abscissa curvilínea, sabemos que $h(t, t) = \gamma'(s) = e^{i\vartheta(s)}$ onde $\vartheta(s) = \int_0^s \kappa(\zeta) d\zeta, 0 \leq s \leq l = \mathcal{L}(\gamma)$.

♣ Portanto o número de enrolamento de γ é $\frac{\vartheta(l)}{2\pi}$. Embora sabemos que $\vartheta(l)$ é múltiplo inteiro de 2π não é evidente demonstrar que vale exatamente $\pm 2\pi$ no caso de uma curva simples geral. Se a curva for conexa, i.e., com a tangente sempre no lado exterior, então é fácil ver e demonstrar que a tangente gira de $\pm 2\pi$.

Umlaufsatz -2-

♣ Para isto, precisamos de um resultados importante valido nos dominios do plano estrelados com respeito a um ponto.

Teorema de levantamento de Hopf

**Seja A um aberto de \mathbb{R}^2 estrelado com respeito a $x_0 \in A$.
Seja $h : A \rightarrow S^1$ um mapa contínuo. Portanto existe um mapa contínuo $\theta : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = e^{i\theta(x)}$, $\forall x \in A$. O mapa é único mediante a prescrição $\theta(x_0) = \theta_0$.**

♣ Voltando ao h definido acima, seja $h(0,0) = \gamma'(0) = (0,1)$. Isto significa que $\theta(0,0) = \pi/2 + 2k\pi$. Aplicamos o Teorema de levantamento em $A = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1\}$ e obtemos um mapa contínuo $\theta : A \rightarrow S^1$.

♣ Definimos o nosso referencial Cartesiano tal que $\gamma(0) = (1,0)$, tal que a imagem $\gamma(I)$ encontra-se inteiramente entre os eixos verticais $x_1 = -1$ e $x_1 = 1$, e tal que $\gamma(t^*) = (-1,0)$.

Umlaufsatz -3-

Hopf's "Umlaufsatz", ou teorema das tangentes girantes
Seja uma curva plana, regular, injetiva e fechada. Então a tangente a curva efetua uma rotação completa de 2π ou de -2π . Em outras palavras, tal curva tem número de enrolamento igual a ± 1 .

DEM. **Step 1.** Pela definição de h , temos $\forall t \in (0, 1)$, $h(0, t) \neq (1, 0)$ e $h(t, 1) \neq (-1, 0)$ já que pelo absurdo, se $h(0, t) = (1, 0)$ então $h_2(t, 0) = 0$ e $h_1(t, 0) - 1 = \|h_1(t, 0) - 1\|$ o que significa que $h^1(t, 0) \geq 1$, uma contradição já que $t > 0$, $\gamma'(0) > 0$ e γ é injetiva. Deduzimos que $2k\pi < \theta(0, t) < 2(k+1)\pi$. Analogamente $h(t, 1) \neq (-1, 0)$ implica que $\pi + 2k\pi < \theta(t, 1) < \pi + 2(k+1)\pi$.

Step 2. Já que $h(0, 1) = -h(0, 0) = (0, -1)$ temos $\theta(0, 1) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$. Mas, por γ ser fechada e pelo step 1, $h(0, 0) = h(1, 1) = (0, 1) = \lim_{t \rightarrow 1} h(t, 1)$ implica $\theta(1, 1) = \lim_{t \rightarrow 1} \theta(t, 1) = \frac{5\pi}{2} + 2k\pi$.

Hopf para curvas regulares por partes

Step 3. Calculemos $2\pi n_\gamma = \vartheta(l) - \vartheta(0) = \theta(1, 1) - \theta(0, 0) = (\theta(1, 1) - \theta(0, 1)) + (\theta(0, 1) - \theta(0, 0)) = \pi + \pi = 2\pi$. QED.

Função com variação limitada

Seja uma função contínua $\vartheta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$. Digamos que ϑ tem variação limitada se a quantidade

$\sup \sum_i |\vartheta(t_{i+1}) - \vartheta(t_i)| < C < \infty$, com o supremo tomado em todas as possíveis partições de $[0, l]$ sempre que

$t_i \leq t_{i+1}, t_0 = 0, t_N = l$. Para além existe o seguinte resultado de aproximação. Seja $\vartheta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{C}^1 por partes, i.e. é \mathcal{C}^1 em todos os pontos excepto num número finito de pontos $\{\dots, t_i, \dots, t_{i+1}, \dots\}$ entre 0 e l onde ϑ é descontínua. Se ϑ tiver variação limitada, então existe uma sucessão $\vartheta_k \in \mathcal{C}^\infty([0, l]; \mathbb{R})$

tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^l |\vartheta'_k(t)| dt = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\vartheta'(t)| dt + \sum_i [\theta_i]$,

onde $[\theta_i]$ é o salto de ϑ nos pontos de discontinuidade de ϑ .

Hopf's "Umlaufsatz" generalizado

Seja $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, continua, regular por parte, simples e fechada. Sejam $\mathcal{T} := \{\dots, t_i, \dots, t_{i+1}, \dots\}$ um número finito de pontos entre 0 e l onde γ' é descontínua. Seja ϑ o ângulo entre γ' e e_1 . Então vale

$$\sum_i (\vartheta(t_{i+1}) - \vartheta(t_i)) + \sum_i [\theta_i] = 2\pi.$$

DEM. Seja γ_k curvas \mathcal{C}^1 tal que $\|\gamma - \gamma_k\|_{\mathcal{C}^0} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Seja ϑ_k o ângulo entre γ'_k e e_1 . Portanto ϑ é descontínuo em \mathcal{T} , \mathcal{C}^1 por partes e com variação limitada (já que existe um número finito de saltos limitados). Para além, ϑ e ϑ_k são crescentes. Logo por Hopf suave e pelo resultado anterior:

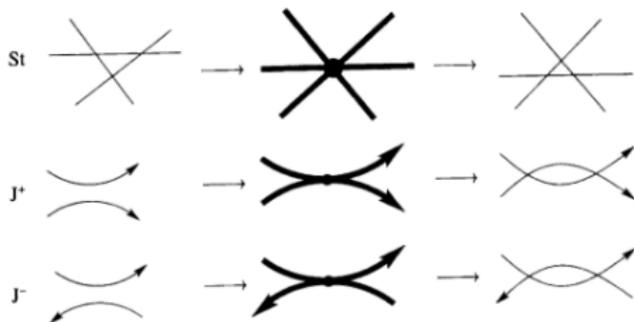
$$\begin{aligned} \vartheta_k \in \mathcal{C}^\infty([0, l]; \mathbb{R}) \text{ tal que } \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^l |\vartheta'_k(t)| dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^l \vartheta'_k(t) dt = \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (\vartheta_k(l) - \vartheta_k(0)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \vartheta_k(l) = 2\pi = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\vartheta'(t)| dt + \\ \sum_i [\theta_i] &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \vartheta'(t) dt + \sum_i [\theta_i] = \sum_i (\vartheta(t_{i+1}) - \vartheta(t_i)) + \sum_i [\theta_i], \end{aligned}$$

onde θ_i é um ângulo exterior. QED.

Classificação das curvas fechadas

♣ A classificação das curvas fechadas é ainda um tópico de investigação científica (Arnold, V. (1994 b). *Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications*. *Adv. Sov. Math.*, 21,33-91.)

♣ O elemento chave é a identificação de 3 invariantes (ditos de Arnold) que são as "singularidades" das curvas: ponto triplos (St para "strangicity number"), e 2 tipos de auto-tangentes (J^+ e J^-):



Superfície regular

♣ Uma superfície regular de \mathbb{R}^3 é dada pelo par (p, A) onde $A \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto e $p : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma função suave e injetiva tal que o mapa inverso é contínuo (i.e., é um homeomorfismo suave). Para além, o gradiente do mapa p é também injetivo, ou seja, a matriz 3×2 , ∇p (com componentes $\partial_\alpha p_i$, $\alpha \in \{1, 2\}, i \in \{1, 2, 3\}$) é de rank 2 (i.e. p é uma imersão injetiva). O sub-conjunto bi-dimensional de \mathbb{R}^3 , $S \equiv p(u, v) \subset \mathbb{R}^3$ é chamado superfície regular parametrizada (i.e., por $(u, v) \in A$). O ponto $p = p(u, v) \in S$ é chamado ponto posição.

♣ Esta definição pode ser generalizada da seguinte maneira: digamos que S é uma superfície regular se em cada ponto p de S existe uma vizinhança U de p e um mapa $p : A \rightarrow U$ onde A é um aberto de \mathbb{R}^2 que verifica as condições de regularidades acima (i.e., é localmente uma imersão injetiva). Digamos que S é de classe \mathcal{C}^k se tais mapas têm regularidade \mathcal{C}^k para todas as vizinhanças em S .

Plano tangente em p

O plano tangente à uma superfície regular S em $p \in S$ é o sub-conjunto de \mathbb{R}^3 : $T_p S := \{v \in \mathbb{R}^3 : \text{existe uma curva regular } \gamma : I \rightarrow S \text{ tal que } \gamma(0) = p \text{ e } \gamma'(0) = v\}$. Tais v são chamados vetores tangentes. Portanto o plano tangente em p é o conjunto dos vetores tangentes em p .

Diferencial de f em p

Tome $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável (i.e., $f \circ p : A \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável enquanto função de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}) e uma curva $\gamma : I \rightarrow S$ t.q. $\gamma(0) = p$. Notamos $\gamma(t) =: (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. Temos a definição seguinte: $\dot{\gamma}(0)f := \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i(0) = \sum_{i=1}^3 \left(\dot{x}_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f$. O vetor $\dot{\gamma}(0) := \dot{x}_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathbb{R}^3$ pertence à $T_p S$ e é exprimido na base movél $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{1 \leq i \leq 3}$ (nota que $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é apenas uma notação para o i ésimo vetor de base) enquanto $\dot{\gamma}(0)f$ é um operador diferencial, i.e., é o diferencial de f na direcção $\dot{\gamma}$: $df(p)[\dot{\gamma}(0)] := \dot{\gamma}(0)f$

Cinemática de uma curva em superfície em \mathbb{R}^3 -1-

♣ Seja uma superfície bi-dimensional regular e suave $S = p(u, v) \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $(u, v) \in A \subset \mathbb{R}^2$; logo $p : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ é suave e injetiva com ∇p de rank 2. Sendo que $p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ definimos $g_u := \frac{\partial p|_{v=\text{cst}}}{\partial u}$ e $g_v := \frac{\partial p|_{u=\text{cst}}}{\partial v}$ dois vetores tangentes à S em $P = p(u, v)$.

Notamos $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha}$, $\alpha \in \{u, v\} = \{1, 2\}$ e a matrix 3×2 $\nabla p = \partial_{u,v} p = (g_u | g_v)$.

♣ Suponhamos que S é orientável, i.e., que existe um campo vetorial suave ν que fica sempre ortogonal quer a g_u quer a g_v . Logo, consideremos uma base local de \mathbb{R}^3 , $\{g_u, g_v, \nu\}$, com ν um campo vetorial unitário e ortogonal à S . O mapa $\nu : S \rightarrow S^2$ é chamado mapa de Gauss (S^n designa a esfera unitária de \mathbb{R}^{n+1}).

♣ Seja $t \in I \mapsto \gamma(t) \subset S$ uma curva suave de S . Portanto $\gamma(I)$ é a imagem por p de uma curva plana $(u(t), v(t)) \subset \mathbb{R}^2$, i.e., $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$. Notamos $w(t) = (u(t), v(t))$.

Cinemática de uma curva em superfície em \mathbb{R}^3 -2-

♣ A velocidade da curva é $c(u(t), v(t)) := \dot{\gamma}(t) := \frac{d}{dt}\gamma(t) = (\dot{w} \cdot \nabla)p(t) := \dot{w}_1 \partial_u p(t) + \dot{w}_2 \partial_v p(t) = \dot{u}(t)g_u + \dot{v}(t)g_v$.

♣ A aceleração da curva é

$a(u(t), v(t)) := \dot{c}(u(t), v(t)) = (\dot{w} \cdot \nabla)c = \ddot{\gamma}(t) = \ddot{u}g_u + \ddot{v}g_v + \dot{u}\dot{g}_u + \dot{v}\dot{g}_v = \ddot{u}g_u + \ddot{v}g_v + \dot{u}^2 \partial_u g_u + \dot{v}^2 \partial_v g_v + 2\dot{u}\dot{v} \partial_v g_u$.

♣ Gostaríamos de decompor a aceleração numa componente ortogonal à superfície, a^N , e outra tangente à superfície, a^T , com componentes a^α , $\alpha \in \{1, 2\} = \{u, v\}$. Temos duas abordagens:

♣ Abordagem directo: Sendo $\partial_u g_u$, $\partial_v g_v$ e $\partial_u g_v = \partial_v g_u$ vetores $3d$, exprimimos os mesmos em função de $g_i := \{g_\alpha, \}_{1 \leq \alpha \leq 2} = \{g_u, g_v, \nu\}$, i.e., $\partial_\alpha g_\beta = \sum_k \Gamma_{\alpha\beta}^k g_k$ com $\alpha, \beta \in \{u, v\}$, e soma em $k \in \{1, 2, 3\}$ e coeficientes $\Gamma_{\alpha\beta}^k$ por determinar. Obtemos a decomposição da aceleração a da curva: $a = \sum_\sigma (a^\sigma g_\sigma) + a^N \nu$ com a componente tangencial $a^\sigma = \ddot{w}^\sigma + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta$, e a componente normal $a^N := (\dot{u})^2 \Gamma_{uu}^3 + (\dot{v})^2 \Gamma_{vv}^3 + 2\dot{u}\dot{v} \Gamma_{uv}^3$.

Geodésica em superfície em \mathbb{R}^3 -3-

♣ Aplicação: seja um ponto em movimento na superfície da esfera de raio R ao longo de um paralelo; tem então um ângulo azimutal $\varphi \geq 0$. Suponhamos que tem uma velocidade constante apenas tangencial ao longo da curva, i.e., $v = V\tau$ ($V = \text{cste}$, $v \cdot n = v \cdot \nu = 0$). A sua aceleração é $V^2/R \tan \varphi n + V^2/R\nu$. Logo existe uma força de atracção ao equador enquanto $\varphi > 0$.

♣ Abordagem mediante a derivada covariante: definimos as componentes da derivada covariante do vetor velocidade

$c = \dot{u}g_u + \dot{v}g_v = c^\alpha g_\alpha$ (com soma em $\alpha \in \{1, 2\} = \{u, v\}$), nomeadamente $c_{\parallel\beta}^k$ da maneira seguinte:

$\partial_\beta c = \partial_\beta(c^\alpha g_\alpha) =: c_{\parallel\beta}^k g_k$, com soma em $k \in \{1, 2, 3\}$.

♣ Portanto $a = (\dot{w} \cdot \nabla)c = \dot{w}^\beta \partial_\beta c = \dot{w}^\beta c_{\parallel\beta}^k g_k$. Logo $a^\gamma = \dot{w}^\beta c_{\parallel\beta}^\gamma$.

♣ Vetorialmente: $a^\gamma = c^\alpha g_\alpha \cdot c_{\parallel\beta}^\gamma g_\beta$, pois que $g_\alpha \cdot g_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ e $c^\beta = \dot{w}^\beta$ são as componentes da velocidade na base local $\{g_u, g_v\}$.

Geodésica em superfície em \mathbb{R}^3 -4-

Definição de curva geodésica

Uma curva numa superfície é dita geodésica se a componente tangencial da sua aceleração é nula: $a^\sigma = 0, \sigma \in \{u, v\}$. Portanto a sua equação é

$$\ddot{w}^\sigma + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta = 0 \quad (\star).$$

♣ Notamos:

- ▶ (\star) tem uma solução unica dados $w(0)$ e $\dot{w}(0)$
- ▶ (\star) re-escreve-se como:

$$\sum_{\beta} \dot{w}^\beta \frac{\partial \dot{w}^\gamma}{\partial w^\beta} + \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta = \sum_{\beta} c^\beta \left(\frac{\partial c^\gamma}{\partial w^\beta} + \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma c^\alpha \right) =:$$

$$\sum_{\beta} c^\beta (\nabla^\Gamma c)_{\beta}^{\gamma} = \sum_{\beta} c^\beta c_{\parallel\beta}^{\gamma} = c \cdot (\nabla^\Gamma c^\gamma) = 0, \text{ com } c^\gamma \text{ a}$$

componente de c na base local curvilinea, definindo assim a derivada covariante de c , $\nabla^\Gamma c$, mediante os simbolos de Christoffel Γ .

Geodésica numa superfície em \mathbb{R}^3 -5-

- ▶ O gradiente covariante $\nabla^\Gamma c$ tem componentes na base local curvilínea, sendo que $\nabla^\Gamma c = (\nabla^\Gamma c)_k^\gamma g_\gamma \otimes g^k = (\nabla^\Gamma c^\gamma)_k g_\gamma \otimes g^k = (\nabla^\Gamma c^l)_k g_l \otimes g^k = (\nabla^\Gamma c)_k^l g_l \otimes g^k = \partial_j c^i e_i \otimes e^j = \nabla c$ onde ∇ é o gradiente Cartesiano. Portanto, temos a transformação tensorial $\partial_j c^i = (g_l)^i (g^k)_j (\nabla^\Gamma c^l)_k$.
- ▶ A velocidade é constante pois que $\frac{d}{dt}c^2 = 2c \cdot \dot{c} = 2c \cdot (a^N \nu) = 0$.
- ▶ Sendo a velocidade c constante o elemento de comprimento de curva $ds = \dot{\gamma} dt = c dt$ portanto o parametro t (o "tempo") e proporcional à abcissa curvilínea.
- ▶ A potência necessária ao movimento de uma puntual m longo γ é $ma \cdot c$, logo é nula numa geodésica; portanto diz-se que uma geodésica é a curva com menor "energia"
- ▶ Uma geodésica é uma curva que minimiza o comprimento entre 2 pontos de S . A demonstração será feita mais a frente.

Métrica induzida e comprimento de uma curva

Métrica induzida na superfície

Sendo $g_\alpha(t) := \partial_\alpha p(w(t))$, $\alpha \in \{u, v\}$ com $w(t) = (u(t), v(t))$, i.e., $g_u := \partial_u p$ e $g_v = \partial_v p$, dois vetores independentes e tangentes à superfície em $p = p(w) = p(u, v)$, a métrica induzida (pelo produto escalar Cartesiano de \mathbb{R}^3) é definida como o conjunto de 4 componentes, i.e. a matriz $g_{\alpha\beta} := g_\alpha \cdot g_\beta$, $\alpha, \beta \in \{u, v\}$.

Elemento de comprimento entre 2 pontos numa superfície

Consideremos os pontos $p(w)$ e $p(w + \delta w)$ pertencentes à S . Qual será a distância (em \mathbb{R}^3) entre $p(w + \delta w)$ e $p(w)$? Como $p(w + \delta w) = p(w) + \sum_{\alpha=1}^2 \delta w^\alpha \partial_\alpha p + o(\|\delta w\|)$ temos que calcular

$$\|p(w + \delta w) - p(w)\| = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^2 \delta w^\alpha g_\alpha \cdot \sum_{\beta=1}^2 \delta w^\beta g_\beta + o(\|\delta w\|)} =$$

$$\sqrt{\sum_{\alpha=1}^2 \delta w^\alpha g_\alpha \cdot \sum_{\beta=1}^2 \delta w^\beta g_\beta + o(\|\delta w\|)}.$$

Logo o termo principal é o termo na primeira ordem, ou seja $ds^2 := \sqrt{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} \delta w^\beta \delta w^\alpha}$.

Primeira forma fundamental (ou métrica)

Comprimento de uma curva:

$\mathcal{L}(\gamma) := \int_I \|\dot{w}\|_g dt$ com a velocidade $\|\dot{w}\|_g := \sqrt{\sum_{\alpha,\beta=1}^2 g_{\alpha\beta} \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta}$,
obtida mediante a métrica $g_{\alpha\beta}$ induzida na superfície.

Primeira forma fundamental

Calculamos a norma ao quadrado da velocidade de $\gamma(t) = p(w(t))$:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}^2(t) &= \left\| \frac{d}{dt} p \circ w(t) \right\|^2 = \partial_\alpha p \frac{dw^\alpha}{dt} \cdot \partial_\beta p \frac{dw^\beta}{dt} = \\ &= (g_u \dot{u} + g_v \dot{v}) \cdot (g_u \dot{u} + g_v \dot{v}) = E \dot{u}^2 + G \dot{v}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^2 g_{\alpha\beta} \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta \text{ com } E := g_u \cdot g_u, G := g_v \cdot g_v, F := g_u \cdot g_v. \end{aligned}$$

A primeira forma fundamental é definida como o mapa bilinear:

$$\mathbb{I}_1(a, b) := E a_1 b_1 + F(a_1 b_2 + a_2 b_1) + G a_2 b_2, \quad (a, b \in T_p S).$$

Temos $ds := |\dot{\gamma}| dt$, i.e., o elemento de comprimento $ds^2 := dp \cdot dp$ é definido como o mapa quadrático definido positivo:

Superfícies isométricas

Duas superfícies regulares $p : A \rightarrow S$ e $\tilde{p} : A \rightarrow \tilde{S}$ são ditas isométricas se as curvas imagem $\gamma := p \circ w$ e $\tilde{\gamma} = \tilde{p} \circ w$ têm o mesmo comprimento, i.e., se $\forall J \subset I$ e $\forall t \in J \mapsto w(t) \in A$, temos

$$\mathcal{L}(p \circ w(J)) = \mathcal{L}(\tilde{p} \circ w(J)), \text{ ou seja } \int_J \sqrt{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta} dt$$

$$= \int_J \sqrt{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 \tilde{g}_{\alpha\beta} \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta} dt, \text{ com } g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha p \cdot \partial_\beta p \text{ e}$$

$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \tilde{p} \cdot \partial_\beta \tilde{p}$. Logo, para $x := w(t_0)$, fazendo as escolhas particulares $w = x + te_u, w = x + te_v, w = x + t(e_u + e_v)$,

$J_n := [t - 1/n, t + 1/n]$, dividindo por $n/2$, e deixando $n \rightarrow \infty$

$$\text{obtemos } \sqrt{g_{11}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \int_{t-1/n}^{t+1/n} \sqrt{g_{11}(x + te_1)} dt = \sqrt{\tilde{g}_{11}(x)},$$

etc, pelo que a propriedade de isometria equivale à

$$g_{\alpha\beta}(x) = \tilde{g}_{\alpha\beta}(x), \forall x = w(t) \in A, t \in I.$$

♣ A métrica do cilindro é $ds^2 = d(r\theta)^2 + dz^2$, logo é isométrico com o plano (onde $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$): em particular, partilham quantidades intrínsecas como comprimento, ângulo e área.

♣ Uma métrica isotermal é uma métrica tal que $F = 0$ e $E = G = \lambda(u, v)$ onde λ é uma função de u e v .

Lema. Curvas isométricas

Uma curva numa superfície $S \equiv p(A)$ tem o mesmo comprimento de que a sua pre-imagem em A , se e somente se a métrica de S é isothermal com $E = G = 1$, i.e. se a métrica é Euclidiana.

DEM. O sentido "se" é evidente já que $\mathcal{L}(\gamma) = \int_I \|\dot{w}\|_g dt = \int_I \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt = \int_I \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2} dt$. No outro sentido: toma um ponto qualquer $w(t_0) \in A$ e considere o segmento $t \mapsto \tilde{w}(t) := w(t_0) + t(\cos \alpha, \sin \alpha)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ e $0 \leq t \leq c$. Por hipótese o comprimento de $p(\tilde{w}([0, c]))$ é igual à c . Derivando com c a igualdade $c = \int_0^c \sqrt{(E \cos^2 \alpha + 2F \cos \alpha \sin \alpha + G \sin^2 \alpha)} dt$ temos $1 = E \cos^2 \alpha + 2F \cos \alpha \sin \alpha + G \sin^2 \alpha$. Toma $\alpha = 0$, logo $E = 1$. Toma $\alpha = \pi/2$, logo $G = 1 = E$. Portanto, $1 = 1 + 2F \cos \alpha \sin \alpha, \forall \alpha$, logo $F = 0$. QED.

Elemento de área

O elemento de área numa superfície em $P \in S$ e definido como

$$dS = \|\vec{dS}\| = \|\vec{ds}_u \times \vec{ds}_v\| := \|\partial_u p(P)du \times \partial_v p(P)dv\|$$

$$= |g_u(P) \times g_v(P)|dudv = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ g_u^1 & g_u^2 & g_u^3 \\ g_v^1 & g_v^2 & g_v^3 \end{vmatrix} dudv =$$

$$\sqrt{(g_u^2 g_v^3 - g_{u_3} g_v^2)^2 + (g_u^1 g_v^3 - g_{u_3} g_v^1)^2 + (g_u^1 g_v^2 - g_{u_2} g_v^1)^2} dudv =$$

$$\sqrt{\begin{vmatrix} g_u \cdot g_u & g_u \cdot g_v \\ g_v \cdot g_u & g_v \cdot g_v \end{vmatrix}} dudv = \sqrt{\det g_{\alpha\beta}} dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Superfícies equi-areais

Duas superfícies regulares $p : A \rightarrow S$ e $\tilde{p} : A \rightarrow \tilde{S}$ são ditas equi-areais se as superfícies imagem têm a mesma área, i.e., se $\forall B \subset A$ t.q. \bar{B} é compacto, temos $\int_B dS = \int_B d\tilde{S}$. Logo, definindo $B := B(x, \epsilon)$, dividindo por $\text{vol}(B)$ e deixando $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos $|\det g_{\alpha\beta}|(x) = |\det \tilde{g}_{\alpha\beta}|(x), \forall x \in A$.

Ângulo entre duas curvas numa superfície

Seja duas curvas $\gamma := p \circ w$ e $\eta := p \circ z$ pertencentes à S , com a sua abcissa curvilínea s e ζ . O ângulo χ no ponto de intersecção P de γ e η é definido como o ângulo entre os dois vetores

$$\begin{aligned} \text{tangentes em } P, \text{ ou seja (com } ' = \frac{d}{dt}) \quad \cos \chi &= \frac{(p \circ w)' \cdot (p \circ z)'}{\|(p \circ w)'\| \|(p \circ z)'\|} \\ &= \frac{\sum_{\alpha=1}^2 \partial_{\alpha} p(w')^{\alpha} \cdot \sum_{\beta=1}^2 \partial_{\beta} p(z')^{\beta}}{\|(p \circ w)'\| \|(p \circ z)'\|} = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \frac{g_{\alpha\beta} (w')^{\alpha} (z')^{\beta}}{\|(p \circ w)'\| \|(p \circ z)'\|} \\ &= \frac{g[w', z']}{\sqrt{g[w', w'] g[z', z']}}, \text{ onde } g[a, b] := \sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} a_{\alpha} b_{\beta} = \mathbb{I}_1[a, b]. \end{aligned}$$

Superfície conformal

Duas superfícies regulares $p : A \rightarrow S$ e $\tilde{p} : A \rightarrow \tilde{S}$ são ditas conformais se as curvas imagem fazem o mesmo ângulo nos pontos de intersecção, i.e., se para cada duas curvas

$$\begin{aligned} \gamma := p \circ w, \eta := p \circ z \in S \text{ com intersecção } Q \text{ e} \\ \tilde{\gamma} := \tilde{p} \circ w, \tilde{\eta} := \tilde{p} \circ z \in \tilde{S} \text{ com intersecção } \tilde{Q}, \text{ temos } \chi(Q) = \tilde{\chi}(\tilde{Q}). \end{aligned}$$

Lema

Seja A um aberto de \mathbb{R}^2 . Duas superfícies conformais $p(A)$ e $\tilde{p}(A)$ verificam $\exists C > 0 : g_{\alpha\beta} = C\tilde{g}_{\alpha\beta}$.

DEM. A relação $\cos \chi = \cos \tilde{\chi}$ implica $\frac{g[w',z']}{\sqrt{g[w',w']g[z',z']}} = \frac{\tilde{g}[\tilde{w}',\tilde{z}']}{\sqrt{\tilde{g}[\tilde{w}',\tilde{w}']\tilde{g}[\tilde{z}',\tilde{z}']}}$, i.e., $g[W',Z'] = \tilde{g}[\tilde{W}',\tilde{Z}']$ com os vetores unitários $Y := \frac{y}{\sqrt{g[y,y]}}$ (mediante a norma $\|y\| := \sqrt{g[y,y]}$). D'outro lado, sendo g uma forma definida positiva, escreve-se mediante uma matriz definida positiva A , i.e. temos $AX \cdot X = 1 = \tilde{A}\tilde{X} \cdot \tilde{X}$ com X e \tilde{X} unitários nas normas induzidas por g e \tilde{g} . Escolhendo X e \tilde{X} os dois primeiros vetores próprios ortonormados de A e \tilde{A} , temos $AX \cdot X = \lambda X^2 = \tilde{A}\tilde{X} \cdot \tilde{X} = \tilde{\lambda}\tilde{X}^2 \Rightarrow X = \pm F\tilde{X}$ com $F := \sqrt{\tilde{\lambda}/\lambda}$. Os segundos vetores próprios ortonormados Y, \tilde{Y} verificam $Y = \pm\sqrt{\tilde{\mu}/\mu}Y$; mas, sendo Y e \tilde{Y} uma rotação de 90° de X, \tilde{X} , temos $F = \sqrt{\tilde{\mu}/\mu}$, e $Y = \pm F\tilde{Y}$.

DEM. (cont.) Ora $W' = aX + bY$ e $Z' = cX + dY$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $\tilde{W}' = \tilde{a}\tilde{X} + \tilde{b}\tilde{Y}$ e $\tilde{Z}' = \tilde{c}\tilde{X} + \tilde{d}\tilde{Y}$ com $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d} \in \mathbb{R}$. Logo $AW' \cdot Z' = acAX \cdot X + bdAY \cdot Y$, já que $AX \cdot Y = 0$, i.e. obtemos $AW' \cdot Z' = ac + bd$. Da mesma maneira vem $\tilde{A}\tilde{W}' \cdot \tilde{Z}' = \tilde{a}\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{d}$. Pela propriedade de conformalidade, $AW' \cdot Z' = \tilde{A}\tilde{W}' \cdot \tilde{Z}'$, logo $ac + bd = \tilde{a}\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{d}$. D'outro lado, se calcularmos explicitamente, vem

$$AW' \cdot Z' = A(aX + bY) \cdot (cX + dY) = F^2 A(a\tilde{X} + b\tilde{Y}) \cdot (c\tilde{X} + d\tilde{Y}) = \tilde{A}\tilde{W}' \cdot \tilde{Z}' = \tilde{A}(\tilde{a}\tilde{X} + \tilde{b}\tilde{Y}) \cdot (\tilde{c}\tilde{X} + \tilde{d}\tilde{Y}) = \tilde{a}\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{d} = ac + bd = \tilde{A}(a\tilde{X} + b\tilde{Y}) \cdot (c\tilde{X} + d\tilde{Y}),$$

a última igualdade vindo da ortonormalidade de \tilde{X} e \tilde{Y} . Sendo isto válido para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, definimos $U := a\tilde{X} + b\tilde{Y}$ e $V := c\tilde{X} + d\tilde{Y}$, pelo que $F^2 AU \cdot V = \tilde{A}U \cdot V$ para quaisquer vetores $U, V \in \mathbb{R}^3$. Daí, concluímos que $F^2 A = \tilde{A}$ (verifica-se componente por componente, tomando $U = e_1, V = e_1$, depois $U = e_1, V = e_2$ e enfim $U = e_2, V = e_2$). QED.

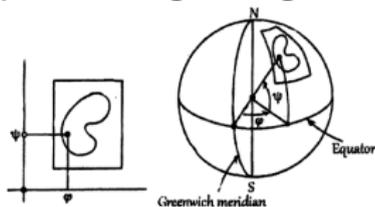
Lema

Duas superfícies conformais e equi-areais são necessariamente isométricas.

DEM. Sendo conformais temos pelo Lema $\exists C > 0 : g_{\alpha\beta} = C\tilde{g}_{\alpha\beta}$ pelo que $|\det g_{\alpha\beta}| = C^2 |\det \tilde{g}_{\alpha\beta}|$. Logo, pela propriedade de equi-área, necessariamente $C = 1$. QED.

Mapas cartográficos

Um mapa é uma imersão injetiva suave de um aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ em $S \subset \{x : \|x\| = R\}$ (o globo). O Lema anterior diz que num mapa cartográfico não pode haver quer as áreas quer os ângulos iguais às áreas e ângulos medidos na superfície do globo. A demonstração completa requer provar que não existe nenhum mapa $p : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ isométrico, uma vez que o plano e a esfera não têm a mesma curvatura de Gauss (vê mais a diante o Teorema Egregium).



Segunda forma fundamental

Segunda forma fundamental e curvatura normal

♣ Vimos que a aceleração da curva tem uma componente tangencial e outra normal, nomeadamente $a = a^T + a^N$ com a aceleração centrípeta $a^N := \dot{u}^2 \Gamma_{uu}^3 + \dot{v}^2 \Gamma_{vv}^3 + 2\dot{u}\dot{v} \Gamma_{uv}^3$, com $\Gamma_{uu}^3 = L := \partial_u g_u \cdot \nu = \partial_u(g_u \cdot \nu) - g_u \cdot \partial_u \nu = -g_u \cdot \partial_u \nu$, $\Gamma_{vv}^3 = N := \partial_v g_v \cdot \nu = -g_v \cdot \partial_v \nu$, $\Gamma_{uv}^3 = M := \partial_v g_u \cdot \nu = -g_u \cdot \nu_v$.

Logo definimos a curvatura normal (com a abcissa curvilínea s):

$\kappa_n(s) := \|a^N(s)\| = L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2$. Daí o mapa quadrático (não necessariamente definido positivo):

$\mathbb{I}_2[dw] := -dp \cdot d\nu = Ldu^2 + Ndv^2 + 2Mdudv$, ($dw = (du, dv)$),

associado ao mapa bilinear "segunda forma fundamental"

$\mathbb{I}_2(a, b) = La_1b_1 + M(a_1b_2 + a_2b_1) + Na_2b_2, \forall a, b \in T_pS$.

♣ A fórmula de Meusnier $\kappa_n(p) = \mathbb{I}_2[\gamma'(t)]$, $p = \gamma(t)$ diz que a curvatura normal só depende das velocidades (i.e., das tangentes)

Invariança por mudança de coordenadas

♣ Assim, a 2.^a forma fundamental diz como o comprimento de uma curva varia com a curvatura normal da superfície, i.e. como a 1.^a forma varia com ν .

♣ Seja $A := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ e $B := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ as matrizes associadas à primeira e segunda forma fundamental, i.e.

$$\mathbb{I}_1[du, dv] = A(du|dv)^T \cdot (du|dv), \quad \mathbb{I}_2[du, dv] = B(du|dv)^T \cdot (du|dv)$$

♣ Seja o difeomorfismo "mudança de coordenadas"

$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \psi(u, v)$. Seja $\tilde{p} := p \circ \phi(\tilde{u}, \tilde{v})$ com $\phi := \psi^{-1}$. Seja

$\mathcal{J} := \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}$ a jacobiana associada. As componentes da 1.^a forma

são $\tilde{E} = \partial_{\tilde{u}}\tilde{p} \cdot \partial_{\tilde{u}}\tilde{p} = (\partial_u p \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \partial_v p \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}) \cdot (\partial_u p \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \partial_v p \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}) =$

$E(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}})^2 + 2F \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} + G(\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}})^2$, etc. com F e G , i.e. matricialmente

$\tilde{A} = \mathcal{J}^T A \mathcal{J}$. Da mesma maneira: $\tilde{B} = \mathcal{J}^T B \mathcal{J}$.

♣ Para além, $\det \tilde{A} = |\det \mathcal{J}|^2 \det A$ e $\det \tilde{B} = |\det \mathcal{J}|^2 \det B$.

Mapa de Weingarten

♣ A matriz $W := A^{-1}B$ é chamada matriz de Weingarten. Sob mudança de coordenadas temos $\tilde{W} = \tilde{A}^{-1}\tilde{B}$
 $= (\mathcal{J}^T A \mathcal{J})^{-1}(\mathcal{J}^T B \mathcal{J}) = \mathcal{J}^{-1}W \mathcal{J}$. In particular $\det \tilde{W} = \det W$
 e $\text{tr } \tilde{W} = \text{tr } W$. Logo W e \tilde{W} têm os mesmos valores próprios.

Teorema de Weingarten

Sendo $W = A^{-1}B$, temos

$$d\nu = -W dp \quad \text{i.e., } (\partial_u \nu | \partial_v \nu) = -(g_u | g_v)W \quad (\mathbf{W}).$$

DEM. Seja as matrizes $\mathcal{F} := (g_u | g_v | \nu)$ e $Q := (\partial_u \nu | \partial_v \nu | \nu)$. Logo $\mathcal{F}^T \mathcal{F} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $-\mathcal{F}^T Q = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, com a convenção $a \cdot b = a^T b$. Portanto $-\mathcal{F}^{-1}Q = -(\mathcal{F}^T \mathcal{F})^{-1} \mathcal{F}^T Q = \begin{pmatrix} A^{-1}B & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, logo $Q = -\mathcal{F} \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, i.e. a tese. QED.

Relações de compatibilidade da teoria das superfícies -1-

♣ Em particular, um corolário imediato diz que $\{\partial_u \nu, \partial_v \nu\}$ são linearmente dependentes se e somente se $\det W = 0$, já que $\{g_u, g_v\}$ são linearmente independentes.

♣ Vimos que $\partial_\alpha g_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^k g_k$ (C) e por Weingarten que $\partial_\alpha \nu = -W_{\alpha\beta} g_\beta$. Sendo a superfície suave temos sempre $\partial_{\alpha\beta} g_\gamma := \partial_\alpha \partial_\beta g_\gamma = \partial_{\beta\alpha} g_\gamma$. Por exemplo, aplicamos isto à g_u , e identificamos os termos múltiplos de g_u, g_v e ν :

$$\begin{aligned} \partial_{vu} g_u - \partial_{uv} g_u &= \mathbf{A}_u g_u + \mathbf{B}_u g_v + \mathbf{C}_u \nu = 0, \text{ i.e., } 0 = \partial_v \Gamma_{uu}^k g_k + \\ &\Gamma_{uu}^k \partial_v g_k - \partial_u \Gamma_{vu}^k g_k - \Gamma_{vu}^k \partial_u g_k = (\partial_v \Gamma_{uu}^u - \partial_u \Gamma_{vu}^u + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{vu}^u + \\ &\Gamma_{vu}^u \Gamma_{vu}^v - \Gamma_{uu}^3 W_{vu} - \Gamma_{uu}^u \Gamma_{vu}^v - \Gamma_{vu}^v \Gamma_{uv}^u + \Gamma_{vu}^3 W_{uu}) g_u + \mathbf{B}_u g_v + \\ &\left(\partial_v \Gamma_{uu}^3 + \sum_{\alpha=1}^2 \Gamma_{uu}^\alpha \Gamma_{v\alpha}^3 - \partial_u \Gamma_{vu}^3 - \sum_{\alpha=1}^2 \Gamma_{vu}^\alpha \Gamma_{u\alpha}^3 \right) \nu \end{aligned}$$

♣ Isto implica que $\mathbf{A}_u = \mathbf{B}_u = \mathbf{C}_u = 0$. De $\mathbf{A}_u = 0$ obtemos a fórmula de Gauss demonstrada mais a frente.

♣ Lembramos que as matrizes associadas às 1.^a e 2.^as formas fundamentais são $A = (a_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$ com $a_{\alpha\beta} := g_{\alpha\beta}$ e $B = (b_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$.

Equações de Gauss e de Codazzi-Mainardi

♣ Definimos as matrizes $\Gamma_\gamma := \begin{pmatrix} (\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha)_{\alpha\beta} & -W_{\alpha\gamma} \\ b_{\gamma\alpha} & 0 \end{pmatrix}$ com

$$\gamma, \alpha, \beta \in \{u, v\}, \text{ ou seja } \Gamma_\gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{\gamma 1}^1 & \Gamma_{\gamma 2}^1 & -W_{\gamma 1} \\ \Gamma_{\gamma 1}^2 & \Gamma_{\gamma 2}^2 & -W_{\gamma 2} \\ b_{\gamma 1} & b_{\gamma 2} & 0 \end{pmatrix}.$$

♣ Observamos agora que $\mathbf{A}_u = 0$ escreve-se como

$$0 = (\partial_v \Gamma_u - \partial_u \Gamma_v + \Gamma_v \Gamma_u - \Gamma_u \Gamma_v)_{11} \text{ (verifica-se facilmente que: } \\ (\Gamma_v \Gamma_u - \Gamma_u \Gamma_v)_{11} = \sum_\tau (\Gamma_{v\tau}^1 \Gamma_{u1}^\tau - \Gamma_{u\tau}^1 \Gamma_{v1}^\tau) - W_{v1} B_{u1} + W_{u1} B_{v1} \\ = \Gamma_{v2}^1 \Gamma_{u1}^2 - \Gamma_{u2}^1 \Gamma_{v1}^2 - \Gamma_{u1}^3 W_{v1} + \Gamma_{v1}^3 W_{u1}, \text{ onde } (u, v) \equiv (1, 2)).$$

♣ Assim, é fácil ver que o conjunto $\mathbf{A}_u = \mathbf{B}_u = \mathbf{C}_u = 0$

corresponde a $0 = (\partial_v \Gamma_u - \partial_u \Gamma_v + \Gamma_v \Gamma_u - \Gamma_u \Gamma_v)_{1j}, j \in \{1, 2, 3\}$.

♣ Agora, se aplicarmos a compatibilidade também a g_v (i.e., linha $2j$) e a ν (i.e., linha $3j$) obteríamos uma equação matricial, chamada condição de compatibilidade de Pfaff:

$$0 = (\partial_v \Gamma_u - \partial_u \Gamma_v + \Gamma_v \Gamma_u - \Gamma_u \Gamma_v)_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (\square)$$

Relações de compatibilidade da teoria das superfícies -2-

♣ Seja $\mathcal{F} := (g_u | g_v | \nu)^T$ e definimos $\Omega := \Gamma_u^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $\Lambda := \Gamma_v^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Pela definição dos símbolos de Christoffel $\partial_\alpha g_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^k g_k$ e pela fórmula de Weingarten $\partial_\alpha \nu = -W_{\alpha\beta} g_\beta$ acabamos de demonstrar o teorema seguinte:

Teorema. Equação de compatibilidade das superfícies

Temos:

$$\partial_u \mathcal{F} = \Omega \mathcal{F}, \quad \partial_v \mathcal{F} = \Lambda \mathcal{F}.$$

Alem disto, valem as equações de Pfaff (\square) na forma seguinte:

$$\Omega \Lambda + \partial_v \Omega = \Lambda \Omega + \partial_u \Lambda \quad (\text{G.C.M.})$$

DEM. As duas primeiras identidades valem por identificação de termos; a última segue da igualdade $\partial_{uv} \mathcal{F} = \partial_{vu} \mathcal{F}$:

$\partial_v(\partial_u \mathcal{F}) = \partial_v \Omega \mathcal{F} + \Omega \partial_v \mathcal{F} = \partial_u(\partial_v \mathcal{F}) = \partial_u \Lambda \mathcal{F} + \Lambda \partial_u \mathcal{F}$, logo multiplicado por \mathcal{F}^T segue a tese. QED.

Relações de compatibilidade da teoria das superfícies -3-

♣ Equação (G.C.M.) é chamada "condição necessária do teorema fundamental das superfícies", ou "relações de compatibilidade das superfícies regular e suaves" (ou de Gauss-Codazzi-Mainardi). Já vimos as equações de Gauss, faltam definir as equações de Codazzi-Mainardi:

Equações de Codazzi-Mainardi

Escrevendo $\mathbf{C}_u = 0 = (\Omega\Lambda + \partial_v\Omega - \Lambda\Omega - \partial_u\Lambda)_{31}$ obtemos

$$\partial_v L - \partial_u M = L\Gamma_{vu}^u + M(\Gamma_{vu}^v - \Gamma_{uu}^u) - N\Gamma_{uu}^v \quad (\mathbf{M.C.1}).$$

Analogamente $\mathbf{C}_v = 0 = (\Omega\Lambda + \partial_v\Omega - \Lambda\Omega - \partial_u\Lambda)_{32}$ donde

$$\partial_v M - \partial_u N = L\Gamma_{vv}^u + M(\Gamma_{vv}^v - \Gamma_{uv}^u) - N\Gamma_{uv}^v \quad (\mathbf{M.C.2}).$$

♣ Remark: Verifica-se que a componente 3α é igual à $\alpha 3$ e que

$$(\Omega\Lambda + \partial_v\Omega - \Lambda\Omega - \partial_u\Lambda)_{33} = (BW)_{vu} - (BW)_{uv} = 0. \text{ Logo}$$

$$(\Omega\Lambda + \partial_v\Omega - \Lambda\Omega - \partial_u\Lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_u & \mathbf{A}_v & \mathbf{C}_u \\ \mathbf{B}_u & \mathbf{B}_v & \mathbf{C}_v \\ \mathbf{C}_u & \mathbf{C}_v & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (\mathbf{G.C.M.}).$$

Teorema fundamental das superfícies -1-

Condições de compatibilidade

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto conexo. Seja $n - 1$ campos matriciais $\Gamma_i \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$, $1 \leq i \leq n - 1$. As matrizes Γ_i s ao ditas compativeis se verificam

$$\partial_i \Gamma_k(x) - \partial_k \Gamma_i(x) + \Gamma_i(x) \Gamma_k(x) - \Gamma_k(x) \Gamma_i(x) = 0, \forall x \in \Omega, 1 \leq i, k \leq n - 1. \quad (\square)$$

Teorema preliminar. Sistema matricial de Pfaff

Seja $x_0 \in \Omega$, e $F_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ fixados. Se Γ_i satisfaz (\square) então existe uma unica matriz $F \in \mathcal{C}^2(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ solução do sistema

$$\partial_i F(x) = \Gamma_i(x) F(x), \quad \forall x \in \Omega, 1 \leq i \leq n - 1,$$

com a condição limite $F(x_0) = F_0$.

♣ Remark: se $n = 1$ o sistema de Pfaff torna-se um classico ODE

Teorema fundamental das superfícies -2-

Teorema de Levi-Civita

Seja uma base local $\{g_\alpha, g_n\}_{1 \leq \alpha \leq n-1} := \{g_1, \dots, g_{n-1}, \nu\}$ **definida numa superfície** $S \subset \mathbb{R}^n$ **e a métrica induzida obtida como** $g_{\alpha\beta} = g_\alpha \cdot g_\beta, \alpha, \beta \in \{1, \dots, n-1\}$. **Os símbolos de Christoffel definidos como** $\partial_\alpha g_\beta = \sum_{k=1}^n \Gamma_{\alpha\beta}^k g_k$ **verificam:**

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} \sum_{\tau=1}^{n-1} (\partial_\alpha g_{\beta\tau} + \partial_\beta g_{\alpha\tau} - \partial_\tau g_{\alpha\beta}) g^{\tau\gamma} \quad (\text{L.C}).$$

DEM. Calculemos $\partial_\alpha g_{\beta\tau} = \partial_\alpha (g_\beta \cdot g_\tau) = \partial_\alpha g_\beta \cdot g_\tau + g_\beta \cdot \partial_\alpha g_\tau = \sum_\sigma (\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma g_\sigma \cdot g_\tau + g_\beta \cdot \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma g_\sigma) = \sum_\sigma (\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma g_{\sigma\tau} + \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma g_{\beta\sigma})$ (*). Da mesma maneira obtemos $\partial_\beta g_{\alpha\tau} = \sum_\sigma (\Gamma_{\beta\alpha}^\sigma g_{\sigma\tau} + \Gamma_{\beta\tau}^\sigma g_{\alpha\sigma})$ e enfim $\partial_\tau g_{\alpha\beta} = \sum_\sigma (\Gamma_{\tau\alpha}^\sigma g_{\sigma\beta} + \Gamma_{\tau\beta}^\sigma g_{\alpha\sigma})$. É um simples cálculo obter $\partial_\alpha g_{\beta\tau} + \partial_\beta g_{\alpha\tau} - \partial_\tau g_{\alpha\beta} = 2 \sum_\sigma \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma g_{\sigma\tau}$. Notamos que $\sum_\tau g_{\gamma\tau} g_{\tau\gamma}^{-1} = \delta_{\sigma\gamma} = 1$ se $\sigma = \gamma$, $= 0$ senão, e $\sum_\sigma \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \delta_{\sigma\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}^1 \delta_{1\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}^2 = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$, logo a tese pois que por definição $g^{\tau\gamma} := (g^{-1})_{\tau\gamma}$. QED.

Teorema fundamental das superfícies -3-

♣ É fácil ver que (L.C.) implica a relação (\star) . Com efeito, somando o membro a esquerda, vem $\sum_{\sigma} \Gamma_{\tau\alpha}^{\sigma} g_{\sigma\beta} = \sum_{\sigma} \frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} g_{\sigma\beta} (\partial_{\tau} g_{\alpha\gamma} + \partial_{\alpha} g_{\tau\gamma} - \partial_{\gamma} g_{\tau\alpha}) = \sum_{\sigma} \frac{1}{2} \delta^{\gamma\beta} (\partial_{\tau} g_{\alpha\gamma} + \partial_{\alpha} g_{\tau\gamma} - \partial_{\gamma} g_{\tau\alpha}) = \frac{1}{2} (\partial_{\tau} g_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha} g_{\tau\beta} - \partial_{\beta} g_{\tau\alpha})$. Invertindo α e β temos também $\sum_{\sigma} \Gamma_{\tau\beta}^{\sigma} g_{\sigma\alpha} = \frac{1}{2} (\partial_{\tau} g_{\beta\alpha} + \partial_{\beta} g_{\tau\alpha} - \partial_{\alpha} g_{\tau\beta})$. Efetuando a soma, logo (\star) segue pela simetria de $g_{\alpha\beta}$.

Conexão simétrica e compatível com a métrica

Seja uma métrica $g_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n-1\}$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$, i.e., uma matriz simétrica e definida positiva em Ω . Uma conexão, i.e., uma família de símbolos de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^k$, $k \in \{1, \dots, n\}$ é dita compatível com a métrica se os símbolos $\Gamma_{\alpha\beta}^k$ são definidos a partir da métrica $g_{\alpha\beta}$ mediante a fórmula (L.C.). Assim, a conexão é automaticamente simétrica, i.e., $\Gamma_{\alpha\beta}^k = \Gamma_{\beta\alpha}^k$, $\forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, n-1\}$ e satisfaz a relação $\partial_{\alpha} g_{\beta\tau} = \sum_{\sigma} (\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} g_{\sigma\tau} + \Gamma_{\alpha\tau}^{\sigma} g_{\beta\sigma})$ (\star) .

Teorema fundamental das superfícies -4-

♣ Recapitulando, vimos que (\star) ou de maneira equivalente (L.C.) é uma hipótese sobre métrica e conexão para as mesmas serem mutuamente compatíveis.

D'outro lado, por definição dos símbolos de Christoffel, sempre que temos uma base movel $\{g_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq n-1}$ temos

$$\partial_\gamma(g_\alpha \cdot g_\beta) = \partial_\gamma g_\alpha \cdot g_\beta + g_\alpha \cdot \partial_\gamma g_\beta = \sum_\sigma (\Gamma_{\gamma\alpha}^\sigma g_\sigma \cdot g_\beta + g_\alpha \cdot g_\sigma \Gamma_{\gamma\beta}^\sigma) \quad (\star\star).$$

Lembrando a definição $\Gamma_{\gamma i}^m := (\Gamma_\gamma)_{mi}$ (i.e., a extensão de $\Gamma_{\gamma\alpha}^m$ acrescentando à mesma uma coluna e uma linha proveniente des B e $W = A^{-1}B$), logo temos também

$$\partial_\gamma(g_i \cdot g_j) = \sum_m (\Gamma_{\gamma i}^m (g_m \cdot g_j) + \Gamma_{\gamma j}^m (g_m \cdot g_i)) \quad (\star\star\star), \quad i, j, m \in \{1, 2, 3\}.$$

Para além, a generalização de (\star) é a relação

$$\partial_\gamma g_{ij} = \sum_m (\Gamma_{\gamma i}^m g_{mj} + \Gamma_{\gamma j}^m g_{mi}) \quad (\star\star\star\star), \quad i, j, m \in \{1, 2, 3\}.$$

Teorema fundamental das superfícies -5-

♣ Suponhamos que seja dado um campo matricial $g_{\alpha\beta}$, definido em $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$, simétrico e definido positivo, i.e. uma métrica, e suponhamos que o mesmo seja compatível com uma conexão, i.e., que verifica-se (\star) em Ω . Gostaríamos de mostrar que as matrizes $g_{\alpha\beta}$ e $g_\alpha \cdot g_\beta$ são iguais sempre que são ambas soluções do mesmo sistema de equações diferenciais. É o objeto do teorema seguinte:

Corolário de Levi-Civita

Seja os campos vetoriais $g_\alpha, \alpha \in \{1, \dots, n-1\}$ em Ω diferenciáveis e associados a uma família de símbolos de Christoffel definidos em Ω e simétricos. Seja $x_0 \in \Omega$ um ponto fixado em Ω e $g_\alpha^0, n-1$ vetores fixados. Se $g_{\alpha\beta}$ é solução de (\star) e $g_\alpha \cdot g_\beta$ é solução de $(\star\star)$ com $g_\alpha(x_0) = g_\alpha^0$, e $g_{\alpha\beta}(x_0) = g_\alpha^0 \cdot g_\beta^0, \alpha, \beta \in \{1, \dots, n-1\}$, então vale $g_{\alpha\beta} = g_\alpha \cdot g_\beta$. A mesma conclusão vale se g_{ij} é solução de $(\star\star\star)$ e $g_i \cdot g_j$ solução de $(\star\star\star)$.

Teorema fundamental das superfícies -5-

DEM. Chamemos G a matriz $g_{\alpha\beta}$ e A a matriz $g_\alpha \cdot g_\beta$. Consideremos um intervalo de tempo I , um parâmetro $t \in I$ e a família de todas as curvas regulares e suaves em Ω com extremidades x_0 e $x \in \Omega$. Definimos as funções matriciais $t \mapsto \mathcal{G} := G \circ \gamma$ e $t \mapsto \mathcal{A} = A \circ \gamma$. Definimos a matriz $(\Gamma_\tau)_{\alpha\beta} = \Gamma_{\tau\beta}^\alpha$. Por um lado, por (\star) temos identicamente $\frac{d}{dt}\mathcal{G} = \sum_\tau \partial_\tau(G \circ \gamma)\dot{\gamma}_\tau = \sum_\tau \dot{\gamma}_\tau (\Gamma_\tau \mathcal{G} + \mathcal{G}\Gamma_\tau)$. D'outro lado, por $(\star\star)$, vale por definição dos símbolos de Christoffel: $\frac{d}{dt}\mathcal{A} = \sum_\tau \dot{\gamma}_\tau (\Gamma_\tau \mathcal{A} + \mathcal{A}\Gamma_\tau)$. Observamos que \mathcal{G} e \mathcal{A} são soluções da mesma equação diferencial ordinária, com a mesma condição inicial $g_\alpha(\gamma(0)) \cdot g_\beta(\gamma(0))$, portanto os campos \mathcal{G} e \mathcal{A} coincidem ao longo de γ . Logo pela arbitrariedade de γ coincidem em Ω . QED.

Teorema fundamental das superfícies -6-

Lema de Poincaré

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto simplesmente conexo. Seja uma função vetorial $h \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ que verifique $\text{curl}h = 0$, i.e., $\partial_j h_i = \partial_i h_j, \forall i, j \in \{1, \dots, n-1\}$. Então existe uma função escalar $p \in \mathcal{C}^2(\Omega; \mathbb{R})$ tal que $h = \text{grad}p$. Qualquer outra função \tilde{p} que verifique $h = \text{grad}\tilde{p}$ satisfaz $\tilde{p} = p + Qx + v$, onde Q é uma matriz anti-simétrica e v é um vetor de \mathbb{R}^n .

♣ Já definimos $\Gamma_\gamma := \begin{pmatrix} (\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha)_{\alpha\beta} & -W_{\alpha\gamma} \\ b_{\gamma\alpha} & 0 \end{pmatrix}$ com $\gamma, \alpha, \beta \in \{u, v\}$

♣ Vimos que a condição de Gauss-Codazzi-Mainardi é uma condição necessária uma vez que temos uma superfície regular: $\Lambda\Omega + \partial_v\Omega = \Omega\Lambda + \partial_u\Lambda$ (G.C.M.). A mesma é equivalente à condição de Pfaff (\square) com $n = 2$, e com $\Gamma_1 = \Omega$ e $\Gamma_2 = \Lambda$. Vamos demonstrar que a mesma é também necessária.

Teorema fundamental das superfícies -7-

Teorema fundamental das superfícies em \mathbb{R}^3

Seja o aberto simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Dados 6 campos escalares E, F, G, L, M, N , de classe \mathcal{C}^1 em Ω , definindo a matriz simétrica e definida positiva $A = (a_{\alpha\beta})_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ e a matriz $B = (b_{\alpha\beta})_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$. Seja uma conexão $\Gamma_{\alpha\beta}^k$ simétrica e compatível com a métrica A , i.e. dada por (L.C.); logo satisfaz (\star) . Suponhamos que valem as equações de Gauss-Codazzi-Maindardi (G.C.M.). Então existe uma imersão $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe \mathcal{C}^3 t.q. a superfície $S := p(\Omega)$ tem A e B como 1.ª e 2.ª formas fundamentais.

DEM. (i) Step 1. Fixamos um $x_0 \in \Omega$ e consideremos a matriz $g_{\alpha\beta}(x_0)$. Podemos escrever $g_{\alpha\beta}(x_0) = g_\alpha^0 \cdot g_\beta^0$, $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$ (os vetores g_β^0 podem ser obtido tomando as linhas da matriz raiz

Teorema fundamental das superfícies -8-

DEM. (cont.) quadrada de $g_{\alpha\beta}(x_0)$). Definimos $g_\alpha(x_0) = g_\alpha^0$, $\alpha \in \{1, 2\}$. Sendo que temos a hipótese (G.C.M.), pelo teorema preliminar o sistema (de Pfaff) $\partial_\gamma \mathcal{F} = \Gamma_\gamma \mathcal{F}$, $\gamma \in \{1, 2\}$, com condição inicial $\mathcal{F}(x_0) = \left(g_1(x_0) | g_2(x_0) | \frac{g_1 \times g_2}{\|g_1 \times g_2\|}(x_0) \right)^T$ tem uma solução única de classe \mathcal{C}^2 . Seja \mathcal{F} a solução obtida.

(ii) Step 2. Definimos agora o vetor $g_i := \mathcal{F}_i$. (i.e., a linha i de \mathcal{F}). Tomamos a linha α da equação $\partial_\beta \mathcal{F} = \Gamma_\beta \mathcal{F}$, i.e. $\partial_\beta g_\alpha = \partial_\beta \partial_\alpha p = \sum_\sigma \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma \mathcal{F}_\sigma + b_{\beta\alpha} \mathcal{F}_3 = \sum_\sigma \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma g_\sigma + b_{\beta\alpha} g_3 = \sum_k \Gamma_{\alpha\beta}^k g_k$ (\blacktriangle). Pela simetria da conexão e de B temos $\partial_\beta g_\alpha = \partial_\alpha g_\beta$. Pelo Lema de Poincaré aplicado a cada componente de g_α existe um mapa $p \in \mathcal{C}^3(\Omega; \mathbb{R}^3)$ tal que $g_\alpha = \partial_\alpha p$.

(iii) Step 3. Pela relação (\blacktriangle) vale ($\star\star$), i.e., $\partial_\gamma (g_\alpha \cdot g_\beta) = \sum_\sigma (\Gamma_{\gamma\alpha}^\sigma (g_\sigma \cdot g_\beta) + \Gamma_{\gamma\beta}^\sigma (g_\sigma \cdot g_\alpha))$, $\alpha, \beta, \gamma, \sigma \in \{1, 2\}$, mas também, tomando todas as 3 linhas de $\partial_\beta \mathcal{F} = \Gamma_\beta \mathcal{F}$, vale ($\star\star\star$), i.e., $\partial_\gamma (g_i \cdot g_j) = \sum_m (\Gamma_{\gamma i}^m (g_m \cdot g_j) + \Gamma_{\gamma j}^m (g_m \cdot g_i))$, $i, j, m \in \{1, 2, 3\}$.

Teorema fundamental das superfícies -9-

DEM. (cont.)

(iv) Step 4. Demonstramos agora que $a_{\alpha\beta} = g_\alpha \cdot g_\beta = \partial_\alpha p \cdot \partial_\beta p$. Para isto, tornamos a matriz A uma matriz 3×3 definindo uma 3a linha e coluna $a_{i3} = a_{3i} = \delta_{i3} = (0|0|1)^T$. Logo pela existência de uma conexão compatível com a métrica, temos

$\partial_\gamma a_{\alpha\beta} = \sum_\sigma (\Gamma_{\gamma\alpha}^\sigma a_{\sigma\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\sigma a_{\sigma\alpha})$ (*), $\alpha, \beta, \gamma, \sigma \in \{1, 2\}$ e portanto

$\partial_\gamma a_{ij} = \sum_m (\Gamma_{\gamma i}^m a_{mj} + \Gamma_{\gamma j}^m a_{mi})$ (** **), $i, j, m \in \{1, 2, 3\}$. Com

efeito, verificamos que $0 = \partial_\gamma a_{i3} = \sum_m (\Gamma_{\gamma i}^m a_{m3} + \Gamma_{\gamma 3}^m a_{mi}) =$
 $= \sum_m (\Gamma_{\gamma i}^m \delta_{m3} + \Gamma_{\gamma 3}^m a_{mi}) = \Gamma_{\gamma i}^3 + \sum_m \Gamma_{\gamma 3}^m a_{mi} = b_{\gamma i} -$

$\sum_m a_{im} W_{m\gamma} = 0$ pela simetria de A e $W = A^{-1}B$. Tendo (** *) e (** **) aplicamos o corolário de Levi-Civita e concluimos que

$a_{ij} = g_i \cdot g_j$, i.e. $a_{\alpha\beta} = g_\alpha \cdot g_\beta = \partial_\alpha p \cdot \partial_\beta p$ e $a_{i3} = g_i \cdot g_3 = \delta_{i3}$

(:= 1 se $i = 3$, = 0 senão). Em particular deduzimos que g_α

($\alpha \in \{1, 2\}$) é ortogonal à $g_3 = \nu$. Portanto, $g_3 = \pm \frac{g_1 \times g_2}{\|g_1 \times g_2\|}$ com o sinal ainda indefinido.

Teorema fundamental das superfícies -10-

DEM. (cont.) (v) Step 5. Determinamos o sinal e demonstramos enfim que $b_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta} p \cdot \frac{\partial_1 p \times \partial_2 p}{\|\partial_1 p \times \partial_2 p\|}$ e que p é uma imersão. Com efeito pelo step 4, temos

$$\mathcal{F}^T \mathcal{F} = \begin{pmatrix} (g_{\alpha} \cdot g_{\beta})_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} (g_{\alpha\beta})_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{ij} \text{ é necessariamente,}$$

por hipótese, uma matriz definida positiva, pelo que $\det \mathcal{F}^T \mathcal{F} > 0$ e assim $\det \mathcal{F}(x) = \pm \sqrt{\det \mathcal{F}^T \mathcal{F}(x)} \neq 0, \forall x \in \Omega$. Isto demonstra já que p é uma imersão pois que $(g_{\alpha} \cdot g_{\beta})_{\alpha\beta}$ tem rank=2. D'outro

lado, $\det \mathcal{F}(x_0) = \det \left(g_1(x_0) | g_2(x_0) | \frac{g_1 \times g_2}{\|g_1 \times g_2\|}(x_0) \right) =$

$$(g_1^0 \times g_2^0) \cdot \frac{g_1^0 \times g_2^0}{\|g_1^0 \times g_2^0\|} = \|g_1^0 \times g_2^0\| > 0 \text{ e } \det \mathcal{F}(x) \neq 0, \forall x \in \Omega.$$

Sendo $\det \mathcal{F}$ uma função contínua, necessariamente, $\det \mathcal{F} > 0$ e

$g_3(x) = + \frac{g_1 \times g_2}{\|g_1 \times g_2\|}(x), \forall x \in \Omega$. Enfim, multiplicando escalarmente

(▲) do step 2 por $g_3(x)$ obtemos $b_{\alpha\beta}(x) = \partial_{\beta} \partial_{\alpha} p(x) \cdot g_3(x)$, e o resultado segue pois que $g_{\alpha} = \partial_{\alpha} p$. QED.

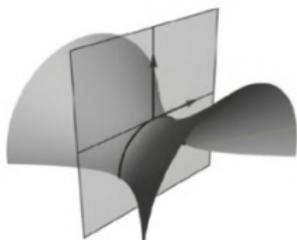
Curvatura normal e seccional

♣ Vimos que, por construção, em cada $p \in S$,

$$\kappa_n(p) = -(u'g_u + v'g_v) \cdot (u'\partial_u\nu + v'\partial_v\nu) = -\gamma' \cdot \nu', \text{ pois que}$$

$$g_u \cdot \partial_u\nu = \partial_u(g_u \cdot \nu) - \partial_u g_u \cdot \nu = -L, \text{ etc.}$$

♣ Sendo L, M, N (bem como E, F, G) dadas para a superfície S , a curvatura normal κ_n da curva γ em S depende apenas de γ' (i.e., de u', v' : é a fórmula de Meusnier) no ponto onde for calculada.



Lema.

A curvatura normal é igual a curvatura seccional em p , i.e., a curvatura da curva que passa por p e encontra-se contida no plano $\Pi := \langle \gamma'_p, \nu_p \rangle$. (Vê plano de corte na figura)

Curvatura normal e seccional

DEM. Seja $\eta(\tilde{s}) \subset \Pi$ a curva seccional passando por $p = \gamma(s_0) = \eta(\tilde{s}_0)$, com \tilde{s} abscissa curvilínea. A parametrização de γ é escolhida tal que $s_0 = \tilde{s}_0$. Portanto η é uma curva com velocidade unitária, logo $\eta'(s_0) \cdot \eta''(s_0) = 0$, e, sendo plana, $\eta''(s_0) \parallel \nu(s_0)$. Logo $\kappa_n(s_0) = -\gamma'(s_0) \cdot \nu'(s_0) = -\eta'(s_0) \cdot \nu'(s_0) = \eta''(s_0) \cdot \nu(s_0)$. Mas, $\eta(\tilde{s})$ é uma curva plana e portanto $\eta''(s_0) = \kappa(s_0)\nu(s_0)$, onde κ é a curvatura de η em $\tilde{s}_0 = s_0$, logo a tese. QED.

Direcções e curvas assintóticas

Uma curva regular numa superfície é assintótica em P se tem curvatura normal, i.e. aceleração normal, evanescente em P .

♣ A curvatura normal em $P = p(u(s_0), v(s_0))$ depende apenas do vetor velocidade em P . Consideremos então uma rotação do mesmo em torno de ν . No plano de parametrização, seja então θ o ângulo entre $w'_0 := (u'(s_0), v'(s_0))$ e o eixo- u no plano uv . Seja $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tal que $\alpha \tan \theta = \beta$.

Curvaturas principais

♣ Seja por convenção $p = \gamma(0) \in S$. Consideremos o vetor no plano $w'(0) = (\alpha, \beta) \subset A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. O mesmo faz um ângulo θ com o eixo u , i.e., $\beta = \alpha \tan \theta$.

Lema. Forma explícita da curvatura normal

Temos
$$\kappa_n(\alpha, \beta) = \frac{L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2}{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2} = \frac{L \cos^2 \theta + 2M \cos \theta \sin \theta + N \sin^2 \theta}{E \cos^2 \theta + 2F \cos \theta \sin \theta + G \sin^2 \theta}.$$

DEM. Temos $w'(0) = \rho(\cos \theta, \sin \theta)$, $\rho > 0$. Sendo s abscissa curvilínea $\mathbb{I}_1[w'_0] = 1 = \rho^2(E \cos^2 \theta + 2F \sin \theta \cos \theta + G \sin^2 \theta)$. Mas $\kappa_n = \mathbb{I}_2[w'_0] = \rho^2(L \cos^2 \theta + 2M \sin \theta \cos \theta + N \sin^2 \theta)$. O resultado segue explicitando ρ^2 e multiplicando por $\frac{\alpha^2}{\cos^2 \theta}$. QED.

Curvaturas principais: definição

Sendo $\theta \mapsto \kappa_n(\theta)$ contínua no intervalo fechado $[-\pi/2, \pi/2]$ atinge o seu máximo e o seu mínimo. As curvaturas principais são definidas como o mínimo e o máximo de $(\alpha, \beta) \mapsto \kappa_n(\alpha, \beta)$, nomeadamente, $\kappa_M := \kappa_n(\alpha_M, \beta_M)$ e $\kappa_m := \kappa_n(\alpha_m, \beta_m)$.

Curvatura média e de Gauss

Definimos agora a curvatura média H e a curvatura de Gauss K em $p \in S$:

$$\begin{cases} 2H := \kappa_m + \kappa_M \\ K := \kappa_m \kappa_M \end{cases} \quad (**)$$

♣ Portanto κ_m e κ_M são solução de $k^2 - 2Hk + K = 0$, i.e.,
 $k = H \pm \sqrt{H^2 - K}$.

Teorema. Expressão extrínseca das curvaturas principais

As expressões extrínsecas das curvaturas média e de Gauss

$$\begin{cases} 2H = \kappa_m + \kappa_M = \frac{EN+GL-2FM}{EG-F^2} = \operatorname{tr} W \\ K = \kappa_m \kappa_M = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{\det \mathbb{I}_2}{\det \mathbb{I}_1} = \det W \end{cases}$$

As curvaturas principais são os valores próprios de W . As mesmas bem como K e H são invariantes por mudança de coordenadas.

♣ O corolário do teorema de Weingarten pode-se ser reformulado: $\{\partial_u \nu, \partial_v \nu\}$ são linearmente independentes sse $K = \det W = 0$.

DEM. Calculemos os pontos críticos de $(\alpha, \beta) \mapsto \kappa_n(\alpha, \beta)$. Para isto, escrevemos $\kappa_n = \frac{A := L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2}{B := E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2}$, logo nos pontos críticos

temos $\frac{\partial}{\partial \alpha} \kappa_n = 0 = \frac{\partial}{\partial \beta} \kappa_n$ e portanto $A_\alpha/B - A/B^2 B_\alpha = 0$

$= A_\beta/B - A/B^2 B_\beta$, i.e., $A_\alpha - \kappa_n B_\alpha = 0 = A_\beta - \kappa_n B_\beta$

(multiplicando por $B \neq 0$). Portanto, $\frac{\partial}{\partial \alpha} (A - \kappa_n B) = 0$

$= \frac{\partial}{\partial \beta} (A - \kappa_n B)$. Então temos que resolver

$$\begin{cases} \alpha(L - \kappa E) + \beta(M - \kappa F) = 0 \\ \alpha(M - \kappa F) + \beta(N - \kappa G) = 0 \end{cases} \cdot \text{A única solução não trivial}$$

satisfaz $\det \begin{pmatrix} L - \kappa E & M - \kappa F \\ M - \kappa F & N - \kappa G \end{pmatrix} = 0$, i.e., resolvendo (fazer em

casa), obtemos (**). A expressão em termos de $W := A^{-1}B$

segue de $W = \frac{1}{\det A} (\text{cof } A)B = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$.

Pela igualdade dos valores próprios de W e \tilde{W} , temos invariância das curvaturas principais e portanto de K e H perante uma mudança arbitrária de coordenadas. QED.

♣ No caso ortonormado temos $F = M = 0$ e portanto

$W = \begin{pmatrix} L/E & \\ & N/G \end{pmatrix}$. Verifica-se mediante a fórmula

$$k = H \pm \sqrt{H^2 - K} \text{ que } k_m = \frac{L}{E} \leq k_M = \frac{N}{G}.$$

Lema. Invariância sob isometrias

A curvatura de Gauss K e a curvatura média H são invariante sob isometria de \mathbb{R}^3 (i.e., roto-translações).

DEM. Sob uma isometria, $\tilde{p} = Qp + c$ com Q uma matriz ortogonal ($\det Q = \pm 1$) e c um vetor constante. Logo (g_u, g_v) e $(\partial_u \nu, \partial_v \nu)$ transformam-se nos vetores $(Qg_u, Qg_v) = (\tilde{g}_u, \tilde{g}_v) := (\partial_u \tilde{p}, \partial_v \tilde{p})$ e $(\partial_u \tilde{\nu}, \partial_v \tilde{\nu})$, sendo que $\tilde{\nu} := Q\nu$ verifica $\tilde{\nu} \cdot \tilde{g}_\alpha = 0$ e $\|\tilde{\nu}\| = 1$. Logo $\tilde{E} := \tilde{g}_u \cdot \tilde{g}_v = Qg_u \cdot Qg_v = Q^T Q E = E$, $\tilde{L} = -\tilde{g}_u \cdot \partial_u \tilde{\nu} = -Qg_u \cdot Q\partial_u \nu = Q^T Q L = L$, etc. A tese segue de $(\star\star)$. QED.

♣ Sendo W simétrica em $p \in S$, existe uma transformação ortogonal do plano Q tal que $Q^T W Q = \Lambda = \begin{pmatrix} \kappa_m & 0 \\ 0 & \kappa_M \end{pmatrix}$. Seja

$(\tilde{u}|\tilde{v})^T = Q(u|v)$. A fórmula de Weingarten re-escreve-se como $(\partial_{\tilde{u}}\nu|\partial_{\tilde{v}}\nu)_p = -(\kappa_m g_{\tilde{u}}|\kappa_M g_{\tilde{v}})_p$. Isto define as direções principais: $e_1(p) := g_{\tilde{u}}(p)$ e $e_2(p) := g_{\tilde{v}}(p)$.

♣ Uma curva $\gamma \in S$ tal que $\forall p \in \gamma$, γ'_p é paralelo á $e_1(p)$ ou $e_2(p)$ é chamada linea de curvatura

♣ Se $K \neq 0$, então $e_1 \neq e_2$ e $e_1 \cdot e_2 = 0$, pelo que o referencial é ortonormado; logo neste referencial, chamado referencial das curvaturas principais, $F = M = 0$, e portanto $\kappa_m = \frac{L}{E}$ e $\kappa_M = \frac{N}{G}$.

♣ Seja $p \in S$. Calcule $K(p) = \det W(p)$. O ponto p é dito:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Elítico} & \text{se } K(p) > 0, \\ \text{Hiperbólico} & \text{se } K(p) < 0 \\ \text{Parabólico} & \text{se } K(p) = 0 \text{ e } \mathbb{I}_2 \neq 0 \\ \text{Plano} & \text{se } \mathbb{I}_2 = 0 \\ \text{Umbilical} & \text{se } K(p) > 0 \text{ e } \kappa_m = \kappa_M \end{array} \right. .$$

Lema.

Uma superfície regular e compacta admite pelo menos um ponto elítico.

DEM. Sendo S compacta é um conjunto limitado, logo contido numa bola de raio r . Tomemos o infimo de tais raios, $\inf r =: R$ logo a bola de raio R é tangente à S em p . Por construção os raios de curvatura de S em p são menores que R , logo as curvaturas principais são maiores do que $1/R > 0$. QED.

Lema. Caso das curvaturas iguais (e constantes)

Num ponto umbilical temos (i) $K = H^2$; (ii)

$\exists \alpha \in \mathbb{R}_* : W = \alpha \mathbb{I}$. (iii) Para além, se em todos os pontos de S vale $\kappa_M = \kappa_m$, então S é uma porção de esfera ou de plano.

DEM. (ii) já foi demonstrado e (i) segue de $\kappa_m = \kappa_M = \kappa = H + \sqrt{H^2 - K} = H - \sqrt{H^2 - K}$. (iii) Pelo teorema de Weingarten com $W = \kappa \mathbb{I}$ temos $\kappa \partial_{\tilde{u}} p + \partial_{\tilde{u}} \nu = 0$ (W1) e $\kappa \partial_{\tilde{v}} p + \partial_{\tilde{v}} \nu = 0$ (W2). Derivando com \tilde{v} e \tilde{u} e sendo que $\partial_{\tilde{u}\tilde{v}} \nu = \partial_{\tilde{v}\tilde{u}} \nu = 0 = \partial_{\tilde{u}\tilde{v}} p = \partial_{\tilde{v}\tilde{u}} p$, vem $\partial_{\tilde{u}} \kappa g_{\tilde{u}} = \partial_{\tilde{v}} \kappa g_{\tilde{v}}$, pelo que $\kappa = \text{cst}$, sendo $g_{\tilde{u}} \perp g_{\tilde{v}}$. Se $\kappa = 0$ então $\nu = \text{cst}$ e $p(u, v) \perp \nu$, logo S é contida num plano. Suponhamos $\kappa \neq 0$. Logo $\kappa \tilde{E} = \tilde{L} = -g_{\tilde{u}} \cdot \partial_{\tilde{u}} \nu = -\kappa \|g_{\tilde{u}}\|^2 \neq 0$. Analogamente, $\tilde{N} = \kappa \tilde{G} \neq 0$. Então $\tilde{E} \neq 0$ e $\tilde{G} \neq 0$. Multiplicando (W1) por $g_{\tilde{u}}$ e (W2) por $g_{\tilde{u}}$, logo $g_{\tilde{u}} \cdot \partial_{\tilde{u}} (\kappa p + \nu) = g_{\tilde{v}} \partial_{\tilde{v}} \cdot (\kappa p + \nu) = 0$. Logo $\exists \alpha, \beta : \partial_{\tilde{u}} (\kappa p + \nu) = \alpha g_{\tilde{v}}$ e $\partial_{\tilde{v}} (\kappa p + \nu) = \beta g_{\tilde{u}}$. Multiplicando por $g_{\tilde{v}}$ e $g_{\tilde{u}}$, e sendo κ constante, obtemos $\alpha \tilde{G} = \kappa \tilde{F} - \tilde{M} = \beta \tilde{E}$. Mas, $\tilde{F} = \tilde{M} = 0$ e $\tilde{E} \neq 0$ e $\tilde{G} \neq 0$. Portanto $\alpha = \beta = 0$, pelo que $p + (1/\kappa)\nu = \text{cst} = c$, i.e., $\|p - c\| = |\kappa| = \text{cst}$, i.e., p é esférico. QED.

Lema. Caso das curvaturas constantes (não iguais)

Uma superfície onde K e H são constantes com $K \neq H^2$ é uma porção de um cilindro.

DEM. Pelo facto de $K \neq H^2$ sabemos que $\kappa_m \neq \kappa_M$ são constantes. Supomos $\kappa_M \neq 0$. Por Weingarten $\partial_u \nu = -\kappa_M g_u$ e $\partial_v \nu = -\kappa_m g_v$, logo diferenciando, $\partial_v \partial_u \nu = \partial_u \partial_v \nu = -\kappa_M \partial_v g_u = -\kappa_m \partial_u g_v = -\kappa_M \partial_v \partial_u p = -\kappa_m \partial_u \partial_v p$. Sendo $\kappa_m \neq \kappa_M$ obtemos $\partial_u \partial_v p = 0$ e então $p(u, v) = a(u) + b(v)$. Sendo regular, vale $a'(u) \neq 0$ e $b'(v) \neq 0$, podemos supor que $a'(u) \cdot a'(u) = 1$ e $b'(v) \cdot b'(v) = 1$. Portanto $a''(u) \perp a'(u)$. Sendo que $0 = F = g_u \cdot g_v = a'(u) \cdot b'(v), \forall u, v (\Delta)$, deduzimos que $a''(u) \perp b'(v)$; logo $a''(u)$ é paralelo à $\nu(u, v) = a'(u) \times b'(v)$. Sendo a aceleração da curva $u \mapsto a(u)$ paralela à ν , é uma aceleração normal, logo por Frenet-Serret, $\|a''(u)\| = \kappa_M$ ou $= \kappa_m$.

Mas também, $\|b''(u)\| = \kappa_m$ ou $= \kappa_M$. Suponhamos $\|a''(0)\| = \kappa_M > 0$: isto significa que para u perto de 0, $a'(0)$ é linearmente independente de $a'(u)$. Para tais u , por (Δ) , $b'(v) \perp a'(0)$ e $b'(v) \perp a'(u), \forall v$, i.e. $\exists \alpha(v) \in \mathbb{R} : b'(v) = \alpha(v)a'(0) \times a'(u), \forall v$; mas, $b''(v) = \alpha'(v) a'(0) \times a'(u)$ é ortogonal à $b'(v) = \alpha(v)a'(0) \times a'(u)$, logo temos $\alpha'(v) = 0$, i.e., $b''(v) = 0$, i.e., $b'(v) = \text{cst} = c$ e $b(v) = cv$. Então, $p(u, v) = a(u) + cv$, i.e. um cilindro em torno de $a'(u) \perp c$. QED.

Rumo a expressão explícita da conexão

♣ Lembramo-nos da definição:

$$E := g_u \cdot g_u, G = g_v \cdot g_v, F = g_u \cdot g_v$$

♣ D'outro lado,

$$\partial_u g_u = \Gamma_{11}^1 g_u + \Gamma_{11}^2 g_v + \Gamma_{11}^3 \nu, \quad \partial_u g_v = \Gamma_{12}^1 g_u + \Gamma_{12}^2 g_v + \Gamma_{12}^3 \nu,$$

$$\partial_v g_u = \partial_u g_v \text{ e } \partial_v g_v = \Gamma_{22}^1 g_u + \Gamma_{22}^2 g_v + \Gamma_{22}^3 \nu$$

♣ Logo, $\frac{1}{2} \partial_u E = g_u \cdot \partial_u g_u = E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2$

Expressão explícita dos símbolos de Christoffel

$$\clubsuit \text{ Alem disto, } F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = \partial_u g_u \cdot g_v =$$

$$\begin{aligned} & \partial_u(g_u \cdot g_v) - \partial_u g_v \cdot g_u = \partial_u(g_u \cdot g_v) - \partial_v g_u \cdot g_u \\ & = \partial_u(g_u \cdot g_v) - \frac{1}{2}\partial_v(g_u \cdot g_u) = \partial_u F - \frac{1}{2}\partial_v E. (\Delta) \end{aligned}$$

$$\clubsuit \text{ Similarmente, } \frac{1}{2}\partial_u E = E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2, \quad \frac{1}{2}\partial_v G = F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2,$$

$$\frac{1}{2}\partial_v E = E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2, \quad \frac{1}{2}\partial_u G = F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2, \text{ e enfim}$$

$$E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 = \partial_v F - \frac{1}{2}\partial_u G. \text{ Re-escreve-se matricialmente como:}$$

$$\clubsuit \Gamma := \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}. \text{ Logo } \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_u E & \partial_v E & 2\partial_v F - \partial_u G \\ 2\partial_u F - \partial_v E & \partial_u G & \partial_v G \end{pmatrix}, \text{ pelo que}$$

$$\Gamma = \frac{1}{2(EG - F^2)}$$

$$\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_u E & \partial_v E & 2\partial_v F - \partial_u G \\ 2\partial_u F - \partial_v E & \partial_u G & \partial_v G \end{pmatrix} (***)$$

Teorema egregium de Gauss

♣ Podemos enunciar e provar o teorema "egregium" de Gauss:

Teorema de Gauss - expressão intrínseca da curvatura

A curvatura de Gauss $K := \frac{\det \mathbb{I}_2}{\det \mathbb{I}_1}$ em $p \in S$ depende apenas de E, F e G e suas derivadas tangenciais. Não depende de ν , é uma quantidade intrínseca à superfície. Em outras palavras, duas superfícies isométricas têm a mesma curvatura de Gauss.

♣ Remark: Ao contrário, a curvatura média não é uma quantidade intrínseca, pois depende da imersão em \mathbb{R}^3 , i.e., depende do campo das normais ν . Por exemplo o cilindro e o plano são intrinsecamente iguais mas têm curvaturas médias diferentes.

DEM. Obtivemos as componentes $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\}$, em termos de E, F e G e suas derivadas tangenciais. Faltam $L := \Gamma_{11}^3$, $M := \Gamma_{12}^3$ e $N := \Gamma_{22}^3$.

Demonstração do teorema de Gauss

DEM. É suficiente mostrar que $\det \mathbb{I}_2 = LN - M^2$ pode ser expresso apenas em termos de E, F e G e suas derivadas tangenciais. Calculemos $\partial_{uv}g_u \cdot g_v = \partial_v(\partial_u g_u \cdot g_v) - \partial_u g_u \cdot \partial_v g_v = \partial_v(\partial_u F - \frac{1}{2}\partial_v E) - \partial_u g_u \cdot (\Gamma_{vv}^u g_u + \Gamma_{vv}^v g_v + \Gamma_{vv}^3 \nu) = \partial_v(\partial_u F - \frac{1}{2}\partial_v E) - \frac{\Gamma_{vv}^u}{2}\partial_u E - \Gamma_{vv}^v(\partial_u F - \frac{1}{2}\partial_v E) - LN = \partial_v(\partial_u F - \frac{1}{2}\partial_v E) - \frac{\partial_u E}{4(EG-M^2)}(G(2\partial_v F - \partial_u G) - F\partial_v G) - \frac{\partial_v G}{2(EG-M^2)}E(\partial_u F - \frac{1}{2}\partial_v E) - LN$ (•).

D'outro lado $\partial_{uv}g_u \cdot g_v = \partial_{vu}g_u \cdot g_v = \partial_u(\partial_v g_u \cdot g_v) - \partial_u g_u \cdot \partial_v g_v = \frac{1}{2}\partial_u^2 G - \frac{E(\partial_u G)^2}{4(EG-F^2)} - \frac{2F\partial_v E\partial_u G + G(\partial_v E)^2}{4(EG-F^2)} - M^2$ (••).

Portanto efetuando (••) - (•), logo vem

$$\det \mathbb{I}_2 = LN - M^2 = -\frac{\partial_u^2 G}{2} + \frac{E(\partial_u G)^2}{4(EG-F^2)} + \mathcal{F}(\partial_\alpha E, \partial_\alpha F, \partial_\alpha G),$$

($\alpha \in \{u, v\}$). Portanto vê-se que $\det \mathbb{I}_2$ e então K depende apenas de E, F e G e suas derivadas tangenciais, a tese. QED.

Demonstração alternativa do teorema egregium

♣ Lembramo-nos das equações de Gauss, e re-escrevemos $\mathbf{A} = 0$ como

$$\partial_v \Gamma_{uu}^u - \partial_u \Gamma_{vu}^u + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^u - \Gamma_{vu}^v \Gamma_{uv}^u = LW_{uv} - MW_{uu}$$

com o lado esquerda dependente apenas de E, F, G e suas derivadas, por $(\star \star \star)$.

♣ D'outro lado temos

$$W = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix},$$

e portanto

$$\begin{aligned} \partial_v \Gamma_{uu}^u - \partial_u \Gamma_{vu}^u + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^u - \Gamma_{vu}^v \Gamma_{uv}^u &= \frac{(L(GM - FN) - M(GL - FM))}{EG - F^2} \\ &= -F \frac{\det B}{\det A} = -FK, \end{aligned}$$

logo K depende apenas de E, F, G e suas derivadas. QED.

♣ Remark: calculando K mediante esta fórmula no caso ortonormado, i.e., $F = 0$ obtemos (verificar em casa mediante manipulação de ((●●)-(●)) na demonstração do teorema de Gauss):

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\partial_v \left(\frac{\partial_v E}{\sqrt{EG}} \right) + \partial_u \left(\frac{\partial_u G}{\sqrt{EG}} \right) \right).$$
 Logo temos

$$-2EGK = \partial_{vv}E + \partial_{uu}G + \mathcal{F}(u, v)\partial_v E + \mathcal{G}(u, v)\partial_u G \quad (\Delta),$$
 onde \mathcal{F} e \mathcal{G} dependem de u, v através de $E, \partial_\alpha E, G, \partial_\alpha G$ ($\alpha \in \{u, v\}$).

♣ Lembramos:

$$\Gamma = \frac{1}{2(EG - F^2)}$$

$$\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_u E & \partial_v E & 2\partial_v F - \partial_u G \\ 2\partial_u F - \partial_v E & \partial_u G & \partial_v G \end{pmatrix} \quad (***)$$

♣ Já agora, mediante (***), re-escrevemos as equações de Mainardi-Codazzi com os coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais : $\partial_v L = L\Gamma_{uv}^u - N\Gamma_{uu}^v = \frac{\partial_v E}{2} \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right)$ e $\partial_u N = -L\Gamma_{vv}^u + N\Gamma_{uv}^v = \frac{\partial_u G}{2} \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right).$

♣ O lema seguinte servirá na demonstração da rigidez da esfera:

Lema

Nos pontos críticos de k_m e k_M temos ou $k_m = k_M$ ou $(k_M - k_m)EGK = -E\partial_{vv}k_m + G\partial_{uu}k_M$.

DEM. No referencial das curvaturas principais, $k_m = L/E$ e $k_M = G/N$, logo segue de Mainardi-Codazzi que $\partial_v L = \frac{\partial_v E}{2}(\kappa_m + \kappa_M)$ e $\partial_u N = \frac{\partial_u G}{2}(\kappa_m + \kappa_M)$. Introduzindo as mesmas nas expressões $\partial_v(Ek_m) = \partial_v L$ e $\partial_u(Nk_M) = \partial_u G$, obtemos $E\partial_v k_m = \frac{\partial_v E}{2}(k_M - k_m)$, i.e. $\partial_v E = \frac{2E}{k_M - k_m}\partial_v k_m$ e $G\partial_u k_M = \frac{\partial_u G}{2}(k_m - k_M)$, i.e., $\partial_u G = -\frac{2G}{k_M - k_m}\partial_u k_M$. Derivando mais uma vez, $\partial_{vv}E = \frac{2E}{k_M - k_m}\partial_{vv}k_m + \partial_v k_m \tilde{\mathcal{F}}(u, v)$ e $\partial_{uu}G = -\frac{2G}{k_M - k_m}\partial_{uu}k_M + \partial_u k_M \tilde{\mathcal{G}}(u, v)$, onde $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ dependem de u, v através de $E, \partial_\alpha E, G, \partial_\alpha G$ ($\alpha \in \{u, v\}$). Mas $\partial_v k_m = 0 = \partial_u k_M$, e $k_M = k_m$ ou $\partial_v E = 0 = \partial_u G$, donde o resultado segue de (Δ) : $-2EGK = \partial_{vv}E + \partial_{uu}G + \mathcal{F}(u, v)\partial_v E + \mathcal{G}(u, v)\partial_u G$. QED.

Teorema.

Seja S uma superfície regular conexa, compacta e sem bordo. Se S tem K constante, então S é uma esfera.

DEM. Sendo regular e compacta já sabemos que S admite um ponto elítico, logo sendo K constante, temos $K = k_m k_M > 0$, i.e., k_m é uma função decrescente de k_M . Sendo compacta, k_m um mapa contínuo e $\partial S = \emptyset$, k_m admite um mínimo e k_M um máximo em $P \in S$. Logo $\partial_{vv} k_m(P) \geq 0$ e $\partial_{uu} k_M(P) \leq 0$; logo pelo lema anterior, $(k_M - k_m)EGK \leq 0$. Mas $EGK > 0$ logo $k_M(P) = k_m(P)$. Para um ponto qualquer $Q \in S$, temos $k_M(P) \geq k_M(Q) \geq k_m(Q) \geq k_m(P) = k_M(P)$, donde $k_M(Q) = k_m(Q), \forall Q \in S$, e todos os pontos são umbilicais. Pelo lema anterior, S é ou uma esfera ou um plano, mas como $K > 0$, logo é contido numa esfera. Agora, S é topologicamente fechado por ser compacto e por ser regular existe um homeomorfismo local $\forall P \in S$ num aberto de \mathbb{R}^2 logo S é topologicamente aberto. Sendo aberto, fechado, conexo e contido numa esfera, logo é uma esfera. QED.

Corolário

Seja S uma superfície regular conexa, compacta e sem bordo. Se S tem $K > 0$ e H constante, então S é uma esfera.

DEM. A demonstração é idêntica à anterior, pois que H constante implica que k_m é uma função decrescente de k_M . QED.

Teorema. Um teorema global: a rigidez da esfera

Seja Σ uma superfície regular conexa e compacta. Se Σ é homeomorfo e isométrico a uma esfera, então Σ é uma esfera.

DEM. Seja o homeomorfismo $\varphi : S \rightarrow \Sigma$ uma isometria da esfera S em $\Sigma = \varphi(S)$, logo Σ tem a mesma curvatura que S , $K = \text{cst}$. Sendo φ contínuo e S conexo, compacto e sem bordo, Σ é conexa, compacta e sem bordo. A tese segue do teorema anterior. QED.

♣ O termo "rigidez" vem da mecânica, pois uma esfera feita num material flexível mas não elástico não pode ser deformada, pois que sem elasticidade não há nem extensão nem contracção das

Equações cinémáticas das curvas geodésicas

♣ Já vimos as equações das geodésicas $\begin{cases} \ddot{u} + \sum_{\alpha,\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^u \dot{w}_\alpha \dot{w}_\beta = 0 \\ \ddot{v} + \sum_{\alpha,\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^v \dot{w}_\alpha \dot{w}_\beta = 0 \end{cases}$

com $\dot{w} = (\dot{u}, \dot{v})$ que gostaríamos de explicitar mediante a relação

que obtivemos: $\Gamma = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u & \Gamma_{uv}^u & \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} =$
 $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_u E & \partial_v E & 2\partial_v F - \partial_u G \\ 2\partial_u F - \partial_v E & \partial_u G & \partial_v G \end{pmatrix} (\star \star \star).$

Calculando, obtemos então

$$\begin{cases} E\ddot{u} + F\ddot{v} = -\frac{1}{2} (\partial_u E \dot{u}^2 + \partial_v E \dot{u}\dot{v} + 2\partial_v F \dot{v}^2 - \partial_u G \dot{v}^2) \\ F\ddot{u} + G\ddot{v} = -\frac{1}{2} (2\partial_u F \dot{u}^2 - \partial_v E \dot{u}^2 + \partial_u G \dot{u}\dot{v} + \partial_v G \dot{v}^2) \end{cases} \text{ Agora}$$

$$\begin{cases} E\ddot{u} + F\ddot{v} = \frac{d}{dt} (E\dot{u} + F\dot{v}) - \partial_u E \dot{u}^2 - \partial_v E \dot{u}\dot{v} - \partial_u F \dot{u}\dot{v} - \partial_v F \dot{v}^2 \\ F\ddot{u} + G\ddot{v} = \frac{d}{dt} (F\dot{u} + G\dot{v}) - \partial_u F \dot{u}^2 - \partial_v F \dot{u}\dot{v} - \partial_u G \dot{u}\dot{v} - \partial_v G \dot{v}^2 \end{cases}$$

♣ Portanto as equações das geodésicas são

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (E\dot{u} + F\dot{v}) = \frac{1}{2} (\partial_u E \dot{u}^2 + 2\partial_u F \dot{u}\dot{v} + \partial_u G \dot{v}^2) \\ \frac{d}{dt} (F\dot{u} + G\dot{v}) = \frac{1}{2} (\partial_v E \dot{u}^2 + 2\partial_v F \dot{u}\dot{v} + \partial_v G \dot{v}^2) \end{cases} (\star \star)$$

Lema.

Uma superfície regular é localmente um gráfico.

DEM. Seja $\varphi : A \rightarrow S$, $(u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (p_1(u, v), p_2(u, v))$. Por convenção, $P = (\varphi(u_0, v_0), \varphi(u_0, v_0), 0) = (0, 0, 0)$ é a origem do plano tangente $T_p S \equiv \{(x, y)\}$. Sendo p regular, φ é invertível em P , donde $z = p_3(u, v) = p_3 \circ \varphi^{-1}(x, y) = f(x, y)$. QED.

Corolário. Existência e unicidade de geodésicas

Para cada $p \in S$ e um vetor arbitrário $\dot{\gamma} \in T_p S$, existe localmente uma única geodésica em p com velocidade $\dot{\gamma}$.

DEM. Vimos uma aplicação do plano tangente em $P = (0, 0, 0)$ em S , i.e. $p : (x, y) \in T_p S \mapsto (x, y, f(x, y)) \in S$. Por ser tangente, $f(0, 0) = \partial_x f(0, 0) = \partial_y f(0, 0) = 0$. Definimos $e_1 := \partial_x p(0, 0) = (1, 0, 0)$, $e_2 := \partial_y p(0, 0) = (0, 1, 0)$. Portanto, $\forall \dot{\gamma} \in T_p S$, $\exists \xi, \eta \in \mathbb{R}_*$ t.q. $\dot{\gamma} = \xi e_1 + \eta e_2$. Basta resolver o sistema (★★) com $E = G = 1$ e $F = 0$ e condições iniciais $(\dot{x}, \dot{y})(0) = (\xi, \eta)$ e $(x, y)(0) = 0$. Logo $(t\xi, t\eta, f(t\xi, t\eta))$ é a única geodésica procurada. QED.

Geodésicas como curvas ótimas -1-

♣ Vamos mostrar que (\star) representa as equações de Euler-Lagrange do problema variacional $\text{MIN} \int_a^b ds(t)$: minimizar o comprimento de uma curva entre dois pontos fixados.

Equações de Euler-Lagrange

Seja $\mathcal{A}(x(t)) := \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$ com $x \in \mathbb{R}^3$ e $y(t) = \dot{x}(t)$.

O mínimo do funcional \mathcal{A} com respeito a todas as curvas admissíveis com dados limites as duas extremidades fixadas $P = x(a)$ e $Q = x(b)$ é obtido resolvendo as equações de Euler-Lagrange associadas ao problema de minimização:

$$0 = \nabla_x L(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \nabla_y L(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad (\square).$$

Lagrangiano

Definimos o lagrangiano como elemento de comprimento $L dt = ds(t) = \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} dt$. Queremos mostrar que é equivalente procurar os mínimos do funcional $\int_a^b L^2(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$.

Geodésicas como curvas otimizadas -2-

♣ Com efeito, calculamos $\text{MIN} \int_a^b L^2 dt$. As equações correspondentes de Euler-Lagrange são

$$0 = \nabla_x L^2(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \nabla_y L^2(t, x(t), \dot{x}(t)), \text{ i.e.,}$$

$2L \nabla_x L - \frac{d}{dt} (2L \nabla_y L) = 2L (\nabla_x L - \frac{d}{dt} \nabla_y L) - \frac{dL}{dt} \nabla_y L$. Portanto coincidem com as equações correspondente à minimização de $L dt = ds$ se $\frac{dL}{dt} = 0$.

♣ Mas, é uma propriedade das soluções de E.-L. chamada igualdade de energia, de que $(\square) \Rightarrow L^2 - \sum_{\gamma} \dot{x}^{\gamma} \partial_{y^{\gamma}} L^2 = -L^2 = \text{cst} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0$.

♣ Logo, é esta última propriedade que nos permite dizer que $\text{MIN} \int_a^b L^2 dt = \text{MIN} \int_a^b L dt$, uma vez que partilhem a mesma forma local (\square) .

♣ Portanto calcular $\text{MIN} \int_a^b ds(t)$ é equivalente a resolver (\square) que a sua vez é equivalente a resolver $0 = \partial_{x^{\gamma}} L^2 - \frac{d}{dt} \partial_{y^{\gamma}} L^2$ com $L^2 = (s'(t))^2 = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta}(t)$.

Geodésicas como curvas otimizadas -3-

♣ Basta explicitar esta última, e obtemos a equação

$\sum_{\gamma, \alpha, \beta} \frac{1}{2} g^{\kappa\gamma} (\partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\gamma\beta} - \partial_\beta g_{\alpha\gamma}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \ddot{x}^\kappa$, i.e., pela relação de Levi-Civita (**L.C.**) $0 = \ddot{x}^\kappa + \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\kappa \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$, i.e. obtemos as equações das geodésicas (\star). Desta vez, as condições limites são de contorno, i.e., $x(a) = P$ e $x(b) = Q$.

♣ Além disto, já que $\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \dot{s}(t) = 0$ temos $\gamma' \perp \gamma''$

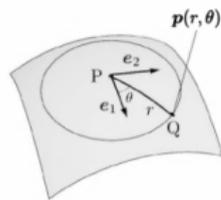
♣ Temos então uma solução única $s \mapsto x(s)$ tal que $x(a) = P$ e $x(b) = Q$. A mesma tem velocidade $x'(a)$ em P . Agora vimos que existia uma única geodésica com $x(a)$ e $x'(a)$ fixados, logo a única geodésica é $s \mapsto x(s)$. Acabamos de provar o seguinte resultado:

Teorema. Geodésica como curva ótima entre dois pontos

Seja $P, Q \in S$. Então existe uma única curva em S que minimiza a distância entre P e Q , com a distância induzida pela métrica. Esta curva é uma geodésica que passa por P e Q . Logo satisfaz $\gamma' \cdot \gamma'' = 0$ e $\|\gamma'\| = 1$.

Vizinhança geodésica

Com as notações do Lema anterior, identificamos um ponto $Q \in S$, situado numa vizinhança de p (que pode ser tomado como igual à P , origem do plano tangente em p , cf. demonstrações anteriores) com as coordenadas (r, θ) onde r é a distância geodésica entre Q e P . Lembramos que a mesma é definida como a distância mínima entre P e Q em S e é obtida como solução da ODE (\star) . O ângulo θ é definido como o ângulo entre e_1 e o vetor tangente em P . Seja $Q' := Q - (Q \cdot \nu_p)\nu_p$ a projeção de Q no plano tangente em p , e seja $r \mapsto r'(r) := \|P - Q'\|$. Temos $\lim_{r \rightarrow 0} |r - r'(r)| = 0$. Sendo a superfície nesta vizinhança é localmente um gráfico, o ponto Q escreve-se na base $\{e_1, e_2, \nu\}$ como $Q = p(r, \theta) := r' \cos \theta e_1 + r' \sin \theta e_2 + \tilde{f}(r, \theta)\nu$, onde $\tilde{f}(r, \theta) = f(x, y) = f(r' \cos \theta, r' \sin \theta)$. Portanto o vetor tangente à geodésica em P é $g_r(r, \theta) := \partial_r p(r, \theta) = \partial_r r' \cos \theta e_1 + \partial_r r' \sin \theta e_2 + \partial_r \tilde{f}(r, \theta)\nu$. O segundo vetor da base é



Métrica geodésica

$$g_\theta(r, \theta) := \partial_\theta p(r, \theta) = -r' \sin \theta e_1 + r' \cos \theta e_2 + \partial_\theta f(r, \theta) \nu.$$

♣ Seja $E = g_r \cdot g_r$, $F = g_r \cdot g_\theta$, $G = g_\theta \cdot g_\theta =: h^2(r, \theta)$. O elemento de comprimento, i.e., a métrica associada é:

$$ds^2 = A(dr|d\theta)^T \cdot (dr|d\theta) = E dr^2 + 2F dr d\theta + h^2(r, \theta) d\theta^2.$$

Lema. Primeira forma (métrica) geodésica

Em coordenadas geodésicas (ou coordenadas normais) temos

$$E = 1, F = 0, \lim_{r \rightarrow 0^+} h(r, \theta) = 0, \lim_{r \rightarrow 0^+} \partial_r h(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{h}{r} = 1.$$

DEM. Sendo $r \mapsto p(r, \theta)$ uma geodésica, logo $E = 1$. Pela 2.^a equação da geodésica ($w^\gamma = w^2 = \theta$): $\ddot{w}^\gamma + \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta = 0$, temos $\ddot{\theta} + \Gamma_{11}^2 \dot{r}^2 + \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha 2}^2 \dot{w}^\alpha \dot{\theta}$ e $\dot{\theta} = 0$ logo $\Gamma_{11}^2 = 0$. D'outro lado vemos que $\partial_r E = 2(E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2)$ e portanto $\Gamma_{11}^1 = 0$. Tivemos também $\partial_r F - 1/2 \partial_\theta E = F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = 0$, i.e. $F = \hat{F}(\theta)$ mas

também $F = \partial_r \tilde{f} \partial_\theta \tilde{f}$. Por $\nabla f(0) = 0$, logo $\lim_{r \rightarrow 0^+} \partial_r f = 0 = \lim_{r \rightarrow 0^+} \partial_\theta f$ e portanto $F = \lim_{r \rightarrow 0^+} \partial_r \tilde{f} \partial_\theta \tilde{f} = 0$. Portanto segue imediatamente $\lim_{r \rightarrow 0^+} h(r, \theta) = 0$. Sendo $\tilde{E} = 1, \tilde{F} = 0$ e $\tilde{G} = 1$ as componentes da 1.ª forma na base $\{e_1, e_2\}$ em P vimos que $\det A = \sqrt{EG - F^2} = \det \tilde{A} |\mathcal{J}|^2 = \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} |\mathcal{J}|^2$ pelo que, sendo $E = 1, F = 0, h = \det A = \sqrt{G} = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} = r \sqrt{\tilde{E}\tilde{G}}$, logo a tese quando $r \rightarrow 0^+$, já que $\lim_{r \rightarrow 0^+} \tilde{E}\tilde{G} = 1$ (= valor em P). QED.

♣ Portanto a métrica geodésica é: $ds^2 = dr^2 + h^2 d\theta^2$ e temos $\lim_{r \rightarrow 0^+} ds^2 = dr^2 = dx_1^2 + dx_2^2$. Logo a métrica geodésica exprimida em coordenadas Cartesianas em P (i.e, na origem do plano tangente em P) é $A_{\text{cart}}(0) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pela expressão explícita dos símbolos de Christoffel obtemos $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$.

Mapa exponencial e coordenadas geodésicas

- ♣ Então digamos que em coordenadas geodésicas a métrica (\mathbb{I}_1 ou A) e a conexão (i.e., a noção de gradiente) são localmente Euclidiana.
- ♣ Fora da origem, conforme a expressão explícita dos símbolos de Christoffel temos em coordenadas geodesicas: $0 = \Gamma_{rr}^r = \Gamma_{r\theta}^r = \Gamma_{\theta r}^r = \Gamma_{rr}^\theta$, $\Gamma_{\theta\theta}^r = -h\partial_r h$, $\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{\partial_r h}{h}$, e $\Gamma_{\theta\theta}^\theta = \frac{\partial_\theta h}{2h^2}$.
- ♣ Vimos a existência local de geodésica γ_v com velocidade inicial um vetor arbitrário v do plano tangente à S em p . Mediante uma mudança de parâmetro e um escalamento de v podemos supor que a mesma é definida no intervalo $[0, 1]$. Para além, sendo a geodésica a curva que minimiza a distância entre dois pontos, podemos supor que existe uma vizinhança U de p tal que todos os pontos de U são atingido por uma geodésica partindo de p . Logo, $\forall q \in U$ temos $v = \dot{\gamma}(0) \in T_p U$ e obtemos as coordenadas polares

geodésicas (r, θ) , onde r é a distância geodésica entre p e um ponto de U , e θ o ângulo definido mediante a fórmula:

$\|\dot{\gamma}(0)\| \cos \theta = \dot{\gamma}(0) \cdot e_1$, onde $\{e_1, e_2\}_p$ é uma base ortonormada do plano tangente em p .

Mapa exponencial

O mapa exponencial é definido como:

$\exp_p : A \subset T_p \rightarrow U \subset S : v \mapsto \gamma_v(1)$. Em particular $\exp_p(0) = p$.

Coordenadas geodésicas

O par (U, \exp_p^{-1}) é chamado carta local de coordenadas geodésicas. O mapa inverso $\exp_p^{-1} : U \subset \mathbb{R}^n : q \mapsto (r, \theta)$ define as coordenadas geodésicas.

Interpretação da curvatura de Gauss -1-

Equação de Gauss - relação entre curvatura e da métrica

Pela demonstração do teorema "egregium" (cf. termos em azul),

$$K = -\frac{\partial_u^2 G}{2(EG-F^2)} + \frac{E(\partial_u G)^2}{4(EG-F^2)^2} = -\frac{(2hh')'}{2h^2} + \frac{(2hh')^2}{4h^4}$$

$= -\frac{\partial_r^2 h}{h}$, onde $h' = \partial_r h$. Isto significa que em coordenadas geodésicas a função h traz toda a informação relativa à métrica.

Visto que $K = \frac{\partial_r^2 h}{h}$, a métrica define unicamente a curvatura de Gauss. Reciprocamente, resolvendo uma equação diferencial ordinária a curvatura define também unicamente a métrica.

Especificamente, no caso de uma curvatura constante a solução da ODE (com as condições iniciais dadas pelo lema anterior) é :

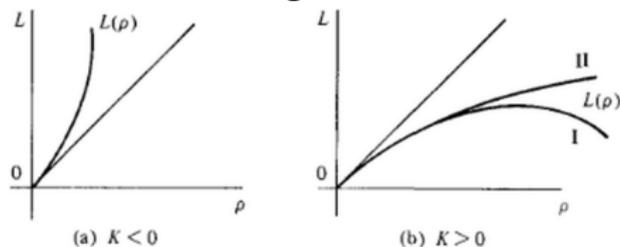
$$h(r, \theta) = \begin{cases} K^{-1/2} \sin(\sqrt{K}r) & K > 0 \\ r & K = 0 \\ (-K)^{-1/2} \sinh(\sqrt{-K}r) & K < 0 \end{cases} .$$

Interpretação da curvatura de Gauss -2-

Afastamento das geodésicas

A curva $\gamma_\rho : \theta \mapsto p(\rho, \theta)$ é chamada círculo geodesico (i.e., com o raio fixado). Consideramos agora a curva $r = \text{cst} = \rho$ situada entre as duas geodésicas $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$. A mesma tem comprimento

$L(\rho) := \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}_\rho\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{|\dot{\theta}|^2 G} dt = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\theta}| \sqrt{G} dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} h(\rho, \theta) d\theta$, com $\lim_{r \rightarrow 0^+} h = 0$ e $\lim_{r \rightarrow 0^+} h' = 1$, e $\partial_{rr} h = -Kh$, vê figura, onde o afastamento das geodésicas é medido por $L(\rho)$.



Observamos que se $K < 0$, as geodésicas afastam-se sempre, enquanto para $K > 0$ existem 2 casos, conforme o valor de K , um com afastamento, outro com avizinhação.

Interpretação da curvatura de Gauss -3-

Lema

A métrica é Euclidiana, i.e. $E = 1$, $G = 1$ e $F = 0$ sse $K = 0$.

DEM. Se $K = 0$ então $h = r$ e $G = r^2$, logo $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$.
 D'outro lado $dx_1^2 = d(r \cos \theta)^2 = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2$ e $dx_2^2 = d(r \sin \theta)^2 = (\sin \theta dr + \cos \theta d\theta)^2$, i.e., $dx_1^2 + dx_2^2 = ds^2$. QED.

Isometria

Duas superfícies são localmente isométricas se têm a mesma métrica em p , i.e., 1.^a forma fundamental, i.e. $\mathbb{I}_1(u, v)_p :=$

$A(u|v)_p^T \cdot (u|v)_p$, onde $A := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} (p)$. Em particular se

$f : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ é suave então $\forall u, v \in T_p S_1 : \mathbb{I}_1(u, v)_p = \mathbb{I}_1(d_p f[u], d_p f[v])$. O mapa f é dito uma isometria entre S_1 e S_2 se além de ser localmente isométrico e uma bijecção.

Interpretação da curvatura de Gauss -4-

♣ Quando K é constante, um corolário importante é o resultado seguinte: sendo "dentro da" superfície (é o significado de ser intrínseco) o conhecimento apenas de K não permite distinguir superfícies com formas diferentes mas mesma curvatura de Gauss, como por exemplo o cono, o cilindro e o plano. Acabamos de demonstrar o seguinte resultado:

Teorema de Minding

Cada duas superfícies são isométricas se e somente se têm a mesma curvatura de Gauss constante.

Corolário: mapas cartograficos não são isométricos.

Interpretação da curvatura de Gauss -5-

DEM. Um mapa é uma imersão injetiva suave de um aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ em $S \subset \{x : \|x\| = R\}$ (a esfera terrestre). O Teorema de Gauss diz que não pode haver mapa cartográfico isométrico, pois que se for isométrico tem que ter a mesma a curvatura de Gauss ($= 1/R$ no globo e $= 0$ na carta plana).

♣ Vimos que o círculo geodesico de raio r tem comprimento $\mathcal{L}(r) := \int_0^{2\pi} h(r, \theta) d\theta$. A sua vez, a superfície conteúda neste círculo tem área $\mathcal{A}(r) := \int_0^r \mathcal{L}(r) dr$.

Lema. Interpretação geométrica de K

Seja K constante numa vizinhança de p e seja um disco geodesico de raio r centrado em p . Logo

$$K = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{3}{\pi} \left(\frac{2\pi r - \mathcal{L}(r)}{r^3} \right) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{12}{\pi} \left(\frac{\pi r^2 - \mathcal{A}(r)}{r^4} \right).$$

Interpretação da curvatura de Gauss -6-

DEM. Sendo que $\lim_{r \rightarrow 0^+} h = 0$ a fracção

$k := \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{3}{\pi} \left(\frac{2\pi r - \mathcal{L}(r)}{r^3} \right)$ tem limite indefinido. Aplicamos a regra

de l'Hôpital duas vezes, i.e., $k = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{3}{\pi} \left(\frac{2\pi - \int_0^{2\pi} h'(r, \theta) d\theta}{3r^2} \right)$ e

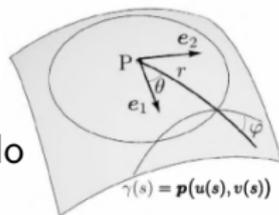
$k = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{3}{\pi} \left(\frac{-\int_0^{2\pi} \partial_{rr} h(r, \theta) d\theta}{6r} \right)$. Pela equação de Gauss

$\partial_{rr} h = -Kh$, temos $k = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K \frac{h(r, \theta)}{r} = K(P)$, pelo lema anterior. O cálculo é similar no caso da área. QED.

♣ Observação: no caso $K < 0$ expandendo h na ordem 3 temos $\sqrt{G} = h(r, \theta) = r - \frac{2K}{3}r^3 + o(r^3)$, pelo que o comprimento de um "pequeno" círculo geodesico é $2\pi(r - \frac{r^3}{3}K) + o(r^3)$. A quantidade " $2K\pi r^3/3$ " é a diferença entre o comprimento euclidiano e curvo.

Teorema de Gauss-Bonnet: caso do triângulo geodésico -1-

♣ Seja uma geodésica $\gamma(s) = p(r(s), \theta(s))$, com abcissa curvilínea s e cuja velocidade em $Q = p(r, \theta)$ na vizinhança geodésica de p faz um ângulo φ com a geodesica $r \mapsto p(r, \theta)$ em Q , vê figura.



Lema.

Temos $\varphi'(Q) = -\theta'(Q)\partial_r h(Q)$.

DEM. Sendo $\partial_r p$ e $\frac{1}{h(r, \theta)} \partial_\theta p$ ortonormados, escrevemos

$\gamma'(Q) = \cos \varphi \partial_r p + \frac{\sin \varphi}{h} \partial_\theta p$. D'outro lado $\gamma'(s) = \partial_s p(r(s), \theta(s)) = \partial_r p r'(s) + \partial_\theta p \theta'(s)$, pelo que $r'(s) = \cos \varphi$ e $\theta'(s) = \frac{\sin \varphi}{h}$. A 1.ª equação da geodésica (cf. (\star)) escreve-se em coordenadas normais: $r'' + \Gamma_{rr}^r (r')^2 + \Gamma_{r\theta}^r r' \theta' + \Gamma_{\theta\theta}^r (\theta')^2 = 0 = r'' - h \partial_r h (\theta')^2 = (\cos \varphi)' - h \partial_r h \frac{(\sin \varphi)^2}{h^2} = -\sin \varphi \left(\varphi' + \partial_r h \frac{\sin \varphi}{h} \right)$. Temos 2 hipóteses: ou $\sin \varphi \neq 0$, logo a tese, ou $\sin \varphi = 0$ num intervalo

Teorema de Gauss-Bonnet: caso do triângulo geodésico -2-

aberto, logo $\varphi = 0 = \theta'$, logo a tese, ou enfim $\sin \varphi(s_0) = 0$ e $\exists s_n \rightarrow s_0$ t.q. $\sin \varphi(s_n) \neq 0$, logo $\varphi'(s_n) = \theta'(s_n) \partial_r h(Q_n)$ e a tese segue por continuidade de φ' , θ' e h . QED.

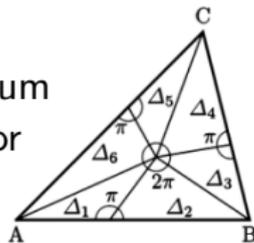
♣ Vamos demonstrar a fórmula de Gauss-Bonnet num triângulo geodésico $\triangle ABC$. Podemos sempre supor que o mesmo se encontra numa vizinhança geodésica centrada num dos seus cumes. Senão

a gente restringe-se a um sub-triângulo, vê imagem, onde vale

Gauss-Bonnet i.e., $\int_{\Delta_i} K dS = \angle A_i + \angle B_i + \angle C_i - \pi$. Logo

fazendo a soma, obtemos $\sum_{i=1}^6 \int_{\Delta_i} K dS =$

$$\sum_{i=1}^6 (\angle A_i + \angle B_i + \angle C_i - \pi) + 2\pi + 3\pi = \angle A + \angle B + \angle C - \pi.$$



Teorema de Gauss-Bonnet: caso do triângulo geodésico -3-

♣ Suponhamos então estivermos centrados em A .

Logo B e C têm coordenadas $(r_B, 0)$ e $(r_C, \angle A)$,

$AB \equiv s \mapsto p(s, 0)$, $0 \leq s \leq l := |AB|$, $AC \equiv s \mapsto p(s, \angle A)$,

$0 \leq s \leq l := |AC|$ e $BC \equiv s \mapsto p(r(s), \theta(s)) =: \gamma_{BC}(s)$,

$0 \leq s \leq l := |BC|$.

Teorema de Gauss-Bonnet num triângulo geodésico (Gauss 1828)

Seja um triângulo $\triangle ABC$ cujos lados são geodésicas na superfície S . Então $\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \int_{\triangle ABC} K dS$.

DEM. Mostramos que $\theta'(s) \neq 0$ e θ é crescente em BC . Com efeito, suponhamos que $\exists s_0 \in [0, l]$ tal que $\theta'(s_0) = 0$, logo a geodésica $s \mapsto p(s, \theta(s_0))$ partindo da origem A é tangente à BC em $R := (r(s_0), \theta(s_0)) \in BC$. Portanto temos duas geodésicas tangentes em R , logo, pelo unicidade das geodésicas, são

Teorema de Gauss-Bonnet: caso do triângulo geodésico -4-

coincidentes e $A \in BC$, uma contradição. Portanto $\theta'(s) \neq 0$ e como $\theta(0) = 0$ e $\theta(l) = \angle A$, $s \mapsto \theta(s)$ é estritamente crescente. Portanto podemos invertir o mapa e temos $\theta \mapsto s(\theta)$ e então o triângulo $\Delta ABC = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq r(\theta), 0 \leq \theta \leq \angle A\}$. Ora por $K = -\frac{\partial_{rr}h}{h}$ e $dS = \partial_r p dr \times \partial_\theta p d\theta = \sqrt{G} dr d\theta = h(r, \theta) dr d\theta$ temos, para $r_n \rightarrow 0^+$ quando $n \rightarrow \infty$,

$$\int_{\Delta_{ABC}} K dS = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\angle A} \int_{r_n}^{r(\theta)} \partial_{rr} h(r, \theta) dr d\theta =$$

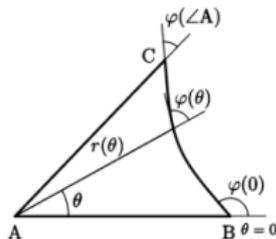
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\angle A} (h'(r_n, \theta) - h'(r(\theta), \theta)) d\theta =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\angle A} \left(1 + \frac{\varphi'}{\theta'}\right) d\theta = \int_0^{\angle A} \left(1 + \frac{\frac{d\varphi}{ds}}{\frac{d\theta}{ds}}\right) d\theta =$$

$$\int_0^{\angle A} \left(1 + \frac{\frac{d\varphi}{ds}}{\frac{d\theta}{ds}} \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{d\theta}\right) d\theta = \int_0^{\angle A} \left(1 + \frac{d\varphi}{d\theta}\right) d\theta = \angle A$$

Olhando pela figura, $\angle B = \pi - \varphi(0)$ e, por definição, $\angle C = \varphi(\angle A)$. Logo

$$\int_{\Delta_{ABC}} K dS = \angle A + \angle C + \angle B - \pi. \text{ QED.}$$



Teorema de Gauss-Bonnet: caso de uma curva geral -1-

♣ Um aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo se é estrelado com respeito a todos os seus pontos. Equivalentemente, se uma qualquer curva fechada em A pode ser encolhida a um ponto.

♣ Lembramos a fórmula de Green:

$$\int_{\gamma} (f dx_1 + g dx_2) = \int_{\text{int}(\gamma)} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2,$$

sempre que a região $\text{int}(\gamma) \subset \mathbb{R}^2$ é simplesmente conexa.

♣ Lembramos também o teorema das tangentes girantes:

Hopf's "Umlaufsatz" generalizado

Seja $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, contínua, regular por parte, simples e fechada. Sejam $\mathcal{S} := \{\dots, s_i, \dots, s_{i+1}, \dots\}$ um número finito de pontos entre 0 e l onde γ' é descontínua. Seja ϑ o ângulo entre γ' e e_1 . Então vale

$$\sum_i (\vartheta(s_{i+1}) - \vartheta(s_i)) + \sum_i [\theta_i] = 2\pi.$$

Teorema de Gauss-Bonnet: caso de uma curva geral -2-

♣ Enfim, lembramos os resultados obtidos nos exercícios 12 e 21 da 3.^a série: Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base movél ortonormada e suave de $T_p S$. Seja $s \mapsto \gamma(s)$ uma curva em S e θ o ângulo entre $\gamma'(s)$ e e_1 . Então $e_1 \cdot e_2' = \theta' - \kappa_g$ e $\partial_u e_1 \cdot \partial_v e_2 - \partial_u e_2 \cdot \partial_v e_1 = K \sqrt{\det \mathbb{I}_1}$.

Teorema de Gauss-Bonnet para um polígono curvilinear

Seja uma curva γ regular por partes, simples e fechada tal que a região contida no seu interior é simplesmente conexa.

Então $\sum_i \angle A_i = (N - 2)\pi + \int_{\text{int}\gamma} K dS + \sum_i \int_{\gamma_i} \kappa_g dL$, onde γ_i são as partes regulares de γ e A_i os N pontos de S onde γ' é descontínua.

Rem. Com $N = 3$ e $\kappa_g = 0$ re-apanhamos a fórmula anterior.

DEM. Por Hopf generalizado, temos

$$2\pi - \sum_{i=1}^N [\theta_i] = \sum_{i=1}^N (\vartheta(s_{i+1}) - \vartheta(s_i)) = \sum_{i=1}^N \int_{s_i}^{s_{i+1}} \vartheta'(s) ds =,$$

Teorema de Gauss-Bonnet: caso de uma curva geral -3-

DEM. (cont.) pelo Ex. 21 (Ana Costa),

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N \int_{s_i}^{s_{i+1}} (\kappa_g(s) + e_1 \cdot e_2'(s)) ds = \sum_{i=1}^N \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g(s) ds + \\
&\int_0^l e_1 \cdot e_2'(s) ds. \text{ Agora, } \int_0^l e_1 \cdot e_2' ds = \int_0^l e_1 \cdot (\partial_u e_2 u' + \partial_v e_2 v') ds = \\
&\int_{\gamma_{\#}} e_1 \cdot \partial_u e_2 du + e_1 \cdot \partial_v e_2 dv, \text{ onde } \gamma = p(\gamma_{\#}). \text{ Por Green, temos} \\
&\int_0^l e_1 \cdot e_2'(s) ds = \int_{\text{int}\gamma_{\#}} (\partial_u(e_1 \cdot \partial_v e_2) - \partial_v(e_1 \cdot \partial_u e_2)) dudv = \\
&\int_{\text{int}\gamma_{\#}} (\partial_u e_1 \cdot \partial_v e_2 - \partial_v e_1 \cdot \partial_u e_2) dudv, \text{ e, pelo Ex. 12 (João Silva),} \\
&\int_0^l e_1 \cdot e_2'(s) ds = \int_{\text{int}\gamma_{\#}} K \sqrt{\det \mathbb{I}_1} dudv = \int_{\text{int}\gamma} K dS. \text{ Portanto,} \\
&2\pi - \sum_{i=1}^N [\theta_i] = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \kappa_g dL + \int_{\text{int}\gamma} K dS. \text{ Mas } \theta_i \text{ é um ângulo} \\
&\text{exterior, pelo que } \angle A_i = \pi - \theta_i, \text{ logo a tese. QED.}
\end{aligned}$$

Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -1-

♣ Seja S uma superfície de \mathbb{R}^3 e $D \subset S$ um compacto. Em cada ponto de D consideremos um disco geodésico. Sendo D compacto, existe um número finito de discos geodésicos que cobrem D . Em cada disco, construímos uma triangulação (com triângulos não necessariamente geodésicos). Para além, em cada disco geodésico existe uma base ortogonal do plano tangente, e portanto aplica-se o teorema anterior para os polígonos curvilíneos. É um resultado de topologia algébrica mostrar que existe uma triangulação de D , i.e., todo D é coberto por triângulos curvilíneos, onde cada dois triângulos são disjuntos ou interseccionam em uma aresta ou em um vértice. Para além, uma aresta pertence a máximo dois triângulos.

Teorema. Existência de uma triangulação

Seja S uma superfície regular de \mathbb{R}^3 e $D \subset S$ um compacto. Então existe uma triangulação de D onde cada triângulo pertence a uma vizinhança geodésica.

Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -2-

♣ Se ∂D for suave então divide-se ∂D em um número finito de arcos tal que cada pertence a um só disco geodésico; a seguir, constroi-se a triângulação de D em cada disco geodésico interior partindo destes arcos como arestas e cobrindo então tudo D com as intersecções pretendidas.

Característica de Euler

A característica de Euler de uma triângulação $\mathcal{T}(S)$ de uma superfície compacta S é o número

$$\chi(S) = V - A + T,$$

$$\begin{cases} V & = & \text{número de vértices de } \mathcal{T}(S) \\ A & = & \text{número de arestas de } \mathcal{T}(S) \\ T & = & \text{número de triângulos de } \mathcal{T}(S) \end{cases} .$$

Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -3-

Teorema global de Gauss-Bonnet

Seja S uma superfície regular de \mathbb{R}^3 e $D \subset S$ um compacto. Suponhamos que ou ∂D é suave, ou $\partial D = \emptyset$. Então vale

$$\int_D K dS + \int_{\partial D} \kappa_g dL = 2\pi\chi(\bar{D}).$$

DEM. Seja uma triangulação $\mathcal{T}(D)$ de D . Em cada triângulo Δ_i

temos $\int_{\Delta_i} K dS + \int_{\partial\Delta_i} \kappa_g dL = (\angle A_i + \angle B_i + \angle C_i) - \pi$.

Somemos em todos os T triângulos de $\mathcal{T}(D)$.

Step 1. Já que não há intersecções no interior dos triângulos,

obtemos $\int_D K dS = \sum_{i=1}^T \int_{\Delta_i} K dS$. Já que cada aresta $\partial\Delta_i$ no

interior de D é sempre partilhada por 2 triângulos e então percorrida uma vez em cada sentido (vê figura), com κ_g dependente

Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -4-

DEM. (cont.) da orientação da curva, temos

$$\int_{\partial D} \kappa_g dL = \sum_{i=1}^T \int_{\partial \Delta_i} \kappa_g dL.$$



Step 2. Falta somar no membro a direita. Se o vértice P for no interior de D então a soma dos ângulos dos triângulos que partilhem P faz 2π (vê figura a esquerda). Se, ao contrário $P \in \partial D$, como é suave, existe uma tangente em cada vértice é portanto a soma dos ângulos nesses vértices é exatamente π . Seja n_1 o número de vértices interiores, e n_2 o número de vértices na

fronteira, logo $A = l_1 + l_2$. Então temos $\sum_{i=1}^T (\angle A_i + \angle B_i + \angle C_i) =$

$2\pi n_1 + \pi n_2$, logo a direita temos $(2\pi(n_1 + n_2) - \pi n_2) - (3T\pi - 2T\pi)$. Seja l_1 o número de arestas interiores, e l_2 o número de arestas na fronteira. Temos $3T = 2l_1 + l_2$. D'outro lado vale $n_2 = l_2$. Logo vêm $2\pi(V - A + T)$. QED.

Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -5-

Corolário G.-B.1.

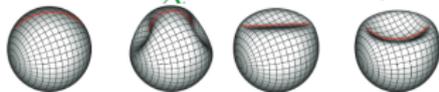
O número de Euler $\chi(S)$ de uma superfície fechada, i.e., compacta em sem bordo, depende apenas de S e não depende da triangulação escolhida.

DEM. Toma $D = S$. Sendo fechada temos $\partial S = \emptyset$. Sendo limitada temos S compacta. O membro a esquerda $\int_S K dS$ é independente da triangulação pelo que o membro a direita, i.e. $\chi(S)$ também é independente da triangulação. QED.

Corolário G.-B.2.

Seja $\varphi(S)$ uma deformação da esfera S por um difeomorfismo φ . Logo $\int_{\varphi(S)} K dS = \int_S K dS = 2\pi\chi(S)$.

DEM. Deformando a esfera, deformamos os triângulos da triangulação mas sem mudar $\chi = V - A + T$, logo a tese. QED.



Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -6-

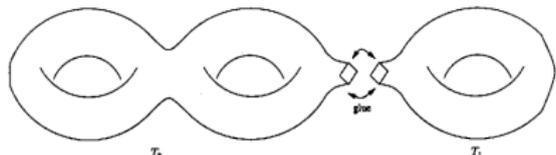
Soma conexa de compactos

Seja S_1 e S_2 duas superfícies compactas e conexas. Seja D um disco bidimensional. Construímos uma nova superfície S_{12} chamada soma conexa de S_1 e S_2 da seguinte maneira:

- ▶ Retiremos um disco aberto D nas duas superfícies
- ▶ Escolhemos um difeomorfismo φ da fronteira de $S_1 \setminus D$ a fronteira de $S_2 \setminus D$
- ▶ Consideremos a superfície obtida como espaço quociente de $S_1 \setminus D \cup S_2 \setminus D$ sob a relação de equivalência $x \sim \varphi(x)$.

Esta operação é chamada colagem suave de S_1 com S_2 . Uma colagem simples é obtida retirando um polígono ou um triângulo em vez de um disco, vê figura.

Neste caso φ é apenas um homeomorfismo.



Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -7-

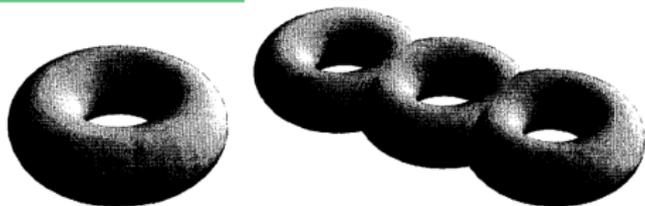
Teorema. Classificação dos compactos de dimensão dois

Um superfície conexa e compacta T_g é homeomorfa a uma das seguintes:

- ▶ Um esfera, $T_0 := S^2$;
- ▶ Uma soma conexa de g toros, $T_g, g \geq 1$;
- ▶ Uma soma conexa de planos projetivos.

Para além, duas superfícies distintas nesta lista não são homeomorfas. O inteiro g é chamado género da superfície.

Caso a superfície for orientável então é necessariamente uma soma de g toros, $g \geq 1$ ou o elemento neutro $T_0 = S^2$.



Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -8-

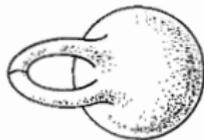
Observações:

- ▶ a soma conexa é comutativa e associativa (não depende da ordem ou de como, ou onde, se "cola")
- ▶ a soma conexa não altera a orientabilidade, excepto no seguinte caso: se somar um plano projectivo a uma superfície orientável, fica automaticamente não orientável
- ▶ na pratica o género é o numero de "alças" (handle)

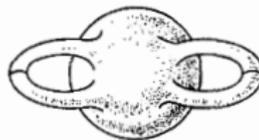
Sphere $\chi = 2$



Sphere with one handle $\chi = 0$



Sphere with two handles $\chi = -2$



Torus

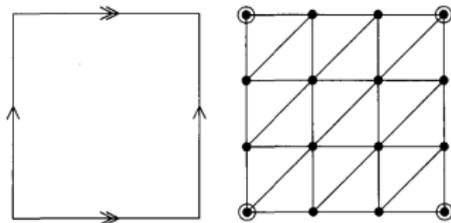


2-Torus

Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -9-

Triangulação do toro

Uma triangulação admissível do toro é dada na figura: temos as duas faces opostas de um quadrado postas a coincidir, portanto só se contam as arestas interiores mais as de um dos lados oposto só (i.e., $A = 33 - 3 - 3 = 27$); além disto, só se contam os vértices interiores e os de um dos lados opostos só, enquanto os 4 vértices extremais só contam como um (i.e., $V = 4 + 2 + 2 + 1 = 9$); finalmente, contam todos os triângulos (i.e., $T = 9 \times 2 = 18$). Logo $\chi(T_1) = V - A + T = 0$. Em particular, como consequência do teorema anterior sai $\int_{T_1} K dS = 0$ (vê Exercício 12 da série 4).



Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -10-

Teorema. Gauss-Bonnet topológico

Uma superfície orientável, compacta e conexa de gênero g tem número de Euler $\chi = 2 - 2g$. Assim, $\int_S K dS = 4\pi(1 - g)$.

DEM. Demonstramos isto por indução. O resultado vale para a esfera $g = 0$ já que temos $\chi = 2$. Com efeito, aplicando Gauss-Bonnet global à esfera temos $2\pi\chi = \int_S K dS = 4\pi r^2/r^2 = 4\pi$. O resultado vale para o toro T_1 já que vimos de um lado $\chi = 0$ e do outro $2(g - 1) = 2(1 - 1) = 0$. Suponhamos que vale para uma superfície compacta e conexa qualquer T_g com $g \geq 1$. Efetuemos então uma colagem simples retirando um n -gono (pensar num triângulo). Logo os números de Euler do conjunto T_{g+1} são

$$\begin{cases} A_{g+1} &= A_g + A_1 - n \\ V_{g+1} &= V_g + V_1 - n. \text{ Portanto, } \chi_{g+1} = A_{g+1} - V_{g+1} + T_{g+1} \\ T_{g+1} &= T_g + T_1 - 2. \end{cases}$$

$$= \chi_g + \chi_0 - 2 = 2 - 2g + 0 - 2 = 2 - 2(g + 1). \text{ QED.}$$

Derivação covariante e transporte paralelo -1-

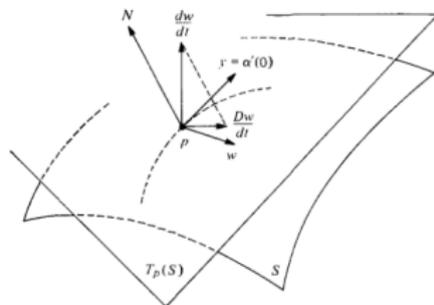
Campo vetorial diferenciável

Um campo vetorial é uma aplicação de $U \subset S$, U aberto, no plano tangente $T_p S$ que a cada $p \in S$ faz corresponder $w(p) \in T_p S$. Logo sendo $S \equiv p(u, v)$ temos $w = a(u, v)g_u + b(u, v)g_v$. O campo $p \mapsto w(p)$ é diferenciável em $P = p(0, 0) \in T_p S$ se a e b são diferenciáveis em P . É diferenciável em U se é diferenciável em todos os $p \in U$ i.e. em todas as origens dos planos $T_p S$, $\forall p \in S$.

Derivada covariante

Seja $y \in T_p S$ i.e. existe uma curva $t \mapsto \alpha(t)$ t.q. $y = \dot{\alpha}(0)$. Seja a derivada direcional $\frac{dw}{dt}(0) := \frac{d}{dt}w \circ \alpha(t)|_{t=0}$ em p na direcção y . A projecção $D_y w(p)$ de $\frac{dw}{dt}(0)$ no plano tangente $T_p S$ é chamada derivada covariante do campo vetorial w em p na direcção y . É uma forma linear e continua em y : pelo teorema de Riesz pode ser escrita com um produto interno $D_y w(p) = (y \cdot \nabla_\Gamma)w$. O operador $\nabla_\Gamma w$ é chamado derivada covariante de w associado a conexão Γ .

Derivação covariante e transporte paralelo -2-



Expressão explícita da derivada covariante

Sendo que $\alpha(t) = p(u(t), v(t))$ temos $w(t) = a(u(t), v(t))g_u + b(u(t), v(t))g_v = w_u(t)g_u + w_v(t)g_v$. Temos $\dot{\alpha}(0) = \dot{u}(0)g_u + \dot{v}(0)g_v$ e escrevemos $y^\tau = (\dot{u}, \dot{v})$, $\tau \in \{1, 2\}$. Projetando $\frac{dw}{dt}(0) = \dot{w}_u(t)g_u + \dot{w}_v(t)g_v + a(\partial_u g_u \dot{u}(t) + \partial_v g_u \dot{v}(t)) + b(\partial_u g_v \dot{u}(t) + \partial_v g_v \dot{v}(t))$ em $T_p S$ obtemos a projecção ortogonal que define a derivada covariante: $D_y w(p) := \frac{dw}{dt}(0) - \left(\frac{dw}{dt}(0) \cdot \nu\right) \nu$.

Derivação covariante e transporte paralelo -3-

Expressão explícita da derivada covariante (cont.)

Assim, com a notação $x^\tau := (u, v)$ e $w^\beta := (a, b)$, tiramos que

$$D_y w(p) = \dot{w}_u(t)g_u + \dot{w}_v(t)g_v + \sum_{\gamma, \beta=1}^2 w^\gamma \left(\Gamma_{\gamma u}^\beta \dot{u} + \Gamma_{\gamma v}^\beta \dot{v} \right) g_\beta.$$

Como $\dot{x}^\tau = y^\tau$, logo $\dot{w}^\beta = \sum_{\tau=1}^2 \frac{\partial w^\beta}{\partial x^\tau} \dot{x}^\tau = \sum_{\tau=1}^2 \partial_\tau w^\beta y^\tau$.

Portanto $D_y w(p) = \sum_{\tau, \beta=1}^2 \left(\partial_\tau w^\beta + \sum_{\gamma=1}^2 w^\gamma \Gamma_{\gamma \tau}^\beta \right) y^\tau(0) g_\beta$ (♠) =

$$\sum_{\beta=1}^2 \left((y(0) \cdot \nabla_\Gamma) w^\beta \right) g_\beta =: \sum_{\tau, \beta=1}^2 \left((\nabla_\tau^\Gamma) w^\beta \right) y^\tau(0) g_\beta; \text{ logo a}$$

derivada covariante de w : $w_{;\tau}^\beta := \nabla_\tau^\Gamma w^\beta = \partial_\tau w^\beta + \sum_{\gamma=1}^2 w^\gamma \Gamma_{\gamma \tau}^\beta$ (◇).

Derivação covariante e transporte paralelo -4-

- ♣ Observamos que (\diamond) já não depende da curva γ .
- ♣ Seja $g^\beta \in \mathbb{R}^3$ o dual de $g_\beta \in \mathbb{R}^3$, i.e., $g^\alpha \cdot g_\beta = \delta_{\alpha\beta}$.

Lema. Forma intrínseca da derivada covariante

A derivada covariante de w é obtida como $w^\beta_{;\tau} = \partial_\tau w \cdot g^\beta$.

DEM. $\partial_\tau w \cdot g^\beta = \partial_\tau \left(\sum_{\gamma=1}^2 w^\gamma g_\gamma \right) \cdot g^\beta = \sum_{\gamma=1}^2 \partial_\tau w^\gamma \delta_{\gamma\beta} + \sum_{\gamma=1}^2 w^\gamma \partial_\tau g_\gamma \cdot g^\beta$
 $w^\gamma \partial_\tau g_\gamma \cdot g^\beta = \partial_\tau w^\beta + \sum_{\gamma=1}^2 w^\gamma \partial_\tau g_\gamma \cdot g^\beta = \partial_\tau w^\beta + \sum_{j=1}^3 \sum_{\gamma=1}^2 w^\gamma \Gamma_{\gamma\tau}^j g_j \cdot g^\beta$
 $g_j \cdot g^\beta = \partial_\tau w^\beta + \sum_{j=1}^3 \sum_{\gamma=1}^2 w^\gamma \Gamma_{\gamma\tau}^j \delta_{j\beta} = \partial_\tau w^\beta + \sum_{\gamma=1}^2 w^\gamma \Gamma_{\gamma\tau}^\beta$.
 QED.

Transporto paralelo

Um campo vetorial w diferenciável é transportado paralelamente ao longo da curva γ se $D_{\dot{\gamma}(p)} w(p) = 0, \forall p \in S$. Observemos que no caso Euclidiano isto significa $\Gamma = 0$ e $D_{\dot{\gamma}(p)} w(p) = 0 = \partial_\tau w^\beta$, i.e., o vetor tem componentes constantes ao longo da curva.

Derivação covariante e transporte paralelo -5-

Teorema. Geodésicas têm velocidade paralela a curva

A curva γ é uma geodésica sse a sua velocidade é transportada paralelamente ao longo de γ .

DEM. Sendo que $\dot{\gamma} = \dot{u}g_u + \dot{v}g_v$, apliquemos (\spadesuit) com $w^\beta = (\dot{u}, \dot{v}) = y^\beta = \dot{x}^\beta$. Logo, todas as componente são nulas, i.e., $\sum_{\tau=1}^2 \dot{x}^\tau \partial_\tau w^\beta + \sum_{\tau,\gamma=1}^2 \Gamma_{\gamma\tau}^\beta w^\gamma w^\tau = \dot{w}^\beta + \sum_{\tau,\gamma=1}^2 \Gamma_{\gamma\tau}^\beta w^\tau w^\gamma = 0$, reconhecidas como as equações (\star) que definem uma geodésica. QED.

Teorema. Invariança sob transporte paralelo

Dois campos vetoriais w_1 e w_2 paralelos ao longo de uma curva $t \in I \mapsto \gamma(t)$ verificam a invariança das normas de w_1 e w_2 e dos ângulos entre w_1 e w_2 ao longo de γ . Para além $\dot{w}_1 = \frac{dw_1}{dt}$ e $\dot{w}_2 = \frac{dw_2}{dt}$ são vetores normais à S .

Derivação covariante e transporte paralelo -6-

DEM. A última afirmação segue logo da definição de ser paralelos ao longo de γ . Portanto vale $w_1 \cdot \dot{w}_2 = 0 = \dot{w}_1 \cdot w_2, \forall t \in I$. Mas isto significa exatamente que $w_1 \cdot w_2$ é constante ao longo da curva ($\frac{d}{dt}(w_1 \cdot w_2) = 0$), logo a tese. QED.

Curvatura geodésica

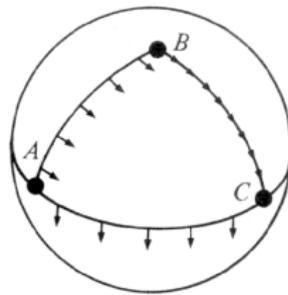
Seja $s \mapsto \gamma(s)$ uma curva parametrizada pela abscissa curvilínea e $s \mapsto w(s)$ um campo vetorial unitário. Logo $w'(s)$ é ortogonal à $w(s)$, i.e. tem uma componente ao longo de ν e outra ao longo de $\nu \times w$. D'outro lado a sua derivada covariante $D_{\gamma'} w$ ao longo de γ é por definição ortogonal à ν , o vetor normal a S . Portanto $D_{\gamma'} w = \lambda(\nu \times w(t))$ e λ é chamado o valor algebrico da derivada covariante.

No caso de $w = \gamma'$ temos $D_{\gamma'} \gamma' = \kappa_g(\nu \times w(t))$, onde κ_g é chamado curvatura geodésica. Logo se γ é geodésica, vem $\kappa_g = 0$.

Derivação covariante e transporte paralelo -7-

♣ Recordemos que se γ é geodésica, logo em abcissa curvilínea, $\kappa_n = \|\gamma'' \cdot \nu\| = \kappa = \|\gamma''\|$, i.e. $n = \nu$. Logo, numa esfera os grandes círculos são geodésicas pois que têm normal principal a apontar pela origem quando ν também aponta pela origem.

♣ Transportar paralelamente um campo vetorial w ao longo de uma curva γ significa então que não há variação de w ao longo da curva nas direcções tangentes à S , logo o ângulo que w faz com $\dot{\gamma}$ é constante. Observemos na figura três curvas com intersecções A, B e C onde o ângulo é conservado. Mas, pelo facto de existirem ângulos $\angle A$ em A , $\angle B$ em B e $\angle C$ em C , o vetor w gira duas vezes e acabe sua volta ABC com uma rotação com respeito ao seu declive de partida.



Referência bibliográfica

- ▶ **B. Dubrovin, A. Fomenko, S. Novikov**, *Modern Geometry - Methods and Applications Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields* (Springer)
- ▶ **Manfredo Do Carmo**, *Riemannian geometry* (Birkhäuser)
- ▶ **Philippe Ciarlet**, *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications* (SIAM)
- ▶ **William and Alexia Schulz**, *A practical introduction to differential forms* (unpublished)
- ▶ **Steven Kranz and Harold Parks**, *Geometric Integration Theory* (De Gruyter)

Espaços topológicos

Espaço topológico

Um espaço topológico E é o par $\{E, \tau\}$ onde a "topologia" τ consiste em os sub-conjuntos abertos do conjunto E .

Espaço topológico de Hausdorff

Um espaço topológico é de Hausdorff se dois quaisquer pontos disjuntos são contidos em dois abertos disjuntos.

Conjunto conexo

Um espaço topológico é conexo se não é uma união de dois abertos não vazios e disjuntos. Um sub-conjunto conexo é um espaço conexo para a topologia dos sub-espacos.

Espaço topológico normal

Um espaço topológico é normal se dois quaisquer fechados disjuntos são contidos em dois abertos disjuntos.

Espaços topológicos - homeomorfismos

Função contínua

Uma aplicação $f : E \rightarrow F$ é contínua entre os espaços topológicos E e F se $\forall A$ aberto de F , $f^{-1}(A) := \{x \in E : f(x) \in A\}$ é um aberto de E .

♣ Quando $F = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} f é chamado função.

Homeomorfismo

Um mapa contínuo é um homeomorfismo se (i) é uma bijecção, (ii) o mapa inverso $f^{-1} : F \rightarrow E$ é contínuo.

Teorema.

Seja E um espaço topológico de Hausdorff. Portanto

- ▶ (i) O limite de uma sucessão convergente é único
- ▶ (ii) Um singleton $\{x\}$, o gráfico de uma função contínua, um compacto, são sub-conjuntos fechados.

Espaços topológicos - coberturas

Cobertura aberta localmente finita

Seja (E, τ) um espaço topológico. O conjunto $\sigma \subset \tau$ é uma cobertura aberta de E se $E \subset \bigcup_{V \in \sigma} V$. A mesma é localmente finita se $\forall x \in E$ existe um número contável de $V \in \sigma$ tal que $U_x \cap V \neq \emptyset$, com U_x uma vizinhança aberta de x .

Refinamento de uma cobertura aberta

O conjunto $\tilde{\sigma}$ é um refinamento de σ se (i) $\tilde{\sigma}$ é uma cobertura aberta de E , (ii) $\forall \tilde{V} \in \tilde{\sigma}$ existe $V \in \sigma$ tal que $\tilde{V} \subset V$.

Espaço topológico paracompacto

Um espaço topológico E é paracompacto se uma qualquer cobertura aberta de E admite um refinamento localmente finito.

Variedades topológicas

Partição da unidade

Uma partição da unidade subordinada a uma cobertura aberta σ é (i) um refinamento localmente finito $\tilde{\sigma} \subset \sigma$, (ii) uma família de funções contínuas $f_\alpha : \tilde{V}_\alpha \rightarrow [0, 1]$ tal que $\text{supp} f_\alpha \subset V_\alpha$ e $\forall x \in E, \sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$. ($\text{supp} f_\alpha := \overline{\{x \in \tilde{V}_\alpha : f_\alpha(x) \neq 0\}}$).

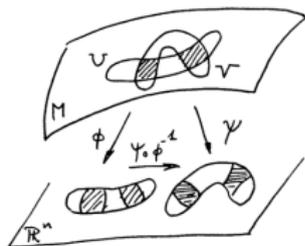
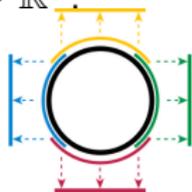
Teorema.

Um espaço de Hausdorff paracompacto E :

- ▶ (i) é um espaço topológico normal
- ▶ (ii) é um espaço que admite uma partição da unidade subordinada a um seu qualquer recobrimento aberto
- ▶ (iii) se admitir contáveis componentes conexas, é um espaço topológico completamente separável (i.e., para o qual existe uma base contável), portanto separável (i.e., a base é densa)
- ▶ (iv) os fechados de E são também Hausdorff e paracompactos.

Espaço topológico localmente Euclidiano

Um espaço topológico (E, τ) é localmente Euclidiano se $\forall x \in E$ existe $n \in \mathbb{N}$, uma vizinhança aberta U_x de x e um homeomorfismo $\phi : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$.



Carta local

O par $(U, \phi)_x := (U_x, \phi)$ é chamado carta local em $x \in E$.

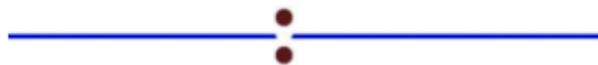
Atlas

Um atlas de E é a família de cartas locais $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ tal que $E = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. O mapa de transição é o homeomorfismo $\psi \circ \phi^{-1}$.

Mapa de transição

Sejam (U, ϕ) e (V, ψ) duas cartas locais tais que $U \cap V \neq \emptyset$. O mapa de transição é o homeomorfismo $\psi \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

♣ Exemplo de um e.t.l.e. mas não Hausdorff: a linha com duas origens (pois que as origens não tem vizinhanças abertas disjuntas).



Variedade topológica

Uma variedade topológica é um espaço topológico (i) localmente Euclidiano, (ii) Hausdorff, (iii) paracompacto

Dimensão e regularidade de uma variedade topológica

Uma variedade topológica \mathcal{M} tem dimensão m se $\forall x \in \mathcal{M}$, o homeomorfismo local tem valores no espaço euclidiano \mathbb{R}^m . Em particular, uma variedade topológica conexa tem dimensão m fixa. A variedade tem regularidade \mathcal{C}^k se o mapa de transição tem regularidade \mathcal{C}^k .

Espaço topológico metrizável

Um espaço topológico (E, τ) é metrizável se existe uma métrica $d : E \times E \rightarrow [0, \infty)$ tal que a topologia induzida por d é τ .

Variedades diferenciais

- ♣ Gostaríamos de ter variedades topológicas que sejam também metrizáveis.
- ♣ Por ser localmente Euclidiana, uma variedade topológica é necessariamente localmente metrizável e localmente compacta. Para ser globalmente metrizável, precisamos das seguintes propriedades: tem que ser completamente separável (teorema de Urysohn), ou paracompacto (teorema de Smirnov), tem que ser normal (para aplicar o Lema de Urysohn: separação de dois fechados com uma função contínua). Enfim tem que ser Hausdorff (para que existe um aberto U tal que $x \in U$ e $y \notin U$ se $x \neq y$, e assim demonstrar que $x \neq y$ implica que $d(x, y) > 0$).

Variedade diferenciável

Uma variedade diferenciável é uma variedade topológica com mapas de transição diferenciáveis. Uma variedade suave tem mapas de transição $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Exemplos

- ▶ O espaço Euclidiano \mathbb{R}^n e todos os abertos U de \mathbb{R}^n são variedades diferenciáveis de dimensão n (toma a carta (U, Id))
- ▶ A esfera unitária $S^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ é uma v.d. de dimensão n (para $n = 1$ é o círculo com 4 cartas, vê em cima)



- ▶ O bordo do semi-disco (2.º na figura) é uma variedade topológica por ser um homeomorfismo do círculo
- ▶ O "cusp" (3.º na figura, i.e. $\gamma(t) = (t^3, t^2)$) é uma v.t.: sendo um sub-espaço de \mathbb{R}^2 (i) é Hausdorff, (ii) sendo fechado de \mathbb{R}^2 , é paracompacto, já que \mathbb{R}^2 admite essas propriedades. Tem carta $\phi(x, y) \mapsto x^{1/3}$. Não é diferenciável (na origem). É um exemplo de mapa injetivo não regular ($\dot{\gamma} = 0$ em 0). Portanto não é uma imersão.

Contra-exemplos

- ▶ A cruz é Hausdorff e paracompacto mas não é localmente Euclidiano, em nenhum espaço Euclidiano.

DEM. Supomos que existe um homeomorfismo de



$B(0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \oplus$ para um $n \in \mathbb{N}_*$ e um $\epsilon > 0$, onde a

origem de \mathbb{R}^n mapa no cruzamento m . Portanto a restrição

do homeomorfismo: $B(0, \epsilon) \setminus \{0\} \rightarrow \oplus \setminus \{m\}$ é também um

homeomorfismo. Mas, $B(0, \epsilon) \setminus \{0\}$ tem pelo mais 2 componentes conexas (conforme $n > 1$ ou $n = 1$), enquanto

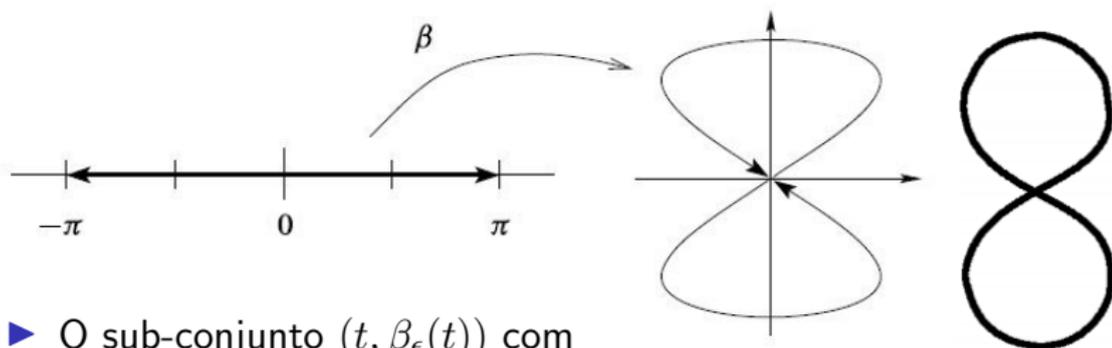
$\oplus \setminus \{m\}$ tem sempre 4, logo não pode ser um

homeomorfismo. QED.

- ▶ Alias, a cruz nem sequer é uma curva regular.

Contra-exemplos (continuação)

- ▶ Embora seja o gráfico de uma função suave (ao contrario da cruz), a figura do 8 (i.e., $\beta : (-\pi, +\pi) \rightarrow (\sin 2t, \sin t)$) também não é localmente Euclidiana, quer seja definida no aberto $(-\pi, +\pi)$ (logo sendo uma imersão injetiva), quer seja definida no intervalo fechado $[-\pi, \pi]$ (logo sendo uma imersão não injetiva). A demonstração é igual ao caso da cruz.



- ▶ O sub-conjunto $(t, \beta_\epsilon(t))$ com $\beta_\epsilon : (-\pi + \epsilon, +\pi - \epsilon) \rightarrow (\sin 2t, \sin t)$, $\epsilon > 0$ é uma variedade diferenciável.

Função diferenciável

A função $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável se para qualquer carta local (U, ϕ) a função $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável.

Vetor tangente em p

Tome $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável e uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ t.q. $\gamma(0) = p$. Temos $\dot{\gamma}(0)f := \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0}$. O **operador diferencial** $\dot{\gamma}(0) : f \mapsto \dot{\gamma}(0)f$ é chamado **vetor tangente** à curva γ em 0 e pertence a um espaço vetorial $T_p S$ (embora não Euclidiano como nas superfície de \mathbb{R}^m).

Se escolher uma parametrização (i.e. o inverso de uma carta local) $\Phi := \phi^{-1} : A := \phi^{-1}(U) \rightarrow \mathcal{M}$ em $p \in \mathcal{M}$, e notemos $\phi \circ \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$, vem $\dot{\gamma}(0)f := \frac{d(f \circ (\Phi \circ \phi) \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{i=0}^m \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial x_i} \dot{x}_i(0) = \sum_{i=0}^m \left(\dot{x}_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f \circ \Phi$. Logo, a base de $T_p S$ é $\Xi_p := \{g_i(p) := (\frac{\partial}{\partial x_i})_p\}$ com $\frac{\partial}{\partial x_i}$ o vetor tangente à linha de coordenada $x_i \mapsto \Phi(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$. O vetor tangente neste sistema de coordenadas em p escreve-se como

uma soma de componentes numa base, i.e., $\gamma'(0) = \sum_i \gamma'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i}$. Então, localmente o vetor tangente depende da parametrização (através de x_i), enquanto globalmente, o vetor tangente, i.e., o operador diferencial, i.e., a estrutura linear, não.

Diferencial de uma função

O diferencial $df_p : T_p\mathcal{M}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definido mediante a velocidade da curvas em p : $df_p[\dot{\gamma}(0)] := \dot{\gamma}(0)f = \left(\dot{x}(0) \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f$.

Plano tangente em p

O plano tangente $T_p\mathcal{M}$ é o conjunto dos vetores tangentes em p . A dimensão do plano tangente é a dimensão n da base Ξ_p .

Mapas entre variedades diferenciáveis

O mapa $F : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ é diferenciável em $p \in \mathcal{M}^m$ se existem $(U, \phi)_p$ de \mathcal{M}^m e $(V, \psi)_{F(p)}$ de \mathcal{N}^n tal que $A := \phi(F^{-1}(V) \cap U)$ é aberto, $f := \psi \circ F$ e a função $f \circ \phi^{-1} : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $\phi(p)$. O diferencial $dF_p : T_p\mathcal{M}^m \rightarrow T_{F(p)}\mathcal{N}^n$ é

definido mediante as velocidades das curvas em p , i.e.,
 $dF_p[\dot{\gamma}(0)] := \dot{\gamma}(0)f = \dot{\gamma}(0)\psi \circ F$. Com efeito, verifica-se que
 $\dot{\gamma}(0)f \in T_{F(p)}\mathcal{N}$: $\dot{\gamma}(0)f = \left(\dot{x}(0)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\psi \circ F \circ \phi^{-1} = \frac{d}{dt}$
 $(\psi \circ F \circ (\phi^{-1} \circ \phi) \circ \gamma)|_{t=0}$, pois que $(x_1, \dots, x_m) = \phi \circ \gamma$. Logo,
 com $\gamma^{\#F} := F \circ \gamma$, temos $dF_p[\dot{\gamma}(0)] = \frac{d}{dt}(\psi \circ F \circ \gamma)|_{t=0} = \dot{y}(0) =$
 $\dot{\gamma}^{\#F}(0)\psi \in T_{F(p)}\mathcal{N}$, onde definimos $(y_1, \dots, y_n) := \psi \circ \gamma^{\#F}$.

Rank (característica)

No caso $\phi = \psi = \text{Id}$, $\text{Rk}_x F = \text{Rk} \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right)_{ij} (x)$. No caso geral, o
 rank de F em p é definido como $\text{Rk}_p F = \text{Rk}_{\phi(p)} \psi \circ F \circ \phi^{-1}$.

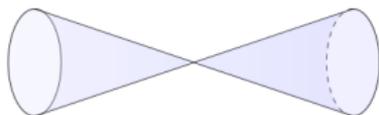
Imersão

Seja $F : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ ($m \leq n$) diferenciável. O mapa F é uma
 imersão de \mathcal{M} em \mathcal{N} se dF é injetiva (i.e. $\forall p : dF(p)[u - v] = 0$
 $\Rightarrow u = v$, i.e. $F'(p) \neq 0$ se $m = 1$ e $\text{rank} dF(p) = m$ se $m > 1$).

♣ Ex. 1: O mapa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ não é injetiva
 ($f(x) = f(x + 1)$) mas é imersa ($Df(x_0)[u] = 0 \iff u = 0$).

Mergulho

A imersão $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é um mergulho se $F : \mathcal{M} \rightarrow F(\mathcal{M}) \subset \mathcal{N}$ é um homeomorfismo. Logo, $F(\mathcal{M})$ é uma sub-variedade de \mathcal{N} .



♣ Ex. 2: Toma o duplo corno $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, r)$. Não é um mergulho por falta de injectividade (precisamente nos pontos $(0, f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável e uma curva

$\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ t.q. $\gamma(0) = p$. Temos $\dot{\gamma}(0)f := \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0}$. O

operador diferencial $\dot{\gamma}(0) : f \mapsto \dot{\gamma}(0)f$ é chamado **vector tangente** à curva γ em 0 e pertence à um espaço vetorial $T_p S$ (embora não Euclidiano como nas superfícies de \mathbb{R}^m).

Se escolher uma parametrização (i.e. o inverso de uma carta local) $\Phi := \phi^{-1} : A := \phi^{-1}(U) \rightarrow \mathcal{M}$ em $p \in \mathcal{M}$, e notemos $\phi \circ \gamma(t) = :$

$(x_1(t), \dots, x_m(t))$, vem $\dot{\gamma}(0)f := \frac{d(f \circ (\Phi \circ \phi) \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{i=0}^m$

$\frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial x_i} \dot{x}_i(0) = \sum_{i=0}^m \left(\dot{x}_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f \circ \Phi$. Logo, a base de $T_p S$ é

Teorema. Caracterização de um mergulho

- ▶ (i) Um mergulho $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é um difeomorfismo (bijecção onde F e F^{-1} são diferenciáveis) de \mathcal{M} em $F(\mathcal{M})$.
- ▶ (ii) Uma imersão injetiva é um mergulho se \mathcal{M} é compacto.

DEM. de (ii). Sabemos que $F : \mathcal{M} \rightarrow F(\mathcal{M})$ é surjetiva e injetiva, logo invertível. Demonstremos que F^{-1} é contínua. Seja A um fechado de \mathcal{M} compacto, logo A é compacto. Por continuidade, $F(A)$ é compacto, logo $(F^{-1})^{-1}(A) = F(A)$ é fechado (sendo \mathcal{N} Hausdorff), i.e. a definição da continuidade. QED.

♣ Ex. 4: a figura 8, $f(x) := (x, \beta(x))$ definida no fechado $[-\pi, \pi]$ é uma imersão não injetiva; no aberto $I := (-\pi, \pi)$ é injetiva mas não é um mergulho, sendo $f(I)$ compacto com I aberto.

Lema

Seja \mathcal{M} uma variedade sem bordo. Uma imersão $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ de classe \mathcal{C}^1 é localmente um mergulho.

♣ Logo, é localmente um difeomorfismo.

DEM. Sendo que $F : \mathcal{M} \rightarrow F(\mathcal{M})$ e uma imersão surjectiva, falta demonstrar que é localmente injetiva em p . Seja uma carta local $\{U, \phi\}$ em p , (V, ψ) em $F(p)$, e $f := \psi \circ F \circ \phi^{-1} : U \rightarrow V$. Seja $x_0 \in A := \phi^{-1}(U)$. Pela injetividade de Df , temos $c := \inf_{v \in S^1}$

$|Df(x_0)[v]| > 0$. D'outro lado, o diferencial é contínuo e portanto existe $A' \subset A$ aberto tal que $x_0 \in A'$ e $\forall z \in A'$:

$$\begin{aligned} \|Df(z) - Df(x_0)\| &\leq \frac{c}{2}. \text{ Tome } x, y \in A'; \text{ logo pelo teorema da} \\ \text{média } \exists z \in [x; y] : |f(x) - f(y) - Df(x_0)[x - y]| &= \\ |Df(z)[x - y] - Df(x_0)[x - y]| &\leq |x - y| \sup_{z \in [x; y]} \|Df(z) - Df(x_0)\| \leq \end{aligned}$$

$|x - y|c/2$. Pela desigualdade do triângulo inversa: i.e.

$$\begin{aligned} |u - v| \leq a \Rightarrow |u| \geq |v| - a \text{ temos } |f(x) - f(y)| &\geq \\ |Df(x_0)[x - y]| - |x - y|\frac{c}{2} &= \left(|Df(x_0)\left[\frac{x-y}{|x-y|}\right]| - \frac{c}{2} \right) |x - y| \\ \geq \left(\inf_{v \in S^1} |Df(x_0)[v]| - \frac{c}{2} \right) |x - y| &= \frac{c}{2} |x - y|. \text{ QED.} \end{aligned}$$

O teorema do rank constante

Teorema do rank constante

Seja $F : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ ($m \leq n$) diferenciável e de rank constante k numa vizinhança de $p \in \mathcal{M}$. Portanto existem $(U, \phi)_{\mathcal{M}}$ e $(V, \psi)_{\mathcal{N}}$ tal que $\psi \circ F \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$

♣ Neste caso, $S := F(\mathcal{M})$ é dita uma sub-variedade de dimensão k de \mathcal{N} pois que $S \cap V = \psi^{-1}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$. Em outras palavras, é localmente uma inclusão, com a inclusão $S \subset \mathcal{N}$ localmente isomorfa à inclusão dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$.

DEM. É equivalente provar a tese para $F \sim \psi_0 \circ F \circ \Phi_0 : W \rightarrow W'$, com $W \subset \mathbb{R}^m, W' \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $p \in W$ (com ψ_0, Φ_0 difeomorfismos quaisquer). Podemos também supor $p = 0$ e $F(p) = F(0) = 0$, e também que $(\frac{\partial F_i}{\partial x^j})_{1 \leq i, j \leq k}$ é a sub-matriz $k \times k$ de $DF(0)$ de rank k . Definimos então $x := (x_1, \dots, x_m)$, e $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$: $\phi(x_1, \dots, x_m) := (F^1(x), \dots, F^k(x), x^{k+1}, \dots, x^m) =: \tilde{x}$. Então $x = \phi^{-1}(\tilde{x})$ se existir o inverso.

Logo $D\phi(0) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}\right)_{1 \leq i, j \leq k} & \star \\ 0 & \text{diag}1 \end{pmatrix}$ é invertível e pelo teorema

do mapa inverso, existe $\phi^{-1} : \tilde{W} \subset W \rightarrow \tilde{U} \subset U$. Portanto, temos

$F \circ \phi^{-1}(\tilde{x}) = (F^1(x), \dots, F^k(x), F^{k+1}(x), \dots, F^n(x)) =$
 $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k, \tilde{F}^{k+1}(\tilde{x}), \dots, \tilde{F}^n(\tilde{x}))$ com $\tilde{F}^l = F^l \circ \phi^{-1}$. Logo

$D(F \circ \phi^{-1})(0) = DF(\phi^{-1}(0)) \circ d\phi^{-1}(0)$
 $= \begin{pmatrix} \text{diag}1 & 0 \\ \star & \left(\frac{\partial \tilde{F}^i}{\partial \tilde{x}^j}\right)_{k+1 \leq i \leq n, k+1 \leq j \leq m} \end{pmatrix}$. O mapa ϕ é um

difeomorfismo, logo $\text{rk}(F \circ \phi^{-1}) = \text{rk}F = k$, e daí $\left(\frac{\partial \tilde{F}^i}{\partial \tilde{x}^j}\right) = 0$ e \tilde{F} depende apenas de $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k)$. Definimos então $T(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$

$:= (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k, \tilde{x}^{k+1} + \tilde{F}^{k+1}(\tilde{x}), \dots, \tilde{x}^n + \tilde{F}^n(\tilde{x}))$ que verifica

$T(0) = 0$ e $DT(0) = \begin{pmatrix} \text{diag}1 & 0 \\ \star & \text{diag}1 \end{pmatrix}$. Logo $\eta := T^{-1}$ existe

numa vizinhança de 0 e verifica $\eta \circ F \circ \phi^{-1}(x) = T^{-1}(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k, \tilde{F}^{k+1}(\tilde{x}), \dots, \tilde{F}^n(\tilde{x})) = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k, 0, \dots, 0) = \phi(x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$. A tese segue com $\psi := \phi^{-1} \circ \eta$. QED.

A questão da existência de mergulhos Euclidianos

♣ A questão principal é determinar se uma variedade de dimensão m (i) é homeomorfa **globalmente** à um conjunto m -dimensional de um espaço euclidiano, e tal que (ii) em cada ponto deste conjunto existe um plano tangente (i.e., um "interior", e um "exterior"). **Desta forma conseguimos passar de uma geometria intrínseca a uma geometria extrínseca.** A 1.^a condição requer encontrar uma função $f : \mathcal{M} \rightarrow f(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}^N$ injetiva e continua tal que f^{-1} seja continua. A 2.^a condição a sua vez requer que f seja uma imersão. Assim, procuramos mergulhos $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^N$ com N mais próximo quanto possível de m .

♣ Quando existir tal f , pelo teorema do rank constante, obtem-se que $S := f(\mathcal{M})$ é uma sub-variedade de \mathbb{R}^N de dimensão k .

♣ Ex. 5: A função $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : \theta \mapsto f(\theta) = \theta^2$ é periódica ($f(-\pi) = f(\pi)$), diferenciável, com $df = \theta$ injetivo. De certeza, não é um mergulho por falta de injetividade.

♣ Não existe um mergulho $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ pois que se existir uma imersão $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ injetiva e periodica, logo era monotona, uma contradição.

♣ Dúvida: existe uma imersão $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, pois que no Ex. 5, tínhamos $[-\pi, \pi]$ não homeomorfo à S^1 (existe um ponto duplo)?

Lema. (S^n não se imerge em \mathbb{R}^n)

Seja \mathcal{M} compacto sem bordo de dimensão n . Não existe uma imersão $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

DEM. Suponhamos que tal imersão existe. Seja $K \subset \mathcal{M}$ fechado, logo K é compacto, donde $f(K)$ é compacto por continuidade de f , logo é fechado (send \mathcal{M} Hausdorff). Portanto f é um mapa fechado. Seja $A \subset \mathcal{M}$ aberto. Logo $f(A) = \cup_i f(B_i)$ com B_i uma bola aberta suficientemente pequena. Pelo teorema acima, f é localmente um difeomorfismo logo $f(B_i)$ e então $f(A)$ são abertos. Pelo teorema do rank constante, $f(\mathcal{M})$ é uma sub-variedade de \mathbb{R}^n com f um mapa aberto e fechado. Sendo $f(\mathcal{M})$ aberta e

em si própria, vem que é uma sub-variedade aberta e fechada em \mathbb{R}^n . Mas, a única sub-variedade não vazia, aberta e fechada de \mathbb{R}^n é \mathbb{R}^n . Sendo $F(\mathcal{M})$ compacta, sai uma contradição. QED.

Teorema de Whitney - forma super fraca

Seja \mathcal{M} uma variedade diferenciável suave, compacta, de dimensão $m \geq 2$. Existe $N \in \mathbb{N}_*$ e um mergulho $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^N$

DEM. Seja $\{U_i, \phi_i\}$ um atlas de \mathcal{M} . Por compacidade, existe um sub-atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ com cardinalidade finita k . Seja $\{f_\alpha, 1 \leq \alpha \leq k\}$ uma partição da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq k}$.

Definimos o mapa contínuo $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{k(m+1)} : p \mapsto (f_1(p)\phi_1(p), \dots, f_k(p)\phi_k(p), f_1(p), \dots, f_k(p))$.

- Step 1 (Injetividade de Φ). Suponhamos $\Phi(p_1) = \Phi(p_2)$, logo existe α_0 t.q. $f_{\alpha_0}(p_1) = f_{\alpha_0}(p_2) \neq 0$. Portanto $\phi_{\alpha_0}(p_1) = \phi_{\alpha_0}(p_2)$, de maneira que $p_1 = p_2$ pela injetividade de ϕ_{α_0} .

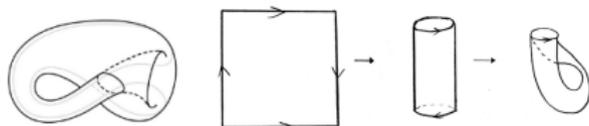
- Step 2 (Injetividade de $d\Phi_p$) Toma $X_p \in T_p\mathcal{M}$. Temos $d\Phi_p[X_p] = (df_{1p}[X_p]\phi_1(p) + f_1(p)d\phi_{1p}[X_p], \dots, df_{kp}[X_p]\phi_k(p) +$

$f_k(p)d\phi_{kp}[X_p], df_{1p}, \dots, df_{kp}$). Logo $d\Phi_p[X_p] = 0$ implica $df_{\alpha p} = 0, \forall \alpha$, donde $f_{\alpha}(p)d\phi_{\alpha p}[X_p] = 0, \forall \alpha$. Mas existe α_0 t.q. $f_{\alpha_0}(p) \neq 0$, logo $d\phi_{\alpha_0 p}[X_p] = 0$. Sendo ϕ_{α_0} um difeomorfismo, vem $X_p = 0$. Concluimos com (ii) do teorema acima. QED.

Teorema de Whitney - forma super forte

Seja \mathcal{M} uma variedade diferenciável de dimensão $m \geq 2$.

- ▶ Existe uma imersão $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{2m-1}$
- ▶ Existe um mergulho $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$
- ▶ Se \mathcal{M} é compacto e orientável, ou compacto com bordo não vazio, ou se $m \neq 2^k, k \in \mathbb{N}_*$, existe um mergulho $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{2m-1}$.

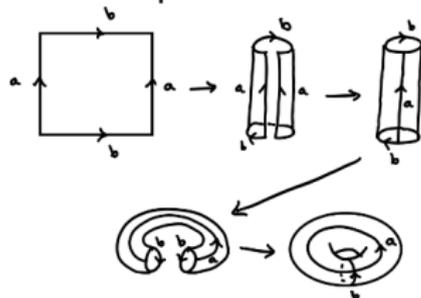


♣ A garrafa de Klein (vê figura) é um exemplo de 2-variedade que pode ser imersa em \mathbb{R}^3 mas não mergulhada em \mathbb{R}^3 (por falta de injetividade: tem auto-interseções).

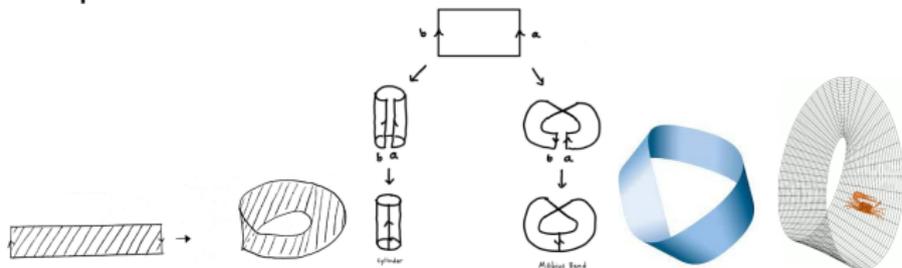
Outros exemplos

♣ Já falámos da construção do toro como exemplo de 2-variedade orientável.

É evidente que mergulha em \mathbb{R}^3 .



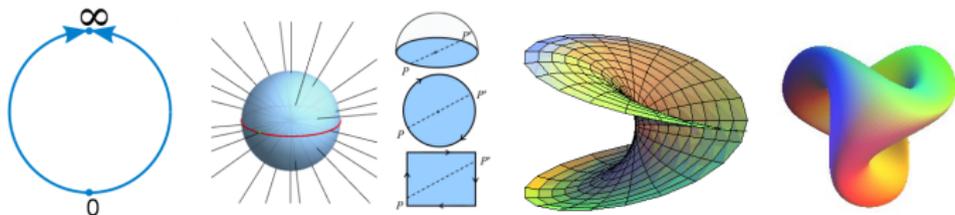
♣ Um exemplo de 2-variedade não orientável é a fita de Moebius:



♣ A fita de Möbius tem um bordo homeomorfo ao círculo, logo por Whitney é um compacto com bordo que mergulhe em \mathbb{R}^3 .

Plano real projetivo

O plano real projetivo \mathbb{RP}^n é uma variedade suave e compacta de dimensão n definida como o conjunto de todas as retas que passam pela origem em \mathbb{R}^{n+1} .

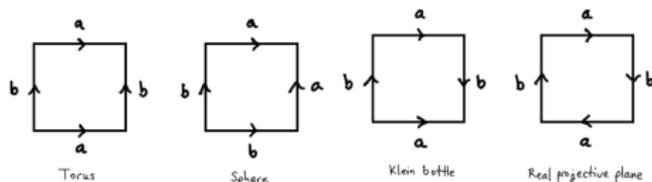


♣ \mathbb{RP}^1 (a esquerda na figura) consiste no semi-círculo com identificação das extremidades. \mathbb{RP}^2 (no meio na figura) é um hemisfério de S^2 , a sua vez homeomorfo ao disco, e com identificação dos pontos antipodais no círculo unitário. Por homeomorfismo é o quadrado com apropriadas identificações e orientações. Por Whitney, existe uma imersão não injetiva em \mathbb{R}^3 dada pela superfície de Boy (duas últimas a direita na figura).

♣ Salientamos o facto de que quando se fala de mergulhar uma variedade \mathcal{M} em \mathbb{R}^N entendemos encontrar uma copia difeomorfa de \mathcal{M} que seja contida em \mathbb{R}^N (pelo teorema do rank constante), mas não se trata de uma parametrização de \mathcal{M} . Se for um mergulho somos homeomorfos a uma superfície injetiva (sem auto-interseções, como a esfera, o toro, a fita de Möbius), se for apenas uma imersão, logo N é inferior de uma unidade mas a superfície pode não ser injetiva (Ex. a garrafa de Klein ou o plano projetivo). Notemos que $S = f(\mathcal{M})$ admite como topologia a topologia induzida, i.e. seus abertos são os abertos de \mathbb{R}^N intersecatos com S . Para além, mediante tais imersões euclidianas conseguimos identificar um vetor tangente enquanto operador diferencial em $T_p\mathcal{M}$ com um vetor tangente Euclidiano em $T_p\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N$; além de mais, pode-se falar de comprimento de um vetor tangente (a partir um operador diferencial) pois que " $X^p \in T_p\mathcal{M} \subset T_p\mathbb{R}^N$ ". Portanto a partir de agora, quando falamos de vetor tangente, intendemos um elemento do plano

tangente que tem a sua estrutura linear própria (não Euclidiana), mas que é isomorfa a uma estrutura Euclidiana de dimensão superior que confere ao vetor uma interpretação clássica como uma velocidade num espaço Euclidiano.

♣ Recapitulemos alguns exemplos de variedades compactas orientáveis ou não:



♣ Um espaço vetorial $(K - 1)$ -dimensional de \mathbb{R}^K é determinado univocamente por uma reta em \mathbb{R}^K normal a este plano que passa pela origem de \mathbb{R}^K . Logo a família dos sub-espacos $(K - 1)$ -dimensionais de \mathbb{R}^K é caracterizada pelo plano projetivo $\mathbb{R}P^{K-1}$. Seja $[v]$ uma linha paralela ao vetor $v \in \mathbb{R}^K$ que passa pela origem. Definimos o complemento ortogonal de $[v] \in \mathbb{R}^K$ como: $\varpi_{[v]} := \{u \in \mathbb{R}^K : u \cdot v = 0\}$. O mesmo é isomorfo a \mathbb{R}^{K-1} . Definimos então a projecção em $\Pi_{[v]} : \mathbb{R}^K \rightarrow \varpi_{[v]}$.

♣ Ao fim de demonstrar o teorema de Whitney na sua forma clássica (forma mediana), demonstramos primeiro dois resultados.

Teorema. Imersão por projeção

Se uma variedade \mathcal{M} de dimensão m admitir uma imersão injetiva em \mathbb{R}^K com $K > 2m + 1$, admite uma imersão injetiva em \mathbb{R}^{K-1} .

DEM. Vamos projetar a imersão $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^K$ em \mathbb{R}^{K-1} e averiguar se tal projeção existe, sendo a mesma (i) injetiva, (ii) uma imersão. Seja $\phi_{[v]} = \Pi_{[v]} \circ \phi$ uma projeção ao longo de $[v] \in \mathbb{R}P^{K-1}$.

• **Step 1.** Suponhamos que $\forall [v] \in \mathbb{R}P^{K-1}$, $\phi_{[v]}$ não é injetiva. Logo existem $p \neq q \in \mathcal{M}$, t.q. $\phi_{[v]}(p) = \phi_{[v]}(q)$, i.e., $\phi(p) \neq \phi(q)$ (pela injetividade de ϕ) e $[\phi(p) - \phi(q)] = [v]$. Seja a variedade $\mathcal{N} := \mathcal{M} \times \mathcal{M} \setminus \{(p, p), p \in \mathcal{M}\}$ de dimensão $2m$. O mapa $\alpha : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}P^{K-1} : (p, q) \mapsto [\phi(p) - \phi(q)] = [v]$ é suave (i.e., depende suavemente de $\phi(p) - \phi(q)$ que a sua vez depende suavemente de p e q). Mas, já que por hipótese a dimensão de \mathcal{N}

$(2m)$ é estritamente inferior a dimensão de $\mathbb{R}P^{K-1}$ ($K - 1$), o teorema de Sard (não demonstrado) implica que a imagem de α em $\mathbb{R}P^{K-1}$ tem dimensão (de Hausdorff) estritamente inferior a $K - 1$, logo é negligível em $\mathbb{R}P^{K-1}$, uma contradição. Portanto, existe pelo menos um $[v] \in \mathbb{R}P^{K-1}$, tal que $\phi_{[v]}$ é injetiva.

• **Step 2.** Suponhamos que $\forall [v] \in \mathbb{R}P^{K-1}$, $\phi_{[v]}$ não é uma imersão. Logo existem $p \in \mathcal{M}$ e $X_p \neq 0 \in T_p\mathcal{M}$, t.q. $d\phi_{[v]}(p)[X_p] = 0 = d\Pi_{[v]}(\phi_p)[d\phi_p[X_p]] = \Pi_{[v]}(\phi_p)d\phi_p[X_p]$. Logo $[v] = [d\phi_p[X_p]]$. O mapa $\beta : \{(p, X_p) : X_p \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}P^{K-1} : (p, X_p) \mapsto [d\phi_p[X_p]]$ é suave de uma variedade de dimensão $2m$ a uma variedade de dimensão $K - 1$, logo tem imagem negligível. QED.

Corolário

Se uma variedade \mathcal{M} de dimensão m admitir uma imersão em \mathbb{R}^{2m+1} , logo admite uma imersão em \mathbb{R}^{2m} .

DEM. Seja $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ uma imersão e $\phi_{[v]} = \Pi_{[v]} \circ \phi$ uma projeção ao longo de $[v] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{2m}$. Suponhamos que $\forall [v] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{K-1}$, $\phi_{[v]}$ não é uma imersão. Logo existem $p \in \mathcal{M}$ e $X_p \neq 0 \in T_p\mathcal{M}$, t.q. $d\phi_{[v]}(p)\left[\frac{X_p}{\|X_p\|}\right] = 0 = \Pi_{[v]}(\phi_p)d\phi_p\left[\frac{X_p}{\|X_p\|}\right]$ e $[v] = \left[d\phi_p\left[\frac{X_p}{\|X_p\|}\right]\right]$. Definimos $\bar{\beta} : \mathcal{U} := \{(p, X_p) : \|X_p\| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{2m} : (p, X_p) \mapsto [d\phi_p[X_p]]$ é um mapa suave de uma variedade de dimensão $2m - 1$ a uma variedade de dimensão $2m$, uma contradição. QED.

♣ Juntando tudo, acabamos de demonstrar o resultado seguinte:

Teorema de Whitney - forma clássica

Seja uma variedade compacta \mathcal{M} de dimensão m . Então existe um mergulho em \mathbb{R}^{2m+1} e uma imersão em \mathbb{R}^{2m} .

♣ Tendo as nossas imersões Euclidianas, falta agora introduzir um modo de calcular o comprimento de vetores. Será dado pelo conceito de métrica Riemanniana.

Métrica e variedades Riemannianas

♣ Num espaço Euclidiano com coordenadas Cartesianas $\{x^i\}$ o comprimento do vetor $u = \sum_i u^i e_i$ é dado pela forma quadrática $ds^2[u, v] = \sum_i dx[u] \cdot dx[v] = \sum_i dx^i[u] dx^i[v] = \sum_i u^i v^i$, i.e., $ds = \sqrt{ds^2[u, u]} = \sqrt{(u^i)^2}$. A forma quadrática $ds^2[u, v] := \sum_i dp[u] \cdot dp[v]$ onde p é o mapa posição, é chamada métrica (pois permite fazer medições de comprimentos e ângulos entre vetores).

♣ Numa variedade diferenciável \mathcal{M} , acontece que a métrica Riemanniana de \mathcal{M} pode ser (mas não deve) definida localmente mediante a "parametrização" $\Phi := \phi^{-1} : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow S$, logo é uma métrica induzida (pelo mapa Φ e pelo produto interno de \mathbb{R}^m) definida localmente como $g_{ij}(p) := \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\phi(p)) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(\phi(p))$ (com \cdot o produto interno de \mathbb{R}^m). Define uma forma quadrática no plano tangente: $\forall u, v \in T_p \mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}(u, v) := g_{ij} u^i u^j$. A mesma deve ser definida positiva, portanto supomos que $\Phi = \phi^{-1}$ e $\Psi = \psi^{-1}$ são imersões (i.e., $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ linearmente independente de $\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$ se $i \neq j$).

Métrica e variedade Riemannianas - definição

Seja \mathcal{M} uma variedade diferenciável de dimensão m . Uma métrica Riemanniana é uma família de operadores bilineares $g_{ij} : \mathcal{M} \rightarrow \text{Bilinear}(T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M}) : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ simétricos, definidos positivos e suaves (pelo teorema de Riesz, pode ser representado por uma matriz $g_{ij}(p) \in \mathbb{R}_{\text{sym},+}^{m \times m}$).

O produto interno associado à métrica é definido como a forma bilinear $g_{\mathcal{M}}(u, v)_p = \langle u|v \rangle_g(p) := \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(p)u^i(p)v^j(p)$, onde $u = \sum_i u^i g_i$ e $v = \sum_j v^j g_j$ (sendo o vetor de base $g_k(p)$ de $T_p\mathcal{M}$ definido classicamente como $g_k(p) := \partial_k \Phi(\phi(p))$).

Ser suave significa que a função $p \in U \mapsto g_{\mathcal{M}}(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})_p$ é suave em $U \subset \mathcal{M}$, com $\frac{\partial}{\partial x_i}$ as linhas de coordenadas.

Uma variedade diferenciável dotada de uma métrica Riemanniana é uma variedade Riemanniana.

♣ A métrica induzida é um exemplo de métrica, definida quando \mathcal{M} é imerso em \mathbb{R}^m (como as superfícies regulares de \mathbb{R}^3), da maneira seguinte: $g_{ij} := g_i(p) \cdot g_j(p) = \partial_i \Phi(\phi(p)) \cdot \partial_j \Phi(\phi(p))$.

Isometria entre variedades com a métrica induzida

♣ Seja $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ um mapa diferenciável. A posição de $p \in \mathcal{M}$ é o mapa local $p : A \rightarrow \mathcal{M} : x \in A \mapsto p = \Phi(x)$. Sejam $u := \dot{\gamma}(0), v := \dot{\alpha}(0) \in T_p \mathcal{M}$ duas velocidades de curvas de \mathcal{M} , i.e., dois elementos do plano tangente em $p = \gamma(0) = \alpha(0)$.

Seja a métrica induzida de \mathcal{M} , i.e. $g_{\mathcal{M}}(u, v)_p := \mathbb{I}_{\mathbf{1}_{\mathcal{M}}}^2[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \sum_i dp[u] \cdot dp[v] = \sum_{i,j} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} dx^i[u] \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} dx^j[v] = \sum_{i,j} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \mathbf{u}^i \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \mathbf{v}^j$.
Seja $q := F \circ \Phi : A \rightarrow \mathcal{N}$, $\psi : \mathcal{N} \rightarrow V$, e $\Psi := \psi^{-1}$.

♣ D'outro lado, temos que a métrica induzida de \mathcal{N} é $\mathbb{I}_{\mathbf{1}_{\mathcal{N}}}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \sum_i dq[u] \cdot dq[v] = \sum_{i,j} \frac{\partial(\Psi \circ \psi) \circ F \circ \Phi}{\partial x^i} dx^i[u] \cdot \frac{\partial(\Psi \circ \psi) \circ F \circ \Phi}{\partial x^j} dx^j[v]$

Existência de mergulho isometricos.

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i,j,m,l} \frac{\partial \Psi}{\partial y^l} \frac{\partial (\psi \circ F \circ \Phi)^l}{\partial x^i} u^i \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y^m} \frac{\partial (\psi \circ F \circ \Phi)^m}{\partial x^j} v^j \\
 &= \sum_{i,j,m,l} \frac{\partial \Psi}{\partial y^l} \mathbf{dF}^l(\mathbf{p})[\mathbf{u}] \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y^m} \mathbf{dF}^m(\mathbf{p})[\mathbf{v}] \\
 &=: g_{\mathcal{N}}(dF(p)[u], dF(p)[v])_{F(p)}, \text{ onde, por definição, } dF(p)[u] = \\
 &\frac{d}{dt} (\psi \circ \gamma^{\#F})(0), dF(p)[v] = \frac{d}{dt} (\psi \circ \alpha^{\#F})(0) \in T_{F(p)}\mathcal{N}.
 \end{aligned}$$

Distância Riemanniana

Se \mathcal{M} for uma variedade Riemanniana conexa conseguimos definir uma métrica $d_g(x, y) = \inf_{\gamma} \int_a^b g_{\mathcal{M}}(\gamma', \gamma') dt$ com γ uma curva suave com extremidades x e y definida no intervalo $[a, b]$. Assim, (\mathcal{M}, d_g) torna-se um espaço metrico.

Isometria Riemanniana - definição

Um mapa $F : (\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ é uma isometria Riemanniana se é diferenciável e se $g_{\mathcal{M}}(u, v)_p = g_{\mathcal{N}}(dF(p)[u], dF(p)[v])_{F(p)}$.

Teorema de Nash-Kuiper

Seja uma variedade diferenciável \mathcal{C}^k , $k \geq 3$ de dimensão m e uma métrica $g_{\mathcal{M}} : p \in \mathcal{M} \rightarrow \text{Bilinear}(T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M}; \mathbb{R}_{\text{sym},+}^{m \times m})$ suave em \mathcal{M} . Existe um mergulho $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$, \mathcal{C}^k , $k \geq 3$ isométrico, i.e.: $g_{\mathcal{M}}(u, v)_p = g_{\mathbb{R}^n}(df_p[u], df_p[v]) = df_p[u] \cdot df_p[v]$, com $n = (m + 1) m(3m + 11)/2$ (se \mathcal{M} for compacta, $n = m(3m + 11)/2$).

♣ Observamos que o teorema diz que o comprimento e os ângulos dos vetores tangentes são conservados. Salientamos também que se trata de mergulhos em superfícies Riemannianas, logo a isometria é sempre local (no sentido dos planos tangentes). Em particular não é um resultado de isometria global entre espaços métricos. Uma consequência do teorema é que a imagem de uma curva em \mathcal{M} pelo mergulho terá o mesmo comprimento que a curva inicial, num espaço de dimensão maior (pois que integramos a velocidade/vetor tangente cujo módulo é conservado).

Conexão -1-

Mudança de variável

Sendo $\{x^k\}_k$ um sistema de coordenadas locais, i.e., $x^k = \phi^k(p), p \in M$, consideremos um difeomorfismo de mudança de coordenadas (mediante mapas de transição) $\{x^k\}_k \rightarrow \{s^l\}_l$, i.e., com $s^l = \chi^l(x^i), 1 \leq k \leq m$ (onde χ é um difeomorfismo entre abertos de \mathbb{R}^m).

♣ Recordemos a definição do diferencial em Cartesiano: seja $w = \sum_l w^l_{\text{Cart.}} e_l$, logo $dx^l[w] = w^l_{\text{Cart.}}$. Em coordenadas curvilíneas, temos $w = \sum_l w^l g_l$ com o elemento da base móvel $g_l = \frac{\partial \Phi}{\partial s^l}$ ($\Phi = \phi^{-1}$), logo $ds^i[w] = w^i$. Em particular, $ds^i[g_j] = \delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e 0 senão. Portanto $ds^i[g_j] = g^i \cdot g_j$ e por linearidade, $ds^i[w] = g^i \cdot w$. Notemos que em Cartesiano, $x = \sum_l x^l e_l = \Phi$.

♣ Observemos então que $\Gamma_{nk}^i = g^i \cdot \partial_n g_k = ds^i[\partial_n g_k] = \sum_l \frac{\partial s^i}{\partial x^l} dx^l[\partial_n g_k] = \sum_l \frac{\partial s^i}{\partial x^l} dx^l \left[\frac{\partial}{\partial s^n} \frac{\partial x}{\partial s^k} \right] = \sum_l \frac{\partial^2 x^l}{\partial s^n \partial s^k} \frac{\partial s^i}{\partial x^l} (\bullet)$.

Conexão -2-

Lema.

Sejam $\{x^i\}_i$ um sistema de coordenadas Cartesianas, e $\{s^j\}_j$ um sistema de coordenadas curvilíneas. Então os símbolos de Christoffel verificam

$$\Gamma_{nk}^i = - \sum_{m,l} \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^l}{\partial s^n} \frac{\partial x^m}{\partial s^k}.$$

DEM. Sendo que $0 = \frac{\partial}{\partial s^n} \delta_{ij} = \frac{\partial}{\partial s^n} \left(\frac{\partial s^i}{\partial s^k} \right) = \frac{\partial}{\partial s^n} \left(\sum_l \frac{\partial s^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial s^k} \right) = \sum_l \frac{\partial^2 x^l}{\partial s^n \partial s^k} \frac{\partial s^i}{\partial x^l} + \sum_{m,l} \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial s^n} \frac{\partial x^l}{\partial s^k}$, temos (permutando os índices m e l) $\sum_l \frac{\partial^2 x^l}{\partial s^n \partial s^k} \frac{\partial s^i}{\partial x^l} = - \sum_{m,l} \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^m \partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial s^n} \frac{\partial x^m}{\partial s^k}$. A tese segue de (•). QED.

♣ Seja $\{(s')^p\}_p = \{s^{p'}\}_{p'}$ um outro sistema de coordenadas locais curvilíneas, e notemos $s^{p'} = (s')^p$

♣ Queremos averiguar como se transformem os símbolos perante uma mudança de variável.

Conexão -3-

Lema. Lei de transformação

Os símbolos Γ_{pq}^k se transformam após mudança de base $\{s^p\}_k \rightarrow \{s^{p'}\}_{p'}$ como

$$\Gamma_{n'k'}^{i'} = \sum_i \frac{\partial s^{i'}}{\partial s^i} \left(\sum_{k,n} \Gamma_{nk}^i \frac{\partial s^n}{\partial s^{n'}} \frac{\partial s^k}{\partial s^{k'}} + \frac{\partial^2 s^i}{\partial s^{n'} \partial s^{k'}} \right). \quad (**)$$

DEM. Pelo lema, $\sum_{k,n} \Gamma_{nk}^i \frac{\partial s^n}{\partial s^{n'}} \frac{\partial s^k}{\partial s^{k'}} =$
 $-\sum_{k,l,m,n} \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^l}{\partial s^{n'}} \frac{\partial s^n}{\partial s^{n'}} \frac{\partial x^m}{\partial s^k} \frac{\partial s^k}{\partial s^{k'}} = -\sum_{l,m} \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^l}{\partial s^{n'}} \frac{\partial x^m}{\partial s^{k'}}.$ Pela

identidade $\frac{\partial^2 s^i}{\partial s^{n'} \partial s^{k'}} = \frac{\partial}{\partial s^{n'}} \left(\sum_m \frac{\partial s^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial s^{k'}} \right) =$

$\sum_m \frac{\partial s^i}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial s^{n'} \partial s^{k'}} + \sum_{l,m} \frac{\partial x^l}{\partial s^{n'}} \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial s^{k'}}.$ vem

$\sum_{k,n} \Gamma_{nk}^i \frac{\partial s^n}{\partial s^{n'}} \frac{\partial s^k}{\partial s^{k'}} = \sum_{l,m} \frac{\partial s^i}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial s^{n'} \partial s^{k'}} - \frac{\partial^2 s^i}{\partial s^{n'} \partial s^{k'}}.$ Logo,

multiplicando por $\frac{\partial s^{i'}}{\partial s^i}$ obtemos por (•) $\Gamma_{n'k'}^{i'} =$

$\sum_{l,m} \frac{\partial s^{i'}}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial s^{n'} \partial s^{k'}} = \sum_i \frac{\partial s^{i'}}{\partial s^i} \left(\sum_{k,n} \Gamma_{nk}^i \frac{\partial s^n}{\partial s^{n'}} \frac{\partial s^k}{\partial s^{k'}} + \frac{\partial^2 s^i}{\partial s^{n'} \partial s^{k'}} \right).$ QED.

Conexão -4-

Conexão

Uma conexão geométrica é uma família de funções Γ_{pq}^k que se transformam conforme a lei $(\star\star)$ sob qualquer mudança de base local por difeomorfismos. A mesma é independente da métrica escolhida, logo é um conceito distinto da métrica.

Vetor, co-vetor e tensor

Seja $\{g_i\}_i$ uma base local da variedade Riemanniana \mathcal{M} . Já vimos que um vetor (i.e., com componentes contravariantes) w é um elemento do plano tangente que se escreve em componentes $w = \sum_i w^i g_i$. Agora, um co-vetor (i.e., com componentes covariantes) é um elemento do dual do plano tangente, i.e., escreve-se em componentes como $\omega = \sum_i \omega_i g^i$ com $\{g^i\}_i$ a base dual local. Um co-vetor corresponde a um diferencial pois que $g^i(p)[w] = g^i(p)[\sum_j w^j g_j] = w^i = dx^i[w]$.

Conexão -5-

Enfim um tensor de ordem N é uma família de componentes $U_{i,\dots,p}$ com N índices junto com uma base tensorial com N vetores de base contra- ou covariantes, g_i, \dots, g^p , tal que o tensor se exprime

$$U = \sum_{i,\dots,p}^N U^{i\dots p} g_i \otimes \dots \otimes g^p.$$

Um tensor $U(m; n)$ é de ordem $(m; n)$ e de rank $N = m + n$ se tiver m índices (ou elementos da base do plano tangente) contravariantes e n covariantes (ou elementos da base do plano tangente dual). Notemos suas componentes como $U_{(\alpha)}^{(i)}$.

Derivação covariante

Uma operação de derivação covariante (= conexão diferencial) significa a escolha de uma conexão Γ_{pq}^k e de um operador diferencial linear \mathcal{L}_k sob tensores de ordem qualquer que satisfaça:

- (i) Se f é um campo escalar diferenciável: $\mathcal{L}_k f = \frac{\partial f}{\partial s^k}$,

Conexão -6-

(ii) • Se w é um vetor:

$$\mathcal{L}_k w^i = \nabla_k^\Gamma w^i = (\nabla_k^\Gamma w)^i = \partial_k w^i + \sum_{l=1}^m w^l \Gamma_{lk}^i,$$

• Se ω é um co-vetor:

$$\mathcal{L}_k \omega_i = \nabla_k^\Gamma \omega_i = (\nabla_k^\Gamma \omega)_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial s^k} - \sum_{l=1}^m \omega_l \Gamma_{ik}^l$$

(iii) Se U e V são tensores de ordem quaisquer então

$$\mathcal{L}_k(U \otimes V) = \mathcal{L}_k U \otimes V + U \otimes \mathcal{L}_k V \text{ (Regra de Leibniz).}$$

♣ A conexão diferencial permite comparar (infinitesimalmente via a derivação) vetores que não pertencem ao mesmo plano tangente, pois o mesmo muda em cada p . Podemos escrever $\mathcal{L}_k = \nabla_k^\Gamma$.

Simbolos de Christoffel: definições alternativas

• Tome $w = g_i = \sum_j (g_i)^j g_j = \sum_j \delta_i^j g_j$ com $\delta_i^j = \delta_{ij}$ componente por componente. Sendo que $\partial_k w := \sum_j (\nabla_k^\Gamma w^j) g_j$, temos $\partial_k g_i := \sum_j \nabla_k^\Gamma (g_i)^j g_j = \sum_j \nabla_k^\Gamma (\delta_i^j) g_j = \sum_{j,n} \delta_i^n \Gamma_{nk}^j g_j = \sum_j \Gamma_{ik}^j g_j$ (■) (o índice j é contravariante). Portanto $\Gamma_{ik}^l = (:=)(\partial_k g_i) \cdot g^l$.

Conexão 7

• Tome $\omega = g^i = \sum_j (g^i)_j g^j = \sum_j \delta_j^i g^j$. Logo, $\partial_k g^i = \sum_j \nabla_k^\Gamma (g^i)_j g^j = \sum_j \nabla_k^\Gamma (\delta_j^i) g^j = - \sum_j \delta_n^i \Gamma_{jk}^n g^j = - \sum_j \Gamma_{jk}^i g^j$ (■) (o índice j é covariante). Portanto $\Gamma_{lk}^i = (:=) - \partial_k g^i \cdot g_l$.

Torsão da conexão

A torsão da conexão Γ é definida como $T_{kj}^i := \Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^i$.

Derivada covariante direcional

Seja $\mathcal{L}_k = \nabla_k^\Gamma$ uma conexão diferencial e seja ξ um campo vetorial. A derivada covariante na direcção ξ é definida como $\nabla_\xi^\Gamma := \sum_k \xi_k \nabla_k^\Gamma$. Assim, para $w = \sum_i w^i g_i$, vem $\nabla_\xi^\Gamma w = \sum_{k,i} (\xi_k \nabla_k^\Gamma w^i) g_i$.

Transporto paralelo (com respeito a uma conexão)

Dada uma conexão, i.e., $(\star\star)$, um tensor U é covariantemente

Conexão -8-

constante ou paralelo longo uma curva γ se $\nabla_{\dot{\gamma}} U = \sum_k \dot{\gamma}_k \nabla_k^\Gamma U$
 $= \sum_k \dot{\gamma}_k \left(\frac{\partial}{\partial s^k} U_{(\alpha)}^{(i)} + U_{(\alpha)}^{(i)} \nabla_k^\Gamma (\hat{g}^{(i)} \otimes ds^{(\alpha)}) \right) = 0.$

Logo, sempre que a geometria é não- Euclidiana, paralelo não significa ter as componente constantes (i.e., $\frac{\partial}{\partial s^k} U_{(\alpha)}^{(i)} = 0$).

Geodésica (com respeito a uma conexão)

Dada uma conexão, uma curva diferenciável γ numa variedade é uma geodésica se $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$.

♣ Salientamos o facto de que o transporte paralelo e a noção de geodésica são conceitos meramente ligados à conexão e não a métrica, exceto se a métrica for compatível com a conexão.

♣ Seja $U = \sum_{i, \dots, p}^N U_{\dots p}^{i \dots} g_i \otimes \dots \otimes g^p$ um tensor de ordem $(m; n)$.
 Pela definição de conexão diferencial temos

Conexão -9-

$$\nabla U = \sum_{i, \dots, p}^N (\partial_k U^{i \dots p}) g_i \otimes \dots \otimes g^p + \sum_{i, \dots, p}^N U^{i \dots p} \mathcal{L}_k (g_i \otimes \dots \otimes g^p).$$

Gradient de um tensor

O gradiente do tensor U de rank N e ordem $(m; n)$ é definido como o tensor de rank $N + 1$ e ordem $(m + 1; n)$

$$\nabla U := \sum_{i, \dots, p}^N (\nabla_k^\Gamma U^{i \dots p}) g_i \otimes \dots \otimes g^p \otimes g^k = \sum_k \mathcal{L}_k U g^k$$

♣ O gradiente do vetor $w = \sum_j w^j g_j$ é $\nabla w = \sum_{j,k} (\nabla_k^\Gamma w^j) g_j \otimes g^k$. Definimos a componente k do gradiente, $\nabla_k^\Gamma w$, como $\nabla w = \sum_k (\nabla_k^\Gamma w) g_k$, i.e. $\nabla_k^\Gamma w = \mathcal{L}_k w = \sum_{j,k} \mathcal{L}_k w^j g_j \otimes g^k$ (Δ).

♣ Nos cálculos a seguir, para maior concisão, consideremos a convenção seguinte: quando dois índices são repetidos, significa que existe uma soma neste índice. Assim, $A_{ijk} b_j = \sum_j A_{ijk} b_j$, etc.

Conexão -10-

Lema. Sentido geometrico da torsão

Temos $\nabla_k^\Gamma g_l := \Gamma_{lk}^j g_j := \partial_k g_l$. Logo, $\nabla_k^\Gamma g_l - \nabla_l^\Gamma g_k = T_{lk}^j g_j$.

DEM. Temos $\nabla^\Gamma w = (\nabla_k^\Gamma w) g^k = (\nabla_k^\Gamma (w^j g_j)) g^k$. Pelas condições (i) e (iii) vem $\nabla^\Gamma w = \partial_k w^j g_j \otimes g^k + w^j (\mathcal{L}_k g_j) g^k = \partial_k w^j g_j \otimes g^k + w^j (\mathcal{L}_k g_j)^l g_l \otimes g^k = \partial_k w^j g_j \otimes g^k + w^l (\mathcal{L}_k g_l)^j g_j \otimes g^k$. D'outro lado, pela definição de derivada covariante de um vetor (condição (ii)) temos $\nabla^\Gamma w = (\nabla_k^\Gamma w^j) g_j \otimes g^k = (\partial_k w^j + \Gamma_{lk}^j w^l) g_j \otimes g^k$. Identificando os termos, temos $\Gamma_{lk}^j = (\mathcal{L}_k g_l)^j$, ou seja, por (Δ) , saí $\nabla_k^\Gamma g_l = \mathcal{L}_k g_l = (\mathcal{L}_k g_l)^j g_j = \Gamma_{lk}^j g_j$. Mas, pela expressão intrínseca da conexão, $\Gamma_{lk}^j = \partial_k g_l \cdot g^j$, logo $\nabla_k^\Gamma g_l = (\partial_k g_l \cdot g^j) g_j = \partial_k g_l$. A última afirmação segue da definição de torsão. QED.

Teorema: derivada covariante de um tensor de ordem $2 - 0$

Seja $U = U^{ij} g_i \otimes g_j$. Então $\nabla U = \mathcal{L}_k U \otimes g^k$

Conexão -11-

$$\mathcal{L}_k U = \nabla_k^\Gamma U = \left(\frac{\partial U_{ij}}{\partial s^k} + \Gamma_{lk}^i U^{lj} + \Gamma_{lk}^j U^{il} \right) g_i \otimes g_j.$$

DEM. Pela (iii) $\mathcal{L}_k U = \mathcal{L}_k(U^{ij} g_i) \otimes g_j + U^{ij} g_i \otimes \mathcal{L}_k g_j$. Pelas (i), (iii) e a linearidade, $\mathcal{L}_k U = \frac{\partial U_{ij}}{\partial s^k} g_i \otimes g_j + U^{ij} \mathcal{L}_k g_i \otimes g_j + U^{ij} g_i \otimes \mathcal{L}_k g_j$. Pela (ii) e (■), e apos mudança de nome dos índices, vem $\mathcal{L}_k U = \left(\frac{\partial U^{ij}}{\partial s^k} + \sum_l U^{lj} \Gamma_{lk}^i + \sum_l U^{il} \Gamma_{lk}^j \right) g_i \otimes g_j$. QED.

♣ Analogamente, a derivada covariante do tensor (0; 2),

$$U = \sum_{i,j} U_{ij} g^i \otimes g^j \text{ é } \nabla_k^\Gamma U_{ij} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial s^k} - \sum_l \Gamma_{ik}^l U_{lj} - \sum_l \Gamma_{jk}^l U_{il} \text{ (▲)}.$$

Além de mais, a derivada covariante do tensor (1; 1),

$$U = \sum_{i,k} U_k^i g_i \otimes g^k \text{ é } \nabla_l^\Gamma U_k^i = \frac{\partial U_k^i}{\partial s^l} + \sum_p \Gamma_{pl}^i U_k^p - \sum_p \Gamma_{kl}^p U_p^i \text{ (▲▲)}.$$

Conexão compatível com a métrica

Uma conexão Γ é compatível com a métrica se $\nabla^\Gamma g = 0$, i.e.

$$\nabla_k^\Gamma g_{ij} = 0.$$

Conexão de Levi-Civita

Teorema: Conexão de Levi-Civita

Seja uma métrica g_{ij} não singular. Então existe uma única conexão simétrica compatível com a métrica g_{ij} . A mesma é dada por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

DEM. Seja $\Gamma_{k;ij} := g_{kl}\Gamma_{ij}^l$. Pela compatibilidade da conexão (cf.

(▲)), $0 = \nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial s^k} - \Gamma_{ik}^l g_{lj} - \Gamma_{jk}^l g_{il}$, logo $\frac{\partial g_{ij}}{\partial s^k} = \Gamma_{j;ik} +$

$\Gamma_{i;jk}(A)$. Permutando os índices, $\frac{\partial g_{jk}}{\partial s^i} = \Gamma_{k;ji} + \Gamma_{j;ki}(B)$ e

$\frac{\partial g_{ik}}{\partial s^j} = \Gamma_{i;kj} + \Gamma_{k;ij}(C)$. Efetuando $(B) + (C) - (A)$ e sendo a

conexão simétrica, i.e., $\Gamma_{k;ij} = \Gamma_{k;ji}$, obtemos $2\Gamma_{l;ij} = \partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}$. Multiplicando por $\frac{1}{2}g^{kl}$, segue o resultado. QED.

♣ Continua a valer a propriedade vista na parte A que uma conexão compatível com a métrica preserva o produto interno entre dois vetores transportados paralelamente.

Lema. Conservação do produto interno

Sejam ξ, η dois campos vetoriais transportados paralelamente ao longo da curva γ . Então $\frac{d}{dt}(\xi, \eta)_g = 0$.

DEM. $\frac{d}{dt}(\xi, \eta)_g = \dot{\gamma}_k \partial_k (g_{ij} \xi^i \eta^j) = \dot{\gamma}_k \nabla_k^\Gamma (g_{ij} \xi^i \eta^j) = g_{ij} \dot{\gamma}_k \nabla_k^\Gamma (\xi^i \eta^j) = g_{ij} (\eta^j \dot{\gamma}_k \nabla_k^\Gamma \xi^i + \xi^j \dot{\gamma}_k \nabla_k^\Gamma \eta^i) = 0 + 0 = 0$. QED.

Conexão Euclidiana (ou afim)

Uma conexão Γ é afim em p se existe um sistema de coordenadas $\{x_k\}$ no qual $\Gamma = 0$ uma vizinhança de p . Neste caso $\nabla_k^\Gamma = \frac{\partial}{\partial x^k}$. Neste caso, pelo Lema de Schwarz, temos comutação das derivadas covariantes, i.e., $\nabla_k^\Gamma \nabla_l^\Gamma - \nabla_l^\Gamma \nabla_k^\Gamma = \partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k = 0$.

♣ A questão que nos colocamos agora é de quantificar a falta de comutação das mesmas no caso de uma conexão geral (i.e., não Euclidiana). Seja o vetor $w = w^i g_i (= \sum_i w^i g_i)$. Pela condição (ii) da definição de derivação covariante, temos $U_k^i := \nabla_k^\Gamma w^i = \partial_k w^i + \Gamma_{lk}^i w^l$. Pela fórmula (▲▲) vem

Curvatura de Riemann -1-

$$\nabla_l^\Gamma U_k^i = \nabla_l^\Gamma \nabla_k^\Gamma w^i = \nabla_l^\Gamma \left(\partial_k w^i + \Gamma_{qk}^i w^q \right) = \frac{\partial}{\partial s^l} \left(\partial_k w^i + \Gamma_{qk}^i w^q \right) + \Gamma_{pl}^i \left(\partial_k w^p + \Gamma_{qk}^p w^q \right) - \Gamma_{kl}^p \left(\partial_p w^i + \Gamma_{qp}^i w^q \right).$$

Expandendo vem

$$\nabla_l^\Gamma \nabla_k^\Gamma w^i = \frac{\partial^2 w^i}{\partial s^l \partial s^k} + \Gamma_{qk}^i \partial_l w^q + \Gamma_{pl}^i \partial_k w^p + \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial s^l} w^q - \Gamma_{kl}^p \partial_p w^i + \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p w^q - \Gamma_{kl}^p \Gamma_{qp}^i w^q = \left(\frac{\partial^2 w^i}{\partial s^l \partial s^k} + \Gamma_{qk}^i \partial_l w^q + \Gamma_{pl}^i \partial_k w^p \right) + \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial s^l} w^q + \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p w^q - \Gamma_{kl}^p \left(\partial_p w^i + \Gamma_{qp}^i w^q \right).$$

Logo, invertindo os índices k e l e substraíndo, os 3 primeiros termos cancelam-se por ser simétricos, e saí

$$\nabla_l^\Gamma \nabla_k^\Gamma w^i - \nabla_k^\Gamma \nabla_l^\Gamma w^i = \left(\frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial s^l} - \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial s^k} + \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p - \Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p \right) w^q - \left(\Gamma_{kl}^p - \Gamma_{lk}^p \right) \left(\partial_p w^i + \Gamma_{qp}^i w^q \right).$$

Logo obtê-se

$$\nabla_l^\Gamma \nabla_k^\Gamma w^i - \nabla_k^\Gamma \nabla_l^\Gamma w^i = T_{lk}^p \nabla_p^\Gamma w^i + R_{qlk}^i w^q,$$

e vê-se que a falta de comutação das derivadas covariantes é devida (i) a torsão da conexão T_{lk}^p , e (ii) a curvatura de Riemann:

Curvatura de Riemann -2-

Curvatura de Riemann

$$R_{qlk}^i := \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial s^l} - \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial s^k} + \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p - \Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p \quad (\diamond)$$

♣ Se consideremos uma conexão simétrica, logo a torsão é evanescente e obtê-se a fórmula clássica que define a curvatura de Riemann (com soma em q) como aplicação do plano tangente de \mathcal{M} em p , com \mathcal{M} de dimensão m :

$$\nabla_{[l}^{\Gamma} \nabla_{k]}^{\Gamma} w^i := \nabla_l^{\Gamma} \nabla_k^{\Gamma} w^i - \nabla_k^{\Gamma} \nabla_l^{\Gamma} w^i = R_{qlk}^i w^q, \forall w = w^i g_i \in T_p \mathcal{M}. \quad (\spadesuit)$$

♣ A curvatura de Riemann é um tensor com m^4 componentes. Existem variantes do mesmo definidas como por exemplo a curvatura full-covariante $R_{iqkl} = g_{ij} R_{qkl}^j$ (com soma em j).

♣ A prova do resultado seguinte é evidente por contraposição e a definição (\diamond).

Curvatura de Riemann -3-

Lema

Se $R_{qkl}^i \neq 0$ então

- ▶ a conexão não é Euclidiana;
- ▶ não ha comutação das derivadas segundas covariantes.

Teorema. Antisimetria e identidade de Bianchi

Temos sempre

- (a) $R_{qkl}^i = -R_{qlk}^i$
- (b) Se a conexão for simetrica, então $R_{qkl}^i + R_{lqk}^i + R_{klq}^i = 0$

DEM. (i) é evidente; (ii) pela linearidades podemos tomar

$w = g_p = (g_p)^i g_i = \sum_i (g_p)^i g_i$. Por (♠) temos $(\nabla_l^\Gamma \nabla_k^\Gamma - \nabla_k^\Gamma \nabla_l^\Gamma)(g_p)^i = R_{qlk}^i (g_p)^q = R_{qlk}^i \delta_{pq} = -R_{pkl}^i$, logo $(\nabla_l^\Gamma \nabla_k^\Gamma - \nabla_k^\Gamma \nabla_l^\Gamma)g_p = (\nabla_l^\Gamma \nabla_k^\Gamma - \nabla_k^\Gamma \nabla_l^\Gamma)(g_p)^i g_i = -R_{plk}^i g_i$. É suficiente

Curvatura de Riemann -4-

mostrar que $-R_{plk}^i g_i - R_{kpl}^i g_i - R_{lkp}^i g_i = 0, \forall g_i$ na base movél.

Mas, $-R_{plk}^i g_i - R_{kpl}^i g_i - R_{lkp}^i g_i = \nabla_l^\Gamma (\nabla_k^\Gamma g_p - \nabla_p^\Gamma g_k) + \nabla_k^\Gamma (\nabla_p^\Gamma g_l - \nabla_l^\Gamma g_p) + \nabla_p^\Gamma (\nabla_l^\Gamma g_k - \nabla_k^\Gamma g_l)$. Pelo Lema, a tese segue de sermos sem torsão: $\nabla_k^\Gamma g_p - \nabla_p^\Gamma g_k = \Gamma_{pk}^j g_j - \Gamma_{kp}^j g_j = 0$ (igual para os dois outros termos) já que a conexão é sem torsão. QED.

♣ Este identidade é conhecida pelo nome de identidade de Bianchi.

♣ O resultado seguinte são identidades importantes nas aplicações. Apenas demonstramos a primeira.

Lema.

Para conexões de Levi-Civita temos

$$(c) R_{jqkl} = -R_{qjkl}$$

$$(d) R_{iqkl} = R_{kliq}$$

Curvatura de Riemann -5-

DEM. (de (c)) Seja um vetor w . Calculemos o seguinte produto interno, por (\spadesuit), $(\nabla_{[l}^{\Gamma} \nabla_{k]}^{\Gamma} w, w)_g = (\nabla_l^{\Gamma} \nabla_k^{\Gamma} w^i - \nabla_k^{\Gamma} \nabla_l^{\Gamma} w^i) g_{ij} w^j = g_{ij} R_{qlk}^i w^q w^j = R_{jqlk} w^q w^j$. A tese segue se mostramos que $(\nabla_{[l}^{\Gamma} \nabla_{k]}^{\Gamma} w) = 0, \forall w$, pois que invertindo os índices j e q , vem $R_{jqlk} w^q w^j = R_{qjlk} w^j w^q = R_{qjlk} w^q w^j$, logo $(\nabla_{[l}^{\Gamma} \nabla_{k]}^{\Gamma} w) = \frac{1}{2} (R_{jqlk} - R_{qjlk}) w^q w^j = 0, \forall w \Rightarrow (R_{jqlk} - R_{qjlk}) = 0$. Com efeito, pela propriedade (i) da definição de conexão diferencial e a conexão ser compatível com a métrica, vem $\partial_k \partial_l (w, w)_g = \nabla_k^{\Gamma} \nabla_l^{\Gamma} g_{ij} w^i w^j = g_{ij} \nabla_k^{\Gamma} \nabla_l^{\Gamma} (w^i w^j) = 2 ((\nabla_k^{\Gamma} \nabla_l^{\Gamma} w, w)_g + (\nabla_k^{\Gamma} w, \nabla_l^{\Gamma} w)_g)$. Similarmente, invertendo o papel de k e l , obtemos $\partial_l \partial_k (w, w)_g = 2 ((\nabla_l^{\Gamma} \nabla_k^{\Gamma} w, w)_g + (\nabla_l^{\Gamma} w, \nabla_k^{\Gamma} w)_g)$. Logo substraindo as duas identidades, pelo Lema de Schwarz, $(\nabla_{[l}^{\Gamma} \nabla_{k]}^{\Gamma} w, w)_g = 0$ para todos os campos vetoriais $w \in \mathcal{C}^2(T_p S; \mathbb{R}^m)$. QED.

Curvatura de Riemann -6-

Comutador

Sejam dois campos vetoriais ξ, η . Então constrói-se um terceiro campo $\sigma = [\xi, \eta]$ como $[\xi, \eta] := (\nabla_{\xi}^{\Gamma} \eta^i - \nabla_{\eta}^{\Gamma} \xi^i) g_i$. Este campo é chamado o comutador de ξ e η . Para além, o operador diferencial comutador é definido como $\nabla_{[\xi, \eta]}^{\Gamma} = \nabla_{\xi}^{\Gamma} \nabla_{\eta}^{\Gamma} - \nabla_{\eta}^{\Gamma} \nabla_{\xi}^{\Gamma}$.

Lema. Outra definição da torsão e da curvatura

Sejam três campos vetoriais ξ, η, ζ . Então (i) a curvatura de Riemann é o operador trilinear $R[\xi, \eta]\zeta := R_{jkl}^i \xi^k \eta^l \zeta^j =$

$\nabla_{[\xi, \eta]}^{\Gamma} \zeta + \nabla_{[\xi, \eta]}^{\Gamma} \zeta$; (ii) a torsão é o operador bilinear

$T[\xi, \eta] := T_{jk}^i \xi^j \eta^k = [\xi, \eta] - (\nabla_{\xi}^{\Gamma} \eta - \nabla_{\eta}^{\Gamma} \xi)$

DEM (de (ii)) Temos $\nabla_{\xi}^{\Gamma} \eta - \nabla_{\eta}^{\Gamma} \xi = \xi^k \nabla_k^{\Gamma} (\eta^j g_j) - \eta_k \nabla_k^{\Gamma} (\xi^j g_j) = \xi^k (g_j \nabla_k^{\Gamma} \eta^j + \eta^j \nabla_k^{\Gamma} g_j) - \eta^k (g_j \nabla_k^{\Gamma} \xi^j + \xi^j \nabla_k^{\Gamma} g_j)$. Pelo Lema acima, $\nabla_{\xi}^{\Gamma} \eta - \nabla_{\eta}^{\Gamma} \xi = g_j (\nabla_{\xi}^{\Gamma} \eta^j - \nabla_{\eta}^{\Gamma} \xi^j) + \xi^j \eta^k \nabla_j^{\Gamma} g_k - \eta^k \xi^j \nabla_k^{\Gamma} g_j$. QED.

Aplicação a $m = 2$ e às superfícies de \mathbb{R}^3

♣ No caso $m = 2$ o tensor de curvatura de Riemann é R_{ijkl} com $i, j, k, l \in \{1, 2\}$. Pelas condições (a) e (c) temos $R_{11kl} = R_{22kl} = R_{kl11} = R_{kl22} = 0, \forall k, l$, sendo que a unica componente não evanescente é $R_{1212} = R_{2121}$.

♣ Consideremos uma superfície regular S de \mathbb{R}^3 . Sabemos que localmente, em $p \in S$ pode ser representada pelo gráfico de uma função $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$, sendo que o eixo dos $z = x_3$ é perpendicular ao plano tangente em p ; por convenção pomos p como origem do plano tangente, logo vem $f(0) = \partial_i f(0) = 0$. Além de mais, a metrica induzida em p escreve-se como $g_{ij} = \delta_{ij}$ e $\partial_i p \cdot \partial_j p = (e_i + \partial_i f e_3) \cdot (e_j + \partial_j f e_3) = \delta_{ij} + \partial_i f \partial_j f$. Então vem $g_{ij}(0) = \partial_k g_{ij}(0) = 0$. Por consequência, pelo teorema de Levi-Civita a unica conexão compatível com a metrica e simetrica satisfaz $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$. Logo, $R_{qk}^i(0) = \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial x^l}(0) - \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k}(0)$, e

$$R_{iqkl}(0) = g_{ij}R_{qkl}^j(0) = \frac{\partial(g_{ij}\Gamma_{qk}^j)}{\partial x^l}(0) - \frac{\partial(g_{ij}\Gamma_{ql}^j)}{\partial x^k}(0) - \partial_l g_{ij}(0) \\ \Gamma_{qk}^j(0) + \partial_k g_{ij}(0)\Gamma_{ql}^j(0) = \frac{\partial\Gamma_{iqk}}{\partial x^l}(0) - \frac{\partial\Gamma_{iqk}}{\partial x^k}(0) \ (\diamond), \text{ onde, sendo} \\ \text{que } g_{km}g^{ml} = \delta_{kl}, \text{ temos } \Gamma_{kij} = \frac{1}{2}g_{km}g^{ml}(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) = \\ \frac{1}{2}(\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \ (\diamond\diamond).$$

Teorema Egregium de Gauss

A curvatura de Gauss de uma superfície S escreve-se como $K = R_{1212} = R_{2121}$. Logo é uma grandeza intrínseca.

DEM. Sendo que $m = 2$ os índices i, j, k, l tem valores em $\{1, 2\}$ e a unica entrada do tensor de curvatura é R_{1212} . Consideremos localmente a superfície como um gráfico, logo por (\diamond) e $(\diamond\diamond)$ vem $R_{iqkl}(0) = \frac{1}{2}(\partial_k(\partial_q g_{il} + \partial_l g_{qi} - \partial_i g_{ql}) - \partial_l(\partial_q g_{ik} + \partial_k g_{qi} - \partial_i g_{qk}))(0)$. Particularizando, obtemos $R_{1212}(0) = \frac{1}{2}\partial_1(\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22})(0) - \frac{1}{2}\partial_2(\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{21} - \partial_1 g_{21})(0) = \frac{1}{2}(-\partial_2^2 g_{11} - \partial_1^2 g_{22})(0) + \partial_{12}^2 g_{12}(0)$. Mas, sendo que $\nabla f(0) = 0$ vem $\partial_2^2 g_{11}(0) = \partial_2^2(\partial_1 f)^2(0) = 2\partial_2(\partial_1 f \partial_{21}^2 f)(0) = 2(\partial_{21}^2 f(0))^2$. Da mesma forma

saí $\partial_1^2 g_{22}(0) = 2 (\partial_{21}^2 f(0))^2$ e $\partial_{12}^2 g_{12}(0) = \partial_{11}^2 f(0) \partial_{22}^2 f(0) + (\partial_{21}^2 f(0))^2$. Então $R_{1212}(0) = (\partial_{11}^2 f(0) \partial_{22}^2 f(0) - \partial_{21}^2 f(0))^2 = \det \begin{pmatrix} \partial_{11}^2 f & \partial_{12}^2 f \\ \partial_{21}^2 f & \partial_{22}^2 f \end{pmatrix} (0) = \frac{\det \mathbb{I}_2(0)}{(\det \mathbb{I}_1(0))^2} = K(p)$, já que $\det g(p) = \det \mathbb{I}_1(0) = 1$ (cf. Exercício 10, série 4). É intrínseca pois que a curvatura simétrica e compatível só depende da métrica. QED.

Curvatura de Ricci e curvatura escalar

A curvatura de Ricci é o traço da Curvatura de Riemann, i.e., $R_{ij} := R_{ikj}^k$. A curvatura escalar é definida como o produto do tensor de Ricci com a métrica inversa, i.e., $R = R_{ij} g^{ij}$.

Lema. Curvaturas escalar e de Gauss

Seja \mathcal{M} de dimensão dois. Temos $R = 2K$ em cada ponto de \mathcal{M} .

DEM. Temos $R = g^{ij} R_{ikj}^k = g^{ij} g^{kl} R_{likj}$. As únicas entradas não nulas são $R_{1212} = K = R_{2121}$ e $R_{1221} = -K = R_{2112}$, donde $R = 2(g^{11} g^{22} - g^{12} g^{21})K = 2 \det g^{-1} K$. Mas $\det g = 1$ em p , logo $R = 2K$ neste sistema de coordenadas, então em todos. QED.

♣ Definimos as variedades diferenciáveis e Riemannianas, como um ambiente de trabalho intrínseco munido de uma estrutura linear via os planos tangentes e difeomorfas ao espaço euclidiano (de dimensão superior) mediante os teoremas de Whitney-Nash. As mesmas podem ser mais ou menos regulares conforme a escolha de uma família de mapas de transição. Além do mais, existe uma noção de métrica, i.e., de medições de comprimentos e ângulos entre vetores tangentes. O ecossistema completo consiste nas variedades completadas com os seres que vivem nela, nomeadamente as **formas diferenciais**. A geometria diferencial consiste em resultados que associam formas diferenciais em variedade diferenciáveis com as operações de derivação (i.e., o cálculo exterior) e de integração (generalizando a integração no sentido de Lebesgue). O primeiro resultado importante que alia integração e diferenciação é o teorema de Stokes que veremos no final das aulas. O mesmo é provavelmente o resultado mais importante em Análise Matemática.

(Grassman) algebra dos m -vetores em $\mathcal{M} = \mathbb{R}^N$

1. Definimos uma **classe de equivalência** \sim sobre $(\mathbb{R}^N)^m$ tal que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, 1 \leq i, j \leq m$ temos

$$(a) \quad (u_1, \dots, \alpha u_i, \dots, u_j, \dots, u_m) \sim (u_1, \dots, u_i, \dots, \alpha u_j, \dots, u_m)$$

$$(b) \quad (u_1, \dots, u_i + \alpha u_j, \dots, u_j, \dots, u_m) \sim (u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_m)$$

$$(c) \quad (u_1, \dots, -u_j, \dots, u_i, \dots, u_m) \sim (u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_m)$$

Temos também $u \sim v \iff v \sim u$ e $u \sim v, v \sim w \Rightarrow u \sim w$.

2. Um **simplex m -vector** é definido como um elemento do espaço quociente $u_1 \wedge \dots \wedge u_m \in (\mathbb{R}^N)^m / \sim$
3. O **espaço dos m -vetores em \mathbb{R}^N** é definido como o espaço vetorial $\Lambda_m(\mathbb{R}^N)$ das combinações lineares de simplex m -vetores munido da relação de equivalência

$$(A) \quad \alpha(u_1 \wedge \dots \wedge u_m) \equiv (\alpha u_1) \wedge \dots \wedge u_m$$

$$(B) \quad u_1 \wedge \dots \wedge u_m + \tilde{u}_1 \wedge \dots \wedge u_m \equiv (u_1 + \tilde{u}_1) \wedge \dots \wedge u_m$$

(Grassman) algebra dos m -vetores

♣ A operação $u \wedge v$ é chamado " u (produto) **wedge** com v ".

♣ Seja u_1, \dots, u_m mutualmente dependentes. Logo

$\forall i, \exists \alpha_j^{(i)} : 0 = u_i - \sum_{1=j \neq i}^m \alpha_j^{(i)} u_j$. Pelo (b) e pelo (A) temos $u_1 \wedge \dots \wedge u_m \sim 0$. Em particular se $m > N$, $u_1 \wedge \dots \wedge u_m \sim 0$.

♣ Exemplo: o 2-vetor $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \in \Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ não é simples.

Algebra exterior dos vetores

Seja $\Lambda_m(\mathbb{R}^N)$ o espaço vetorial dos m -vetores em \mathbb{R}^N . Definimos a **algebra exterior** de \mathbb{R}^N como a soma directa

$\Lambda_*(\mathbb{R}^N) = \Lambda_1(\mathbb{R}^N) \oplus \dots \oplus \Lambda_N(\mathbb{R}^N)$ com a extensão linear da seguinte operação de concatenação entre um m - e um l -vetor:

$$(u_1 \wedge \dots \wedge u_m) \wedge (v_1 \wedge \dots \wedge v_l) = u_1 \wedge \dots \wedge u_m \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_l$$

($\in \Lambda_{m+l}(\mathbb{R}^N)$ se $m+l \leq N$, = 0 senão).

Funções m -lineares e alternantes

Função m -multilinear e alternadas

1. Uma função $\phi : (\mathbb{R}^N)^m \rightarrow \mathbb{R}$ é m -multilinear se, $\forall l$,

$$\phi(u_1, \dots, \alpha u + \beta v, \dots, u_m) =$$

$$\alpha \phi(u_1, \dots, u, \dots, u_m) + \beta \phi(u_1, \dots, v, \dots, u_m)$$
2. Uma função $\phi : (\mathbb{R}^N)^m \rightarrow \mathbb{R}$ é alternante se, $\forall i, l$,

$$\phi(u_1, \dots, u_i, \dots, u_l, \dots, u_m) =$$

$$-\phi(u_1, \dots, u_l, \dots, u_i, \dots, u_m)$$

Espaço vetorial das funções m -multilineares e alternadas

Definimos $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$ como o espaço das funções ϕ, ψ que verificam (1) e (2) e tais que $(\phi + \psi)(u) = \phi(u) + \psi(u)$ e $(\alpha\phi)(u) = \alpha\phi(u)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Os elementos de $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$ são chamados m -covetores

♣ No caso $m = 0$, $\Lambda^0(\mathbb{R}^N)$ é o espaço das funções de \mathbb{R}^N com valores reais.

♣ No caso $m = 1$, $\Lambda^1(\mathbb{R}^N) = (\mathbb{R}^N)^*$, i.e., 1-linear=linear.
Portanto $\Lambda^1(\mathbb{R}^N)$ =espaço das formas diferenciais em \mathbb{R}^N .

Produto exterior ("wedge product") e simples m -covetores

Seja m 1-formas $a_i \in \Lambda^1(\mathbb{R}^N)$, $i = 1, \dots, m$, com $m < N$, i.e.
 $\exists a_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, N$ tal que a_i escreve-se por extenso
como: $a_i = a_{i1}dx^1 + \dots + a_{iN}dx^N$, $\forall 1 \leq i \leq m$. O m -covetor
simples é definido como o produto exterior $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \in \Lambda^m(\mathbb{R}^N)$
de m 1-formas, i.e., é aplicado contro m N -uplos da forma
 $u_i = \sum_k u_i^k e_k \in \mathbb{R}^N$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq N$, da maneira seguinte:
 $a_1 \wedge \dots \wedge a_m[u_1, \dots, u_m] := \det(\langle a_i | u_j \rangle)$, $\forall (u_i, \dots, u_m) \in (\mathbb{R}^N)^m$.

♣ Definição (no caso $m = N$): os elementos de $\Lambda^N(\mathbb{R}^N)$ são
multiplos reais do determinante da matrix $U = (u_1 \dots u_N)$ ou U^T ,
sendo o determinante (definido como) a unica forma N -multilinear
alternado tal que $\det(e_1 \dots e_n) = 1$.

Dualidade m -vetor- m -covetor

♣ Ora um m -covetor é aplicado contro (i.e, "come") m -vetores e a aplicação de um co-vetor com um vetor de mesmo grau é chamada dualidade.

♣ EX 1: Por exemplo, no caso de $\Lambda^1(\mathbb{R}^2)$, vemos o que seria a dualidade vetor-covetor: seja $\omega = adx^1 + bdx^2$ e $w = ue_1 + ve_2$, logo $\langle \omega | w \rangle =$
 $\langle adx^1 + bdx^2 | ue_1 + ve_2 \rangle = \langle adx^1 | ue_1 + ve_2 \rangle + \langle bdx^2 | ue_1 + ve_2 \rangle =$
 $\langle adx^1 | ue_1 \rangle + \langle adx^1 | ve_2 \rangle + \langle bdx^2 | ue_1 \rangle + \langle bdx^2 | ve_2 \rangle = au + 0 + 0 + bv.$

♣ EX 2: No caso de $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$, a dualidade vetor-covetor exprime-se da seguinte forma (por exemplo): seja $\omega = adx^1 \wedge bdx^2$ e

$w = ue_1 \wedge e_2$, logo

$$\langle \omega | w \rangle = adx^1 \wedge bdx^2 [ue_1, e_2] = abu \langle dx^1 \wedge dx^2 | e_1 \wedge e_2 \rangle =$$

$$abu \det \begin{pmatrix} dx^1[e_1] & dx^1[e_2] \\ dx^2[e_1] & dx^2[e_2] \end{pmatrix} = abu \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = abu.$$

Outros exemplos de dualidade 2-vetor-covetor em \mathbb{R}^3

♣ Nos exemplos a seguir os coeficientes a, b, c, u são funções de x^1, x^2, x^3 já que $N = 3$. Consideremos 2-formas, i.e. o produto exterior (wedge) de duas simples 1-formas; portanto a dualidade é intendida contro 2-vetores de \mathbb{R}^3 .

♣ EX 3: ($\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$) Seja $\omega = a dx^1 \wedge b dx^3$ e $w = u e_1 \wedge e_2$, logo $\langle \omega | w \rangle = a dx^1 \wedge b dx^3 [u e_1, e_2] = abu \langle dx^1 \wedge dx^3 | e_1 \wedge e_2 \rangle =$

$$abu \det \begin{pmatrix} dx^1[e_1] & dx^1[e_2] \\ dx^3[e_1] & dx^3[e_2] \end{pmatrix} = abu \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

♣ EX 4: ($\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$) Seja $\omega = (a dx^1 + b dx^2) \wedge c dx^3$ e $w = e_2 \wedge e_3$, logo $\langle \omega | w \rangle = (a dx^1 + b dx^2) \wedge c dx^3 [e_2, e_3] =$

$$ac \langle dx^1 \wedge dx^3 | e_2 \wedge e_3 \rangle + bc \langle dx^2 \wedge dx^3 | e_2 \wedge e_3 \rangle =$$

$$ac \det \begin{pmatrix} dx^1[e_2] & dx^1[e_3] \\ dx^3[e_2] & dx^3[e_3] \end{pmatrix} + bc \det \begin{pmatrix} dx^2[e_2] & dx^2[e_3] \\ dx^3[e_2] & dx^3[e_3] \end{pmatrix} =$$

$$ac \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + bc \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = bc.$$

Base direta de m -vetores e covetores

Base dual de co-vetores

Sendo $\{e_i\}_i$ a base Cartesiana de \mathbb{R}^N , já vimos que a base dual $\{e^{*j}\}_j$ é definida como $\langle e^{*j} | e_i \rangle = \delta_{ij}$. Também vimos que era equivalente a noção de diferencial simples, i.e. temos a notação: $e^{*i} = dx^i =$ diferencial de x^i . A base de $\Lambda^1(\mathbb{R}^N)$ é

$$\{dx^{i_1}, \dots, dx^{i_N}\}.$$

A base de $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$ é composta de $d = \frac{N!}{m!(N-m)!}$ elementos, i.e., é o seguinte conjunto de m -covetores simples: $\Xi_m^N := \{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}, dx^{\sigma_1(i_1)} \wedge \dots \wedge dx^{\sigma_1(i_m)}, \dots, dx^{\sigma_d(i_1)} \wedge \dots \wedge dx^{\sigma_d(i_m)}\}$ com $\sigma_i(k)$ ($1 \leq i \leq d$) uma permutação par dos índices $1 \leq k \leq N$.

♣ Exemplo: a base de $\Lambda_2(\mathbb{R}^3)$ é $(e_1 \wedge e_2, e_3 \wedge e_1, e_2 \wedge e_3)$ e a de $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ é $(dx^1 \wedge dx^2, dx^3 \wedge dx^1, dx^2 \wedge dx^3)$, sendo que $dx^1 \wedge dx^2(e_1 \wedge e_2) = \det(1 \ 0 | 0 \ 1) = 1$ enquanto $dx^1 \wedge dx^2(e_2 \wedge e_3) = \det(0 \ 0 | 1 \ 0) = 0$, etc.

Base de orientação directa -1- 3d

♣ **Regra 1:** partimos de um triedro de orientação directa em \mathbb{R}^3 , ou seja $\{e_1, e_2, e_3\}$.

♣ Construimos o 3-vetor simples orientado por convenção (dita da mão direita) $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 = e_3 \wedge e_1 \wedge e_2$, e os 2-vetores simples orientados $\{e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1\}$.

♣ **Regra 2:** A ordem dos elementos na base dual $\{dx^i, dx^j, dx^k\}$ é conforme o sinal das mapas de dualidade:

- caso ser uma 3-forma, $dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k [e_m \wedge e_n \wedge e_p]$ tem que ser 0 ou 1, sendo que $e_m \wedge e_n \wedge e_p$ tem orientação directa. Portanto a ordem certa (=directa) é

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 = dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2$$

- caso ser uma 2-forma, temos que ter $dx^i \wedge dx^j [e_m \wedge e_n]$ igual a 0 ou 1, sendo que $e_m \wedge e_n$ tem orientação directa. Obtemos portanto a base $\{dx^1 \wedge dx^2, dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1\}$.

Base de orientação directa -2- m -formas sob \mathbb{R}^N

- contra-exemplo: a base $\{dx^1 \wedge dx^2, dx^1 \wedge dx^3, dx^2 \wedge dx^3\}$ não tem orientação directa pois que $dx^1 \wedge dx^3[e_m \wedge e_n] = -1\delta_{m3}\delta_{n1}$.
- para $m = 2$ e $N = 3$ existe um "truque": a ordem directa encontra-se tomando 2 elementos seguidos na sequência:
 $e_1e_2e_3e_1$.

♣ Caso das N -formas: uma base é uma N -forma simples tal que $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_N}[e_1 \wedge \cdots \wedge e_N]$ igual a 1 ou 0, ou seja i_1, \dots, i_N é uma permutação par de $1 < \cdots < N$. Por convenção a base é constituída do único elemento $\Xi_N^N := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^N$ (i.e., tal que $i_1 < \cdots < i_N$). Dito isto, $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_N} = dx^{\sigma(i_1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(i_N)}$ para qualquer mapa de permutação σ que seja par, é também uma base. Para além quando multiplicado por $\sqrt{|g|}$ com $g := \det(g_{ij})$, obtemos a chamada forma de volume: $\Omega^N := \sqrt{|g|}\Xi_N^N$ que nos servirá para integrar sobre os volumes.

Base de orientação directa -3- m -formas sob \mathbb{R}^N

♣ Caso das m -formas em \mathbb{R}^N : constroi-se o simbolo

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \cdots & m & m+1 & \cdots & & N \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m & j_1 & \cdots & j_{N-m} & \end{array} \right)$ com os indices i_k e j_l ordenados, ou seja $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq N$ e

$1 \leq j_1 < \cdots < j_{N-m} \leq N$. Depois determina-se a mapa de permutação σ tal que $\sigma(i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_{N-m}) = (1, \dots, N)$: se a mapa for par, a ordem (i_1, \dots, i_m) é directa, e a base directa constroi-se com esses indices na ordem certa.

♣ EX 5: exemplo em $\Lambda^4(\mathbb{R}^7)$: o 4-covetor $dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^5 \wedge dx^7$ tem orientação direta? Constroi-se a matriz seguinte:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 1 & 4 & 6 \end{array} \right)$$

e re-aranja-se a mesma para a segunda linha retomar a ordem crescente conforme a primeira linha, i.e.

Base de orientação directa -4- m -formas sob \mathbb{R}^N

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 | 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 7 | 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 | 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 7 | 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 7 | 5 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 | 5 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 | 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Logo, contamos as permutações: são 5 (a partir da linha 3), i.e., $(-1)^5 = -1$ e concluímos que a permutação é ímpar e que $dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^5 \wedge dx^7$ não tem orientação directa.

♣ Para torna-lo directo, vimos que era suficiente inverter dois elementos, i.e., $dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^7 \wedge dx^5$. Com efeito são precisas 6 permutações para retomar a ordem natural, logo é um número par e a orientação do 4-vetor é directa:

(Grassman) algebra dos vetores e co-vetores -1-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 | 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 5 | 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 | 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 5 | 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 | 7 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 | 7 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 | 5 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 | 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Símbolo de permutação

Em \mathbb{R}^N definimos $\epsilon_{i_1 \dots i_N}$ como $= 1$ se a permutação de i_1, \dots, i_N para a ordem natural $1, \dots, N$ for par, $= -1$ se for ímpar, e $= 0$ se existirem dois índices repetidos dentro de i_1, \dots, i_N .

EX. EM \mathbb{R}^7 temos $\epsilon_{2357146} = -1$ e $\epsilon_{2375146} = +1$.

(Grassman) algebra dos vetores e co-vetores -2-

♣ EX 6: A algebra exterior é tudo uma questão de permutação:

$$dx^1 \wedge dx^2 [u \wedge v] = \det (u_1 v_1 | u_2 v_2) = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

♣ EX 7: Daí, a forma $dS := dx^1 \wedge dx^2$ é chamada elemento de superficie orientado, pois que $dx^1 \wedge dx^2 = -dx^2 \wedge dx^1$ e pelo EX 6.

♣ EX 8: a forma $dV = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ é chamada elemento de volume orientado, pois que $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3$.

Dualidade m -vetor- m -covetor

Mediante a relação de equivalência \sim é evidente que $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$ e o espaço dual de $\Lambda_m(\mathbb{R}^N)$, com a seguinte definição/convenção:

$a_1 \wedge \cdots \wedge a_m [u_1 \wedge \cdots \wedge u_m] := a_1 \wedge \cdots \wedge a_m [u_1, \cdots, u_m]$ (i.e., o m -covetor "come" m -vetores da mesma forma que comia m -uplos de N -uplos). Para além, sendo $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}, 1 \leq i_1, \cdots, i_m \leq N$ um elemento na base de $\Lambda_m(\mathbb{R}^N)$, um elemento na base de $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$ é $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}, 1 \leq i_1, \cdots, i_m \leq N$, sendo que $dx^{i_m} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m} [e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_m}] = 1$ se $i_k = j_k$ e $= 0$ senão.

Formas diferenciais

Álgebra exterior dos co-vetores

Definimos também $\Lambda^*(\mathbb{R}^N) = \Lambda^1(\mathbb{R}^N) \oplus \dots \oplus \Lambda^N(\mathbb{R}^N)$ com a extensão linear da operação entre um m - e um l -covetor:

$$(a_1 \wedge \dots \wedge a_m) \wedge (b_1 \wedge \dots \wedge b_l) = a_1 \wedge \dots \wedge a_m \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_l \\ (\in \Lambda^{m+l}(\mathbb{R}^N) \text{ se } m+l \leq N, = 0 \text{ senão}).$$

Observação: caso de uma variedade

Se estivermos numa variedade \mathcal{M} em vez de \mathbb{R}^N então o espaço vetorial associado é o plano tangente em cada ponto $p \in \mathcal{M}$, $T_p\mathcal{M}$. As bases associadas ao mesmo são portanto $\{g_i\}_i$ e $\{g^j\}_j$.

Forma diferencial: definição

Uma m -forma diferencial sobre o aberto $W \subset \mathbb{R}^N$ é uma função: $\phi : W \rightarrow \Lambda^m(\mathbb{R}^N)$. Pode ser escrita na base de $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$ como

Exemplos de cálculo exterior com formas diferenciais com coeficientes constantes

$\phi = \sum_{i_1, \dots, i_m} \phi_{i_1 \dots i_m} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}$, com

$\phi_{i_1 \dots i_m}(x) = \phi(x)[e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}]$. Temos $\forall v \in \Lambda_m(\mathbb{R}^N)$,

$$x \rightarrow \phi(x)[v] := \phi_{i_1 \dots i_m}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m} [v_1 \wedge \dots \wedge v_m].$$

Alem disto, digamos que

- ▶ a forma ϕ é $C^k(W)$ se $\forall v \in \Lambda_m(\mathbb{R}^N)$, $x \mapsto \phi(x)[v]$ é $C^k(W)$,
- ▶ $\{x_i\}_i$ são as coordenadas (Cartesianas ou curvilíneas),
- ▶ m é chamado grau da forma ϕ .

♣ Uma forma diferencial ϕ vai naturalmente ser integrada sobre uma superfície m -dimensional: 1-forma L como integral de linha, 2-forma S como integral de superfície, 3-forma V como integral de volume. Para isso teremos que introduzir uma métrica e uma noção de integral.

Sentido geométrico de uma 1-forma a $2d$

♣ EX 9: Seja $N = 2$ e $a_1, a_2, a_3 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^N)$. Temos

$a_1 \wedge (a_2 + a_3) = a_1 \wedge a_2 + a_1 \wedge a_3$, pois que

$$a_1 \wedge (a_2 + a_3)(u_1, u_2) = \det \begin{pmatrix} a_1[u_1] & a_1[u_2] \\ (a_2 + a_3)[u_1] & (a_2 + a_3)[u_2] \end{pmatrix} = \\ \det \begin{pmatrix} a_1[u_1] & a_1[u_2] \\ a_2[u_1] & a_2[u_2] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1[u_1] & a_1[u_2] \\ a_3[u_1] & a_3[u_2] \end{pmatrix}.$$

♣ EX 10: Seja $N = 3$, $a_1 = Adx$ e $a_2 = Bdy + Cdz$. Então

$a_1 \wedge a_2 = ABdx \wedge dy + ACdx \wedge dz = ABdx \wedge dy - ACdz \wedge dx$,

ou seja $a_1 \wedge a_2[u, v] = AB(u_1v_2 - u_2v_1) +$

$$AC(u_1v_3 - u_3v_1) = \det \begin{pmatrix} Au_1 & Av_1 \\ Bu_2 + Cu_3 & Bv_2 + Cv_3 \end{pmatrix}.$$

♣ EX 11: Seja $N = 3$, $a_1 = Adx$ e $a_2 = Bdy + Cdz$. Temos

$a_1 \wedge a_2 = -a_2 \wedge a_1$, pois que $ABdx \wedge dy$

$+ ACdx \wedge dz = -BADy \wedge dx - CADz \wedge dx = -(Bdy + Cdz) \wedge Adx$.

Sentido geométrico de uma 2-forma a $2d$

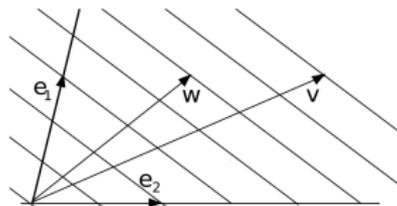
Generalização

Seja ω_1 and ω_2 duas formas de grau ímpar. Então

$\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$. Em particular, seja ω uma forma diferencial de ordem ímpar, logo

$$\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega, \text{ i.e., } \omega^2 = 0.$$

♣ EX 12: Seja um fluxo $\omega = 3dx + 2dy$ (cujo significado é: com densidade 3 ao longo de e_1 e 2 ao longo de e_2), e sejam dois



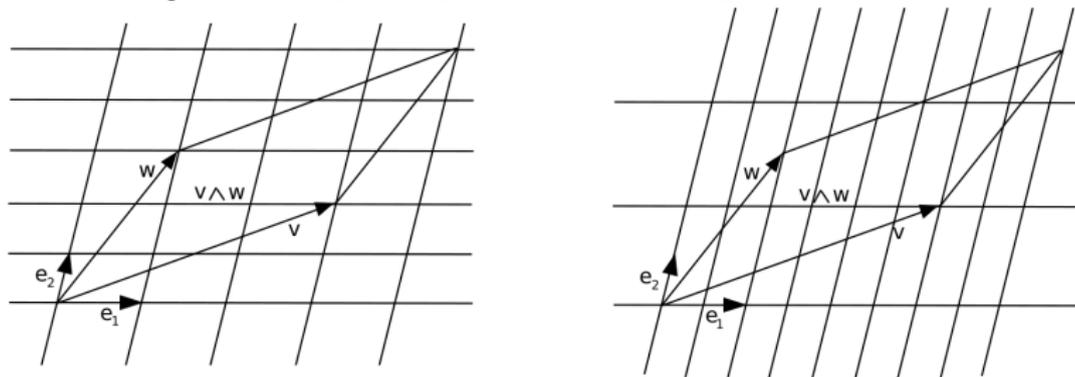
1-vetores $v = e_1 + 2e_2$ e $w = e_1 + e_2$.

Então o fluxo ao longo de v vale $\omega[v] = 3 \times 1 + 2 \times 2 = 7$ = número de linhas cruzadas por v , e ao longo de w é

Sentido geometrico de uma 2-forma a $2d$

♣ EX 13: Temos $dx \wedge dy[e_1 \wedge e_2] = \det(1 \ 0 | 0 \ 1) = 1$. Sendo que $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ é unidimensional, admite $dx \wedge dy$ como unico elemento da base, logo $\omega(w) = k \in \mathbb{R}$. Em particular $dx \wedge dy[u \wedge v] = \det(u_1 \ v_1 | u_2 \ v_2) = \text{area (com sinal) do paralelograma (orientado) gerado por } u \text{ e } v$.

♣ EX 14: Seja $v = 3e_1 + 2e_2$ e $w = e_1 + 3e_2$.

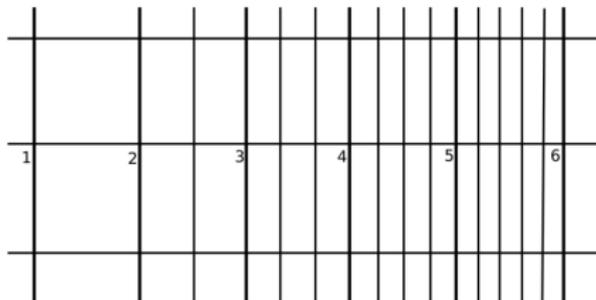


Temos $dx \wedge dy[v \wedge w] = |3 \ 1 | 2 \ 3| = 7 = \# \text{ celas cobertas por } v \wedge w$.

Sentido geométrico de uma 1-forma a $2d$ com coeficientes variáveis

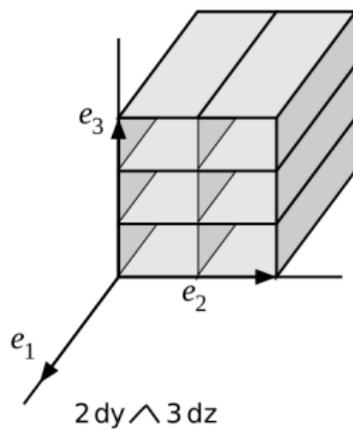
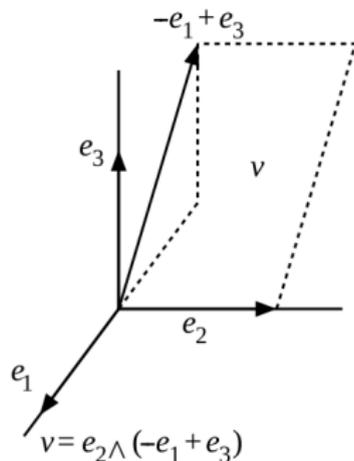
Figura a direita: existem infinitas formas equivalentes : Seja $\omega = 2dx \wedge \frac{1}{2}dy = dx \wedge dy$. Temos $\omega[v \wedge w] = 7 = \omega[2v \wedge \frac{1}{2}w]$.

♣ EX 15: Suponhamos agora que a forma tenha coeficientes variáveis. Seja um fluxo $\omega = xdx$. A representação geométrica de $[x]dx$ com $[x]$ a aproximação inteira de x é dada pela figura (fluxo com densidade linearmente crescente):



Sentido geométrico de uma 2-forma a $3d$ com coeficientes constantes

♣ EX 16: Seja $\omega = 2dy \wedge 3dz$ e seja o plano $\nu = e_2 \wedge (-e_1 + e_3)$ gerado por e_2 e $-e_1 + e_3$. Quantos tubos rectangulares na figura a direita são atravessados por ν ? Resposta: temos que calcular o fluxo através do plano: $\omega[\nu] = |2 \ 0 \ 0 \ 0| + |2 \ 0 \ 0 \ 3| = 6$.



Observação: no caso de um plano horizontal: $\omega[e_1 \wedge e_2] = 0$.

Elementos e integrandos de linha, superfície e volume

♣ Vimos que os elementos de linha, superfície e volume são $dL = dx, dy, dz$, $dS = dx \wedge dy, dx \wedge dz, dy \wedge dz$ e $dV = dx \wedge dy \wedge dz$. Portanto os integrandos de linha, superfície e volume são então $\gamma dL = a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz$, $\Gamma dS = A(x, y, z)dx \wedge dy + B(x, y, z)dx \wedge dz + C(x, y, z)dy \wedge dz$ e $f(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz$. Serão integrados numa curva, superfície ou volume de \mathbb{R}^3 , quando teremos uma noção de integral.

♣ Vimos que, dadas as coordenadas (x, y) , o integrando de area é $S = A(x, y)dx \wedge dy$, sendo $dx \wedge dy$ o elemento de area. O que é que acontece se mudamos as coordenadas, i.e., se passamos de (x, y) a (u, v) mediante as mapas $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$? Com o formalismo de cálculo exterior acontece que é extremamente natural, e automatico. Vejamos:

calculamos: $dx \wedge dy = (x_u du + x_v dv) \wedge (y_u du + y_v dv) = x_u y_v du \wedge dv + x_v y_u dv \wedge du = (x_u y_v - x_v y_u) du \wedge dv = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} du \wedge dv = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du \wedge dv$ com $\mathcal{J}(xy|uv) := \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ o jacobiano (com sinal) da mudança de coordenadas.

♣ Observação 1 : o produto \wedge dá automaticamente a transformação certa na mudança de coordenadas, bem como o sinal certo, sendo os elementos orientados.

♣ Observação 2 : no caso de um volume, teremos $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ e $z = z(u, v, w)$ e $dx \wedge dy \wedge dz = \mathcal{J}(xyz|uvw) du \wedge dv \wedge dw$.

Diferencial exterior duma m -forma diferencial -1-

♣ Seja $f : W \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma função $\mathcal{C}^k(W)$, $k \geq 1$.

Definição de diferenciação exterior

1. O diferencial exterior de f é $df := \frac{\partial f}{\partial x_j} dx^j$, $1 \leq j \leq N$, ou seja por Riesz, $df(x)[v] = \nabla f(x) \cdot v$ (em Cartesiano).
2. O diferencial exterior da m -forma $\phi = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}$ é a $m + 1$ -forma $d\phi := df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}$.
3. O diferencial de uma $\mathcal{C}^k(W)$ m -forma é definida por extensão linear da definição anterior, i.e.

$$\phi = \sum_{i_1, \dots, i_m} \phi_{i_1 \dots i_m} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m},$$

e

$$d\phi = \sum_{i_1, \dots, i_m} d\phi_{i_1 \dots i_m} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}$$

Diferencial exterior de uma m -forma diferencial -2-

♣ Observação: diferencial exterior (ou diferencial de de Rham) é definido mediante o produto exterior \wedge .

♣ EX 1: Seja $A := adx^1 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$. Logo $B = dA = \partial_j adx^j \wedge dx^1$, i.e., $B = \partial_2 adx^2 \wedge dx^1 + \partial_3 adx^3 \wedge dx^1$. Na base Ξ_2^3 escreve-se $B = \partial_3 adx^3 \wedge dx^1 - \partial_2 adx^1 \wedge dx^2$.

♣ EX 2: $\phi = f_i(x)dx^i$; logo $d\phi = \partial_j f_i dx^j \wedge dx^i$. Há de ser re-escrito na bas Ξ_2^N .

♣ EX 3: $\omega = g_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$; logo $d\omega = \partial_k g_{ij} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j$. Há de ser re-escrito na bas Ξ_3^N .

Lemma.

Seja ϕ, ψ duas $C^1(W)$ - m -forma e θ uma $C^1(W)$ l -forma. Temos

1. $d(\phi + \psi) = d\phi + d\psi$
2. $d(\phi\theta) = d\phi \wedge \theta + (-1)^m \phi \wedge d\theta$.

Produto interno em $\Lambda^m(\mathcal{M})$

Produto interno em $\Lambda^1(\mathbb{R}^N)$ e $\Lambda^1(T\mathcal{M})$

Seja $\omega = \omega_i dx^i$, $\eta = \eta_j dx^j \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$. Definimos $(\omega, \eta) = \omega_i \eta_i$ (com soma em i).

Seja uma variedade diferenciável \mathcal{M} e $T\mathcal{M} = \cup_x T_x \mathcal{M}$ o conjunto dos planos tangentes em $x \in \mathcal{M}$.

Definimos $(\omega, \eta)_x = \omega_i(x) \eta_j(x) g^{ij}(x)$ (com soma em i, j) em $T_x \mathcal{M}$, com $g_{ij}(x)$ a métrica de \mathcal{M} em $x \in \mathcal{M}$.

Produto interno local em $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$ e $\Lambda^m(T\mathcal{M})$

Definimos $(\omega, \eta)_x = \omega_{i_1 \dots i_m} \eta_{i_1 \dots i_m}(x)$ em \mathbb{R}^N e, caso de uma base ortogonal, $(\omega, \eta)_x = \omega_{j_1 \dots j_m}(x) \eta_{i_1 \dots i_m}(x) g^{i_1 j_1}(x) \dots g^{i_m j_m}(x)$ em $T_x \mathcal{M}$ para $x \in \mathcal{M}$. Caso de uma base geral, $(\omega, \eta)_x = \omega_{j_1 \dots j_m}(x) \eta_{i_1 \dots i_m}(x) \det(dx^{i_k} \cdot dx^{j_l})_{kl}(x)$. Definição alternativa: $(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_m, \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_m) = \det((\omega_l, \eta_l))_{1 \leq k, l \leq m}$.

O lema de Poincaré

♣ Notamos $f_{,i} := \partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Temos também $f_{,ij} := \partial_j \partial_i f$.

Teorema 1: Poincaré lemma

Seja ϕ uma $\mathcal{C}^2(W)$ m -forma diferencial. Logo $dd\phi = 0$.

DEM. Caso 1: $m = 0$, logo

$\phi = f, d\phi = f_{,i} dx^i, dd\phi = f_{,ij} dx^j \wedge dx^i =$ (invertindo os indices, já que são somados, e somando duas vezes a mesma quantidade dividida por dois) $= \frac{1}{2}(f_{,ij} dx^j \wedge dx^i + f_{,ji} dx^i \wedge dx^j) =$ (pela antisimetria de $dx^i \wedge dx^j$) $= (f_{,ij} - f_{,ji}) dx^j \wedge dx^i = 0$, pela regularidade de f .

Caso 2: $m > 1$, logo $\phi = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}$,

$d\phi = f_{,j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}, dd\phi = \frac{1}{2}(f_{,jk} - f_{,kj}) dx^j \wedge dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}$. Se $j, k \in \{i_1, \dots, i_m\}$ or $m \geq N - 1, = 0$ pelas regras de cálculo exterior, senão, $= 0$ pela regularidade de f .

QED.

A recíproca do lema de Poincaré

Formas fechadas e exactas

Seja $\phi \in \mathcal{C}^k(W, \Lambda^m(\mathbb{R}^N))$. A m -forma ϕ é dita

1. fechada se $d\phi = 0$.
2. exacta se $\exists \psi \in \mathcal{C}^{k+1}(W, \Lambda^{m-1}(\mathbb{R}^N))$: $\phi = d\psi$.

Teorema. Recíproca do lema de Poincaré

Seja W um aberto de \mathbb{R}^N simplesmente conexo e ϕ uma $\mathcal{C}^k(W)$ - m -forma diferencial tal que $d\phi = 0$. Então existe uma $\mathcal{C}^{k+1}(W)$ - $m - 1$ -forma diferencial α tal que $\phi = d\alpha$.

Aplicação 1 de "dd = 0" (dominio simplesmente conexo)

♣ Seja $U = ue_1 + ve_2 + we_3$ e $A = ae_1 + be_2 + ce_3$, com $u, v, w, a, b, c \in \mathcal{C}^1(W)$.

♣ Seja $\Phi : \Lambda_m(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Lambda^m(\mathbb{R}^3)$. Por exemplo com $m = 1$, $U \mapsto \Phi(U) = \phi = udx + vdy + wdz$. Na pratica, guardamos os coeficientes e mudamos a base contravariante para a covariante dual. Além disto, vale a reciproca $\Phi^{-1}(\phi) = U$.

♣ Temos $d\phi = \partial_y u dy \wedge dx + \partial_z u dz \wedge dx + \partial_x v dx \wedge dy + \partial_z v dz \wedge dy + \partial_x z dx \wedge dz + \partial_y z dy \wedge dz$. Re-ordenando os termos, saí $d\phi = (\partial_y z - \partial_z v) dy \wedge dz + (\partial_z u - \partial_x z) dz \wedge dx + (\partial_x v - \partial_y u) dx \wedge dy = (\text{curl}U)_1 dy \wedge dz + (\text{curl}U)_2 dz \wedge dx + (\text{curl}U)_3 dx \wedge dy$.

♣ Ora, por Poincaré, sabemos que se $d\phi = 0$ então existe uma função escalar f t.q. $\phi = df = f_{,i} dx^i$. Mas, $d\phi = 0$ significa que $0 = \Phi^{-1}(d\phi) = (\text{curl}U)_1 e_2 \wedge e_3 + (\text{curl}U)_2 e_3 \wedge e_1 + (\text{curl}U)_3 e_1 \wedge e_2$, logo $\text{curl}U = 0$. D'outro lado $\phi = df$ significa que $\Phi^{-1}(df) = \Phi^{-1}(f_{,i} dx^i) = f_{,i} e_i = \text{grad}f = \Phi^{-1}(\phi) = U$.

Aplicação 2 de "dd = 0" (dominio simplesmente conexo)

Acabamos de demonstrar que $\text{curl}U = 0 \Rightarrow \exists f$ t.q. $U = \text{grad}f$.

Segunda aplicação

♣ Seja a 2-forma $\omega = udy \wedge dz + vdz \wedge dx + wdx \wedge dy$. Por Poincaré, sabemos que se $d\omega = 0$ então existe uma 1-forma $\alpha = adx + bdy + cdz$ tal

$$\omega = d\alpha = (c_{,y} - b_{,z})dy \wedge dz + (a_{,z} - c_{,x})dz \wedge dx + (b_{,x} - a_{,y})dx \wedge dy = (\text{curl}A)_x dy \wedge dz + (\text{curl}A)_y dz \wedge dx + (\text{curl}A)_z dx \wedge dy.$$

♣ Temos $d\omega = \partial_x u dx \wedge dy \wedge dz + \partial_y v dy \wedge dz \wedge dx + \partial_z w dz \wedge dx \wedge dy = \partial_x u dx \wedge dy \wedge dz + \partial_y v dx \wedge dy \wedge dz + \partial_z w dx \wedge dy \wedge dz = (\text{div}U) dx \wedge dy \wedge dz = 0$ implica $\text{div}U = 0$.

Mas, por Poincaré, $\omega = d\alpha$, i.e., por identificação de termos, $\omega = (\text{curl}A)_x dy \wedge dz + (\text{curl}A)_y dz \wedge dx + (\text{curl}A)_z dx \wedge dy = udy \wedge dz + vdz \wedge dx + wdx \wedge dy$, i.e., $U = \text{curl}A$. Acabamos de demonstrar que $\text{div}U = 0 \Rightarrow \exists A \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ t.q. $U = \text{curl}A$.

O operador dual de Hodge -1-

♣ Em $\Lambda^m(\mathbb{R}^3)$ temos duas famílias de co-vectores de base com o mesmo número de elementos, i.e., $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ e $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ têm 3 (dx, dy, dz e $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$) enquanto $\Lambda^0(\mathbb{R}^3)$ e $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$ têm 1 (1 e $dx \wedge dy \wedge dz$).

Gostaríamos então de ter uma bijecção entre $\Lambda^r(\mathbb{R}^3)$ e $\Lambda^{3-r}(\mathbb{R}^3)$, $0 \leq r \leq 3$: o mesmo é dado pelo operador dual de Hodge \star :

$$\star dx = dy \wedge dz, \star dy = dz \wedge dx, \star dz = dx \wedge dy$$

$$\star dy \wedge dz = dx, \star dz \wedge dx = dy, \star dx \wedge dy = dz$$

$$\star 1 = dx \wedge dy \wedge dz, \star dx \wedge dy \wedge dz = 1.$$

♣ Introduzimos a forma de volume $\Omega_N := \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N$.

♣ Logo, se $\omega \in \Lambda^m(TM)$ e $\eta \in \Lambda^{N-m}(TM)$ então

$$\omega \wedge \eta = k \Omega_N, k \in \mathbb{R}.$$

O operador dual de Hodge -2-

Definição de $\star : \Lambda^m(TM) \rightarrow \Lambda^{N-m}(TM) :$

$$\eta \mapsto \star\eta : \forall \omega \in \Lambda^m(TM), \omega \wedge \star\eta = (\omega, \eta)\Omega_N.$$

♣ Observação 1: $\star\eta$ é único (se existir). Há de demonstrar a existência do mesmo (na cadeira de MMF). Com efeito existe e tem a forma seguinte. Seja $\eta = \eta_{i_1 \dots i_m} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}$ (soma nos índices repetidos). Então $\star\eta = \frac{1}{(N-m)!} \eta_{i_1 \dots i_m} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_m j_m} \sqrt{|g|} \epsilon_{j_1 \dots j_m j_{m+1} \dots j_N} dx^{j_{m+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_N}$ (soma nos índices repetidos).

Produto interno L^2 em $\Lambda^m(TM)$

Seja $\omega, \eta \in \Lambda^m(TM)$. Então

$$(\omega, \eta)_2 := \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \star\eta,$$

mediante uma boa noção de integração.

O operador dual de Hodge -3-

♣ EX1. $\star dx^i = \frac{1}{(N-1)!} g^{ki} \sqrt{|g|} \varepsilon_{ki_1 \dots i_{N-1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{N-1}} =$ (o índice k salta $(k-1)$ vezes para ir ao seu lugar, sem soma em k) $= (-1)^{k-1} g^{ki} \sqrt{|g|} \frac{1}{(N-1)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{k-1} k i_{k+1} \dots i_{N-1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge$

$dx^{i_{N-1}} =$ (mudando o nome dos índices repetidos, e sendo que $\widehat{dx^k}$ significa que está a faltar a forma dx^k)

$$= (-1)^{k-1} g^{ki} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \dots \wedge dx^N.$$

Exemplo: em Cartesiano temos $g^{ik} = \delta_{ik}$ e portanto saí

$$\star dx^i = (-1)^{i-1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^N. \text{ Assim em } \mathbb{R}^3,$$

$$\star dx^1 = dx^2 \wedge dx^3, \star dx^2 = -dx^1 \wedge dx^3, \star dx^3 = dx^1 \wedge dx^2.$$

♣ Consideremos uma variedade com métrica definida positiva. O seguinte teorema é demonstrado na cadeira de MMF:

Teorema. (Quasi-involução)

$$\star \star \omega = (-1)^{m(N-m)} \omega \text{ com } \omega \in \Lambda^m(TM)$$

O operador dual de Hodge -4-

♣ EX2. Calcular $\star dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \cdots \wedge dx^{N-1}$. Vamos utilizar o teorema anterior. Passo 1:

$$\begin{aligned} g_{li} \star dx^i &= (-1)^{\underline{k}+1} g_{li} / g^{ki} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^N = \\ &= (-1)^{\underline{k}+1} \delta_l^k \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^N = \\ &= (-1)^{\underline{l}+1} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \cdots \wedge dx^N. \end{aligned}$$

Passo 2: aplicar \star mais uma vez: $g_{li} \star \star dx^i = g_{li} (-1)^{N-1} dx^i$
 $= (-1)^{\underline{l}-1} \sqrt{|g|} \star dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \cdots \wedge dx^N.$

Passo 3: Sabemos pelo teorema anterior que

$$g_{li} \star \star dx^i = (-1)^{1(N-1)} dx^i, \text{ logo}$$

$$\star dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \cdots \wedge dx^N = (-1)^{N-l} \frac{1}{\sqrt{|g|}} g_{li} dx^i.$$

♣ Exemplo em Cartesiano em \mathbb{R}^3 :

$$\star dx^1 \wedge dx^2 = (-1)^{3-3} \cdot 1 \cdot \delta_{3i} dx^i = dx^3;$$

$$\star dx^1 \wedge dx^3 = (-1)^{3-2} \cdot 1 \cdot g_{2i} dx^i = -dx^2;$$

$$\star dx^3 \wedge dx^2 = -\star dx^2 \wedge dx^3 = -(-1)^{3-1} \cdot 1 \cdot \delta_{1i} dx^i = -dx^1.$$

O operador "pull-back" de uma forma diferencial -1-

Seja $\omega : \mathbb{R}^M \rightarrow \Lambda^m(\mathbb{R}^M)$ uma forma diferencial de ordem m definida em \mathbb{R}^M . Seja

$$F : \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$$

uma função \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, com $1 \leq m \leq \min(M, N)$.

O operador "pull-back" de uma forma diferencial: definição

O pull-back ("puxa atrás") associado ao mapa F e aplicado a uma m -forma diferencial, é definido como um mapa linear:

$$F^\# : \Lambda^m(\mathbb{R}^M) \rightarrow \Lambda^m(T\mathcal{M}) : \omega \mapsto F^\#\omega$$

t.q. $\forall p \in \mathcal{M}, \forall u_1, \dots, u_m \in T_p\mathcal{M}$,

$$F^\#\omega(p)[u_1 \wedge \dots \wedge u_m] = \omega(F(p))[D_{u_1}F \wedge \dots \wedge D_{u_m}F],$$

onde $D_vF = \nabla F \cdot v \in \mathbb{R}^M$ é a derivada direccional na direcção v .

O operador "pull-back" de uma forma diferencial -2-

♣ Para $m = 0$ temos $F^{\sharp}\omega = \omega_{\sharp}F = \omega \circ F$ (função ω composta com F). Logo o operador pull-back generaliza a composição de funções às m -formas.

♣ O teorema seguinte é demonstrado na cadeira de MMF. Tem um papel crucial na prova do teorema de Stokes.

Teorema: Comutação do pull-back com d

Seja $k \geq 2$ e $\omega \in \Lambda^m(T\mathcal{M})$ uma C^k - m -forma diferencial definida em $T\mathcal{M}$. Então temos $dF^{\sharp}\omega = F^{\sharp}d\omega$. (\star)

As 3 noções de integral

Em \mathbb{R} : Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.

1. O integral indefinido, ou primitiva: $F(x) = \int^x f(\xi)dx$
2. O integral definido, sem sinal: $\int_{[a,;b]} f(x)dx$: compatível com a noção de integral de Lebesgue. Tipicamente: área a baixo de uma curva, massa de um corpo com densidade variável, sendo que ambos tem sinal positivo
3. O integral definido, com sinal: $\int_a^b f(x)dx$: compatível com a noção de integral de Riemann. Tipicamente: trabalho efetuado pela força F longo o caminho de a a b , sendo que o trabalho tem sinal, e.g., será negativo se for de b a a

Relação entre as mesmas noções

- I $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$
- II $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a;b]} f(x)dx$ e $\int_b^a f(x)dx = -\int_{[a;b]} f(x)dx$

Integral unidimensional orientado

♣ $\int_b^a \tilde{a}^b f(x) dx = \int_{[a;b]} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i$, com $x_0 = a, x_n = b$, sendo que $|\Delta x_i| \rightarrow 0$ e $\sum_{i=0}^n |\Delta x_i| \leq c < \infty$. Portanto $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ pode ser positivo (se $x_{i+1} > x_i$) ou negativo (se $x_{i+1} < x_i$). A quantidade $f(x_i) \Delta x_i$ é o trabalho em x_i : pode ser um incremento positivo ou negativo (é uma energia).

♣ Introduzimos o mapa linear que a cada incremento Δx faz corresponder o trabalho longo Δx :

$$\omega_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \Delta x \mapsto w_x(\Delta x) := f(x) \Delta x.$$

Logo definimos o trabalho total como o integral da forma:

$$\int_a^b \omega_x = \int_a^b f(x) dx.$$

♣ No caso de uma curva γ em \mathbb{R}^N com ponto inicial a e final b , temos um mapa do plano tangente em x em \mathbb{R} : $\omega_x : T_x \gamma \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : \Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_N) \mapsto w_x(\Delta x) := f(x) \cdot \Delta x$.

Logo definimos o trabalho de a a b ao longo de $\gamma = F([0, 1])$ como o integral $\int_\gamma \omega_x = \int_0^1 f(F(t)) \cdot \dot{F}(t) dt$, onde $x = F(t) \in \gamma$.

Integração de uma m -forma

Tipo de superfície

A superfície $S = F_{\sharp}(U) = F(U)$ com $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow W \subset \mathbb{R}^M$ uma bijecção de classe C^k e tal que DF é de rank m , com U, W abertos. Sabemos que se S não for o gráfico de F então será uma união de gráficos $F_i(U_i)$.

Definição do integral de uma m -forma numa m -variedade

Seja ω uma m -forma definida em W . Seja S uma m -subvariedade de W . Seja $\{s^i\}_{1 \leq i \leq m}$ um sistema de coordenadas em $U \subset \mathbb{R}^m$, $\{\frac{\partial}{\partial s^i}\}_{1 \leq i \leq m}$ uma base local de S definida em U , e $\frac{\partial}{\partial s^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial s^m}$ o m -vetor "volume orientado" de U . O integral de ω em S é definido (quando o RHS estiver finito) como:

$$\begin{aligned} \int_S \omega &= \int_{F_{\sharp}U} \omega := \int_U F_{\sharp} \omega := \int_U F_{\sharp} \omega(s) \left[\frac{\partial}{\partial s^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial s^m} \right] ds^1 \cdots ds^m \\ &= \int_U \omega(F(s)) \left[\frac{\partial F}{\partial s^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial F}{\partial s^m} \right] ds^1 \cdots ds^m \quad (\text{por definição de } F_{\sharp} \omega). \end{aligned}$$

Aplicações - integral de volume

♣ Recordar sempre que "uma m -forma vai ser integrada numa variedade de dimensão m ."

♣ No caso de $U = \mathcal{R}$, o m -cubo com centro 0 temos:

$$\int_S \omega = \int_{F\sharp\mathcal{R}} \omega = \int_{\mathcal{R}} \omega(F(x))[\partial_1 F \wedge \cdots \wedge \partial_m F] dx^1 \cdots dx^m.$$

♣ Exemplo elementar: seja $m = N = M$, e seja

$\omega(x) = f(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^N$ definida num aberto

U . Temos $U \stackrel{(i)}{=} \text{Id}\sharp U$, e $\partial_i \text{Id}(x) = \partial_i x = e_i$. D'outro lado

$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^N [e_1 \wedge \cdots \wedge e_N] = \det \mathbb{I} = 1$, logo

$$\int_U \omega \stackrel{(i)}{=} \int_{\text{Id}\sharp U} \omega = \int_U \text{Id}\sharp \omega = \int_U \omega(x) [e_1 \wedge \cdots \wedge e_N] dx = \int_U f(x) dx.$$

♣ Nota (abuso de notação): O U nos 3 primeiros integrais é uma superfície orientada, enquanto nos 2 últimos é um conjunto de pontos.

Aplicações - integral de superfície -1-

♣ D'outro lado, mediante a identidade $U \stackrel{(ii)}{=} F(\mathcal{R})$, temos também a fórmula de mudança de variável:

$$\int_U \omega \stackrel{(ii)}{=} \int_{F\sharp\mathcal{R}} \omega = \int_{\mathcal{R}} f(F(x)) \frac{\partial(F^1, \dots, F^N)}{\partial(x^1, \dots, x^N)} dx,$$

com o Jacobiano orientado:

$$\mathcal{J}(F(x)|x) := \frac{\partial(F^1, \dots, F^N)}{\partial(x^1, \dots, x^N)} = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N [\partial_1 F \wedge \dots \wedge \partial_N F]$$

♣ Exemplo: integração de um fluxo vetorial. Seja $m = 2$ e $M = 3$, e $\phi = \phi^1 e_1 + \phi^2 e_2 + \phi^3 e_3 = \phi^i e_i$ um vector por integrar na superfície $S = F(U) \subset \mathbb{R}^3$ com $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ as coordenadas. Escrevemos $F(u, v) = (x^1, x^2, x^3)(u, v)$, e observamos que $dx^i \wedge dx^j [\partial_u F \wedge \partial_v F] = \frac{\partial(x^i, x^j)}{\partial(u, v)} = (\partial_u F \times \partial_v F) \cdot (e_i \times e_j)$.

$$\text{EX: } dx^1 \wedge dx^2 [\partial_u F \wedge \partial_v F] = (\partial_u F \times \partial_v F) \cdot (e_1 \times e_2) = (\partial_u F \times \partial_v F) \cdot e_3 = (\partial_u F \times \partial_v F)_3.$$

Aplicações - integral de superficie -2-

♣ Definimos o "elemento de area infinitesimal orientado"

$$\vec{dS} := \overrightarrow{\delta_u F} \times \overrightarrow{\delta_v F} = \partial_u F du \times \partial_v F dv = \partial_u F \times \partial_v F dudv.$$

A orientação da superficie é dada pela normal $\vec{\nu} = \frac{\partial_u F \times \partial_v F}{|\partial_u F \times \partial_v F|}$ pelo

que $\vec{dS} = \vec{\nu} dS$ com o "elemento de area"

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial(x^2, x^3)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x^3, x^1)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(u, v)}\right)^2} dudv.$$

Símbolo de Levi-Civita

Definimos o símbolo $\epsilon_{ijk} = 1$ se ijk são uma permutação par de 123, $= -1$ se for impar, e $= 0$ se existem indices repetidos. Temos a identidade $\epsilon_{ijk}\epsilon_{jkl} = 2\delta_{il}$. Vale tambem $e_j \times e_k = \epsilon_{jkl}e_l$.

Integral de fluxo (integrando vectorial)

A partir do vetor $\phi = \phi^i e_i$ definimos a 2-forma

$$\omega = \phi^1 dx^2 \wedge dx^3 + \phi^2 dx^3 \wedge dx^1 + \phi^3 dx^1 \wedge dx^2 =$$

$1/2\epsilon_{ijk}\phi^i dx^j \wedge dx^k$ (com soma em i, j, k , verifica-se facilmente).

♣ Recordemos a formula $dx^j \wedge dx^k [a \wedge b] = (a \times b) \cdot (e_j \times e_k)$.

Portanto temos o integral de superfície

$$\begin{aligned} \int_S \omega &= \int_{F^{\#}U} \omega = \int_U F^{\#} \omega = \\ &= \int_U \omega(F(u, v)) [\partial_u F \wedge \partial_v F] dudv \\ &= \int_U 1/2 \epsilon_{ijk} \phi^i dx^j \wedge dx^k [\partial_u F \times \partial_v F] dudv = \\ &= \int_U 1/2 \epsilon_{ijk} \phi^i (\partial_u F \times \partial_v F) \cdot (e_j \times e_k) dudv \\ &= \int_U 1/2 \epsilon_{ijk} \phi^i (\partial_u F \times \partial_v F) \cdot \epsilon_{jkl} e_l dudv \\ &= \int_U 1/2 \phi^i (\partial_u F \times \partial_v F)_l 2\delta_{il} dudv = \\ &= \int_U \phi^i (\partial_u F \times \partial_v F)_i dudv =: \int_S \phi \cdot \vec{dS} = \text{fluxo de } \phi \text{ através } S \\ & \text{(tem sinal!).} \end{aligned}$$

♣ EX: ϕ =força (vento, gravidade, electro-magnetica, etc.)

Integral de superfície de um escalar

Seja f uma função continua e tome $\phi^i = f N^i$ no anterior. Logo o integral de f em S é: $\int_S \phi \cdot \vec{dS} = \int_S f dS$ com o dS anterior.

EX: calcular o baricentro de uma concha esférica.

Teorema de Stokes -1- Caso de um N -retângulo

♣ Seja \mathcal{R} , o N -retângulo de \mathbb{R}^N e $\partial\mathcal{R}$ a fronteira orientada de \mathcal{R} .

Teorema de Stokes em \mathcal{R}

Seja ω uma \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, $N - 1$ -forma definida em $\overline{\mathcal{R}}$. Temos

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \omega = \int_{\mathcal{R}} d\omega.$$

DEM. A demonstração segue do teorema fundamental do cálculo:

considere $\omega = \sum_i \omega_i dx^1 \wedge \cdots \widehat{dx^i} \cdots \wedge dx^N$ e integre

$d\omega = \partial_i \omega_i (-1)^{i-1} \Omega_N$ em \mathcal{R} e ω em $\partial\mathcal{R}$, com

$\Omega_N := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^N$. Basta integrar num produto Cartesiano de segmentos $[a_i; b_i]$ e vem

$$\int_{[a_i; b_i]} d\omega = \pm(\omega_i(b_i) - \omega_i(a_i)) = \int_{\partial[a_i; b_i]} \omega. \text{ QED.}$$

♣ Lembrete: teorema fundamental do cálculo:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Teorema de Stokes -2- Caso geral

Teorema de Stokes em $S = F_{\#}\mathcal{R}$

Seja ω uma C^k , $k \geq 1$, $N - 1$ -forma definida em $\overline{\mathcal{R}}$ e $S = F(\mathcal{R})$ com $F : \mathcal{R} \rightarrow W$, C^k e t.q. DF é de rank N . Temos

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega.$$

DEM. Pela comutação de d com $F^{\#}$ e pelo teorema anterior, vem $\int_S d\omega = \int_{F_{\#}\mathcal{R}} d\omega = \int_{\mathcal{R}} F^{\#}d\omega = \int_{\mathcal{R}} dF^{\#}\omega = \int_{\partial\mathcal{R}} F^{\#}\omega = \int_{F_{\#}\partial\mathcal{R}} \omega = \int_{\partial F_{\#}\mathcal{R}} \omega = \int_{\partial S} \omega$. QED.

♣ Utilisámos também a seguinte identidade/definição:

$\partial F_{\#}\mathcal{R} = F_{\#}\partial\mathcal{R}$, bem como o TFC: teorema fundamental do cálculo (mediante o teorema anterior).

Aplicações do Teorema de Stokes -1-

Teorema de Green

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ e (x, y) as coordenadas Cartesianas do plano. Temos

$$\int_{\partial A} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_A (\partial_x Q - \partial_y P)dx dy.$$

DEM. Seja $\omega = Pdx + Qdy$. Por Stokes, $\int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega = \int_A (\partial_y P dy \wedge dx + \partial_x Q dx \wedge dy) = \int_A (-\partial_y P + \partial_x Q)dx \wedge dy = \int_{\text{Id}^\# A} (-\partial_y P + \partial_x Q)dx \wedge dy = \int_A (-\partial_y P + \partial_x Q)dx \wedge dy [e_1 \wedge e_2] dx dy = \int_A (\partial_x Q - \partial_y P)dx dy$.
QED.

♣ Em todo rigor o sentido de A nas linhas 1, 2 e 3 é diferente do sentido de A na linha 4, pois que no primeiro caso A é uma variedade orientada, enquanto no segundo A é um conjunto de pontos em \mathbb{R}^2 . Na linha 3 aplicamos a mera definição de integral de uma forma.

Aplicações do Teorema de Stokes -2-

Teorema de Stokes classico

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com fronteira $\partial S \neq \emptyset$ e (x, y, z) as coordenadas Cartesianas a 3d.

Seja $v = P(x, y, z)e_1 + Q(x, y, z)e_2 + R(x, y, z)e_3$. Temos

$$\int_{\partial S} v \cdot d\vec{L} = \int_S \operatorname{curl} v \cdot d\vec{S}.$$

DEM. Seja $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Temos $S = F_{\#}U, U \subset \mathbb{R}^2$. Por Stokes, $\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega = \int_{F_{\#}U} (\partial_y R - \partial_z Q) dy \wedge dz + (\partial_z P - \partial_x R) dz \wedge dx + (\partial_x Q - \partial_y P) dx \wedge dy = \int_U (\operatorname{curl} v)_i (\partial_u F du \times \partial_v F dv)_i =: \int_S \operatorname{curl} v \cdot d\vec{S}$. QED.

♣ Lembrete: $\int_{F_{\#}U} (\partial_y R - \partial_z Q) dy \wedge dz := \int_U (\partial_y R - \partial_z Q) F_{\#} dy \wedge dz [\frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v}] = \int_U (\partial_y R - \partial_z Q) dy \wedge dz [\partial_u F \wedge \partial_v F] dudv = \int_U (\partial_y R - \partial_z Q) \frac{\partial(F^2, F^3)}{\partial(u, v)} dudv = \int_U (\operatorname{curl} v)_1 (\partial_u F \times \partial_v F)_1 dudv$.

Aplicações do Teorema de Stokes -3-

Teorema da divergência

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície fechada (i.e., $\partial S = \emptyset$), V o volume tal que $\partial V = S$, e (x, y, z) as coordenadas Cartesianas a $3d$. Seja $v = P(x, y, z)e_1 + Q(x, y, z)e_2 + R(x, y, z)e_3$. Temos

$$\int_{\partial V} v \cdot \vec{dS} = \int_V \operatorname{div} v \, dV.$$

DEM. Iremos demonstramos mais do que a tese, i.e., conseguimos provar a tese componente por componente. Seja $\omega_1 = Pdy \wedge dz$.

Por Stokes, $\int_{\partial V} \omega_1 = \int_V \partial_x P dx \wedge dy \wedge dz = \int_V \partial_x P dV$. QED.

♣ É evidente que a tese segue uma vez efetuado o cálculo das 3 componentes, i.e. $\omega_2 = Qdx^3 \wedge dx^1$ e $\omega_3 = Qdx^1 \wedge dx^2$.