

Mecânica racional: Mecânica do contínuo

Aulas teóricas

Docente: Nicolas Van Goethem

vangoeth@fc.ul.pt,
Sala 6.2.20.

May 25, 2018

Conteúdo das aulas teóricas

- ▶ Aula 1-2: Conceitos de base. Tensores na M. do C. (20-27/9)
- ▶ Aula 3: Bases locais. Cinemática (04/10)
- ▶ Aula 4: Diferencial com o tempo do gradiente de deformação (11/10)
- ▶ Aula 5: Diferencial com o tempo de um conjunto, Conservação da massa, Centro de massa, Leis da dinâmica e Forças (18/10)
- ▶ Aula 6: Tensor das tensões, Teorema de Cauchy, Simetria. Eq.do movimento (25/10)
- ▶ Aulas 7: 1a Lei termodinâmica, Conservação da Energia, Eq. Calor (08/11)

Conteúdo das aulas teóricas

- ▶ Aulas 8: Ciclos de Carnot, Entropia, 2ª Lei da termodinâmica, desigualdade de Clausius-Duhem (15/11)
- ▶ Aula 9: Outra abordagem da 2ª Lei da termodinâmica (22/11)
- ▶ Aula 10: Mecânica dos fluidos. (29/11)
- ▶ Aula 11: Eqs. de Stokes e de Euler (05/12)
- ▶ Aula 12: Eq. de Stokes e Navier-Stokes. (13/12)
- ▶ Aula 13: Cálculo das variações (complemento) (20/12)

Referências bibliográficas

- ▶ R. M.: Temam and A. M. Miranville: Mathematical modelling in Continuum mechanics
- ▶ M. E. Gurtin: An introduction to continuum mechanics
- ▶ G. Duvaut: Mécanique des Milieux Continus
- ▶ F. Boyer, P. Fabrie: Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models

Avaliação

- ▶ Exame de teoria (40%)
- ▶ Exame de teórica-prática (20%)
- ▶ Grande trabalho (30%)
- ▶ Pequeno trabalho (10%)

Conceito de Modelo

Observação de quantidades físicas e suas propriedades



Metodos matematicos



Modelos matematicos

na Física

Conceito de Modelo

Opinão de J. von Neumann

The sciences do not try to explain, they hardly even try to interpret, they mainly make models. By a model is meant a mathematical construct which, with the addition of certain verbal interpretations, describes observed phenomena. The justification of such a mathematical construct is solely and precisely that it is expected to work—that is, correctly to describe phenomena from a reasonably wide area.

Opinão de P.- L. Lions

...What is called Newton's Laws for me are not laws, neither principles; it is a model. Which is false because the relativistic effects are not taken into account, or is not tractable because all forces are not taken into account.
Thus. it is an excellent model which is either false or untractable.

Conceito de Observador Galileano

Sistema de referência

♣ Definido como um corpo rígido em movimento ao qual é legado uma base orthonormal $\{\underline{e}_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ e uma origem O . Uma outra base $\{\underline{e}'_j\}_{1 \leq j \leq 3}$ neste mesmo sistema de referência verifica: $\underline{e}'_j(x) = a_{ij}(x)\underline{e}_i$, onde $A = [a_{ij}]_{ij}$ (ou Q) é uma matriz ortogonal, dita de mudança de base. Portanto:

$x = x_i \underline{e}_i$, $x' = x'_j \underline{e}'_j$, e $x' = A(x - x_O) + b$, com $b := \overrightarrow{OO'}$ and $x_0 := \overrightarrow{0O}$. Os acontecimentos são representados pelo par (x, t) ou (x', t) , conforme a base escolhida.

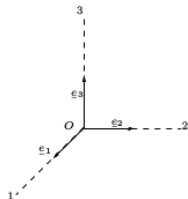
Sistema de referência inercial ou de Galileo

♣ Definido como um sistema de referência em translação uniforme.

Conceito de observador

♣ Definido como um ser num sistema de referência, capaz de realizar experiências e medições de quantidades físicas (temperatura, tensões, velocidade, etc.), e de comunicá-las com um outro observador.

Referencial ortonormal

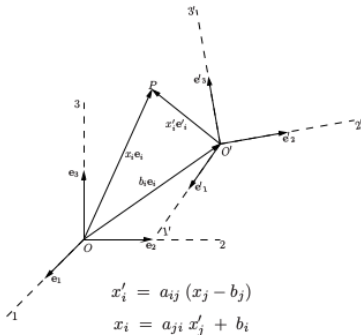


$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} \quad \text{ortonormalidade}$$

$$\underline{e}_i \times \underline{e}_j = \epsilon_{ijk} \underline{e}_k \quad \text{orientação directa}$$

$$\underline{x} = x_i \underline{e}_i \quad \text{vector posição}$$

Mudança de referencial ortonormal (rotação+translação)



$$\underline{e}'_i = a_{ij} \underline{e}_j$$

$$\underline{e}_i = a_{ji} \underline{e}'_j$$

Matriz de mudança de base

$$a_{ij} = \cos(\underline{e}'_i, \underline{e}_j) = \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j$$

ortonormalidade

$$a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$$

$$x'_i = a_{ij} (x_j - b_j)$$

$$x_i = a_{ji} x'_j + b_i$$

Construção de uma base de ordem superior

♣ Seja $\{\underline{e}_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ a base Cartesiana fixa, e $\{\underline{g}_j\}_{1 \leq j \leq 3}$ uma base movél tal que $\underline{g}_j(x) = a_{ij}(x)\underline{e}_i$, onde a_{ij} são os componentes da matriz de mudança de base. Temos também $\underline{e}_i = a_{ji}(x)\underline{g}_j(x)$

♣ Definimos $\{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j\}_{1 \leq i, j \leq 3}$ como elemento de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ igual a $(0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, ou seja com 8 entradas nulas excepto a entrada ij . Desta forma definimos os 9 elementos da base Cartesiana de ordem 2.

♣ Temos então $\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = a_{ki}(x)a_{lj}(x)\underline{g}_k \otimes \underline{g}_l$, e, invertindo a matriz de mudança de base, $\underline{g}_k \otimes \underline{g}_l = a_{ki}(x)a_{lj}(x)\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$. Desta forma, definimos os 9 elementos da base movél de ordem 2,

$\{\underline{g}_k \otimes \underline{g}_l\}_{kl}$.

♣ Por uma construção parecida, definimos também os elementos da base de ordem 3, $\{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k\}_{1 \leq i, j, k \leq 3}$ (26 entradas nulas excepto a ijk igual a 1) e $\{\underline{g}_m \otimes \underline{g}_n \otimes \underline{g}_p\}_{1 \leq m, n, p \leq 3}$, e todos os ordens superiores.

Definição de um tensor de ordem k

♣ Uma propriedade física (ou um campo) é dada por um tensor de ordem 0 (um escalar), 1 (um vector: $v(1)$), 2, 3, 4 ou mais.

Tensor de ordem 2: $T(2)$

♣ Um campo T é um tensor de ordem 2 se for dado por um conjunto de 9 scalares $x \mapsto T_{ij}(x)$, $1 \leq i, j \leq 3$ tais que $T = T_{ij}(x)\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ (suma em i e j). O mesmo campo é também dado na base móvel por 9 scalares $x \mapsto T'_{ij}(x)$, $1 \leq i, j \leq 3$ tais que $T = T'_{kl}(x)\underline{g}_k \otimes \underline{g}_l$ (suma em k e l). Portanto, este tensor verifique a seguinte propriedade por mudança de base: $T'_{kl} = a_{ki}a_{lj}T_{ij}$

Tensor de ordem k : $T(k)$

♣ Um campo U é representado por um tensor de ordem k se for dado por 3^k componentes numa base tensorial de ordem k , do tipo $\{\underline{g}_m \otimes \cdots \otimes \underline{g}_p\}_{1 \leq m, \dots, p \leq 3}$ (efetua-se k vezes o produto tensorial da base de ordem 1). A relação por mudança de base é:

$$U'_{m \dots p} = a_{mi} \cdots a_{pj} U_{i \dots j}.$$

Operações com tensores

- ▶ Soma de $P(m)$ com $Q(m)$ (mesma ordem), componente por componente: $P_{ijkl\dots} + Q_{ijkl\dots}$.
- ▶ Produto tensorial de $u(1)$ com $v(1)=w(2)$: $w_{ij} = u_i v_j$.
Propriedade (comutatividade): $w'_{ij} = u'_i v'_j$ (\star).
- ▶ Produto tensorial de $U(m)$ com $V(n)=W(n+m)$: tensor de ordem $n+m$.
- ▶ Contracção: traço de $U(2)=\text{scalar } s = U_{ij}\delta_{ij} = U_{ii}$.
Propriedade (comutatividade): $s = U'_{ii} = U_{ii}$ (\star).

Tensores especiais

- ▶ Identidade (de substituição): $\delta_{ij} = \delta'_{ij}$
- ▶ Simbolo de Levi-Civita (de permutação):

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se a permutação de } ijk \text{ for par} \\ -1 & \text{se for ímpar} \\ 0 & \text{senão} \end{cases} .$$

Conceito de tensores objetivos-1-

Mudança de observador

♣ Definido através uma mudança de sistema de referência. Os acontecimentos são representados pelo par (x^*, t^*) . Portanto, existe uma matriz ortogonal $t \mapsto Q(t)$, um vector $t \mapsto c(t)$ e um scalar a tais que $x^* = Q(t)(x - x_O) + c(t)$ e $t^* = t - a$.

♣ Além disso, existe uma mapa, dita de **deformação**, Φ^* tal que $x^* = \Phi^*(\Phi^{-1}(x, t), t^*)$, onde $X := \Phi^{-1}(x, t)$ é o chamado **ponto material** associado a x (em t) na configuração de referência (ou inicial) escolhida no primeiro sistema de referência.

Transformação objetiva por mudança de observador

Logo: $x_2^* - x_1^* = Q(t)(x_1 - x_2)$. Agora um vector v é dito **objetivo** se se verifica: $v^* = \hat{v}(x^*) = Q(t)v$, ou seja se transforma por mudança de observador como um tensor.

♣ Um tensor de ordem 2 será objetivo se $U^* = \hat{U}(x^*) = Q(t)UQ^T(t)$. Um escalar é sempre objetivo: $\alpha^* = \alpha$.

Conceito de tensores objetivos-2-

Exemplos

- ▶ Seja $T = u \otimes v$, onde u e v são 2 vectores objetivos. Portanto $T^* = u^* \otimes v^* = Q(t)u \otimes Q(t)v = Q(t)(u \otimes v)Q^T(t)$. (★)
- ▶ Seja o campo escalar $\alpha = \hat{\alpha}(x, t)$. Portanto $\partial_{x_i^*} \alpha^* = \partial_{x_j} \alpha \frac{\partial x_j}{\partial x_i^*}$, ou seja $\nabla_{x^*} \alpha^* = Q(t) \nabla_x \alpha$. (★)
- ▶ Seja $f(x, t) = 0$ uma superfície com normal exterior $N(x) := \frac{\nabla f(x, t)}{|\nabla f(x, t)|}$. Portanto $N^*(x^*) = \frac{\nabla f^*(x^*, t)}{|\nabla f^*(x^*, t)|} = \frac{Q(t) \nabla f(x, t)}{|Q(t)| |\nabla f(x, t)|} = Q(t) N(x)$. (★)

Conceito de tensores objetivos-2-

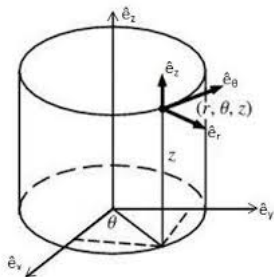
Contro-exemplos

- ▶ Velocidade: $\dot{x}^* = Q(t)\dot{x} + \dot{Q}(t)(x - x_O) + \dot{c}$
- ▶ Aceleração: $\ddot{x}^* = Q(t)\ddot{x} + \ddot{Q}(t)(x - x_O) + \dot{Q}(t)\dot{x} + \ddot{c}$
 - ♣ Nota que \ddot{x} será objetivo por mudança inercial de observador, i.e., onde $\dot{Q} = \ddot{c} = 0$: a aceleração é um vector objectivo Galileano (rotação rigida + translação uniforme).
- ▶ Gradiente de velocidade:

$$\nabla_{x^*}\dot{x}^* = Q(t)\nabla\dot{x}Q^T(t) + \dot{Q}(t)Q^T(t) \text{ (Nota: } \nabla^*x = Q^T\text{)}.$$
 - ♣ Nota que $\frac{d}{dt}QQ^T = 0$ e portanto $\dot{Q}Q^T$ é antisimétrica.
 - ♣ Logo, a parte simétrica do gradiente de velocidade, $\nabla_{x^*}^S\dot{x}^*$, é um tensor objetivo.
 - ♣ NOTA: parte simétrica de um tensor U de ordem 2: $U^S := \frac{1}{2}(U + U^t).$

Componentes e coordenadas polares cilíndricas

Rotação em torno de $\underline{e}_3 = \underline{g}_z$ ($A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)



$$x = x_i \underline{e}_i$$

$$\underline{g}_r := \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_y$$

$$\underline{g}_\theta := \frac{\partial x}{\partial \theta} / \left\| \frac{\partial x}{\partial \theta} \right\| = -\sin \theta \underline{e}_x + \cos \theta \underline{e}_y$$

$$x = x_{3D} = r \underline{g}_r + z \underline{g}_z$$

Velocidade, Aceleração

$$\dot{x}_{3D} = \dot{r} \underline{g}_r + r \dot{\theta} \underline{g}_\theta + \dot{z} \underline{g}_z$$

$$\ddot{x}_{3D} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \underline{g}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \underline{g}_\theta + \ddot{z} \underline{g}_z$$

Acréscimo de caminho

$$dx = d(r \underline{g}_r + z \underline{g}_z) = dr \underline{g}_r + dz \underline{g}_z + r d\theta \underline{g}_\theta$$

Operador gradiente cilíndrico

$$du = dx \cdot \nabla u = u_{,r} dr + u_{,\theta} d\theta + u_{,z} dz$$

$$\Rightarrow \nabla = \underline{g}_r \partial_r + \frac{\underline{g}_\theta}{r} \partial_\theta + \underline{g}_z \partial_z.$$

Div, Curl, Δ

Trabalho em casa

Seja o vector $\underline{v} = v_r \underline{g}_r + v_\theta \underline{g}_\theta + v_z \underline{g}_z$. Calcular em componentes e coordenadas cilíndricas, com ajuda do operador ∇ cilíndrico definido em cima,

- ▶ A divergência $\nabla \cdot \underline{v}$ de \underline{v}
- ▶ O rotor $\nabla \times \underline{v}$ de \underline{v}
- ▶ O Laplaciano $\Delta u := \nabla \cdot \nabla u$ do escalar u .

Resposta parcial

♣ Calcula-se formalmente o produto interno:

$(\underline{g}_r \partial_r + \frac{g_\theta}{r} \partial_\theta + \underline{g}_z \partial_z) \cdot (v_r \underline{g}_r + v_\theta \underline{g}_\theta + v_z \underline{g}_z)$, tendo em conta que

(por exemplo) $\frac{g_\theta}{r} \partial_\theta \cdot v_r \underline{g}_r = \frac{g_\theta}{r} \cdot v_r \partial_\theta \underline{g}_r = v_r / r$.

Portanto: $\nabla \cdot \underline{v} = 1/r \partial_r (r v_r) + 1/r \partial_\theta v_\theta + \partial_z v_z$.

Tomando $v = \nabla u$, logo $\Delta u = 1/r \partial_r (r \partial_r u) + 1/r^2 \partial_\theta^2 u + \partial_z^2 u$.

Movimento e sua observação

Cinemática

♣ Estudo do movimento de um sistema relativamente a um observador, chamado sistema de referência. Precisamos de:

- ▶ um parametro contínuo t chamado tempo
- ▶ um sistema de coordenadas fixo: $\mathcal{B}_0 = \{0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$.

♣ No tempo $t \in I \subset \mathbb{R}$, o sistema é representado pelo domínio $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$. O movimento é definido por uma família de **mapas de deformação** dependentes do tempo:

$X \in \Omega_{t_0} \mapsto x = \Phi(X, t; t_0) \in \Omega_t$: aplica a posição X em t_0 na nova posição $x = \Phi(X, t)$ em t . Temos:

- ▶ $\Phi(\cdot, t_0; t_0) = \text{Id}$
- ▶ $\Phi(\cdot, t'; t) \circ \Phi(\cdot, t; t_0) = \Phi(\cdot, t'; t_0)$
- ▶ $(t, X) \mapsto \Phi(\cdot, t; t_0)$ é pelo menos \mathcal{C}^1
- ▶ Φ bijetiva, regular, Φ^{-1} diferenciável $\Rightarrow \det \nabla_X \Phi \neq 0$.

O movimento de um ponto material

Posição de um ponto material

$$\clubsuit x = \overrightarrow{OM}(t) = \Phi(X, t; t_0) = \Phi(X, t) \quad (t_0 \text{ é fixado}).$$
$$X = \Phi^{-1}(x, t)$$

Deslocamento de um ponto material

$$\clubsuit u = \hat{u}(X, t) = \Phi(X, t) - X.$$

Velocidade de um ponto material

$$\clubsuit \dot{x} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM}(t) = v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(X, t).$$

Acceleeração de um ponto material

$$\clubsuit \ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OM}(t) = \frac{d}{dt} v(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(X, t) .$$

Lemma: Velocidade e aceleração são independentes da escolha de t_0 (origem do tempo). (homework)

Representação do movimento

♣ Nota: Tomamos $t_0 = 0$ e portanto $\Omega_{t_0} = \Omega_0$.

Representação Lagrangiana

$x = \Phi(X, t; 0) = \Phi(X, t)$ ($t_0 = 0$).

♣ É uma representação pelas trajetórias. Em função do ponto material na sua posição de referência, i.e. na origem.

Representação Euleriana

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= v(x, t) = \partial_t \Phi(\Phi^{-1}(x, t), t) \\ x(0) &= X \end{cases}.$$

♣ É uma representação pelo campo de velocidades. Em função do ponto material na sua posição corrente, i.e. no tempo t .

Derivadas eulerianas e lagrangiana

Seja um ponto material M que estava em X em t_0 e em x em t .

Seja $f_M(t)$ uma função (tensorial de ordem k).

♣ Representação Lagrangiana: $f_M(t) = f^L(X, t)$

♣ Representação Euleriana: $f_M(t) = f^E(x, t)$,

onde $x = \Phi(X, t)$. Portanto $f^L(X, t) = f^E(\Phi(X, t), t)$.

Derivadas Euleriana de f_M : $\frac{\partial f^E}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial f^E}{\partial t}$

Derivadas Lagrangiana de f_M : $\frac{\partial f^L}{\partial X_i}$ e $\frac{\partial f^L}{\partial t}$.

♣ Derivada **material** $\frac{D}{Dt}f_M := \partial_t f^L = \frac{d}{dt}f^L|_{X \text{ fixo}} =$
 $\frac{d}{dt}f^E \circ \Phi|_{X \text{ fixo}} = \partial_t f^E(t) + v(x, t) \cdot \nabla f^E(x, t)$.

Representação Euleriana da aceleração

Temos $f_M = v_M =$ velocidade do ponto material M . Portanto

$v_M = v^E(x, t) = v(x, t)$ ou $v_M = v^L(X, t)$.

Lemma: $a_M = \frac{D}{Dt}v_M(t) = \partial_t v^L = \partial_t v(x, t) + v \cdot \nabla v(x, t)$. (★)

Velocidade de um corpo rígido -1-

Movimento rígido

♣ Ω_t é um corpo rígido se $t \mapsto d(x, x') = \text{cte}$ para cada $x, x' \in \Omega_t$. Movimento é rígido se $d(X, X') = d(x, x')$, onde $x = \Phi(X, t)$ e $x' = \Phi(X', t)$. Portanto Φ é uma isometria de Ω_{t_0} a Ω_t , ou seja, Φ é uma transformação afim, i.e., uma roto-translação: temos então $x = QX + c$, onde $c \in \mathbb{R}^3$ e $Q^T = Q^{-1}$.

Lemma 1:

♣ A velocidade $v(x, t)$ corresponde ao movimento de um corpo rígido, se e somente se, $(x - x') \cdot (v(x, t) - v(x', t)) = 0$ para cada $x, x' \in \Omega_t$ e cada $t \in I$. (★)

Lemma 2:

♣ A condição $(x - x') \cdot (v(x, t) - v(x', t)) = 0$ para cada $x, x' \in \Omega_t$ no tempo t se, e somente se, existe $b(t) \in \mathbb{R}^3$ e $A(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ antisimétrica t.q. $v(x, t) = A(t)x(t) + b(t)$, onde (existe ω t.q.) $A_{ij} = -\epsilon_{ijk}\omega_k(t)$, i.e., $v(x, t) = \omega(t) \times x(t) + b(t)$. (★)

Velocidade de um corpo rígido -2- Proofs

Proof 1

$$\frac{d}{dt} \|x'(t) - x(t)\|^2 = \frac{d}{dt} (x'(t) - x(t), x'(t) - x(t)) = 0, \text{ ou seja, } 0 = 2(x'(t) - x(t), \frac{d}{dt} x'(t) - \frac{d}{dt} x(t)) = (x'(t) - x(t), v'(x', t) - v(x, t)).$$

Proof 2

Seja $U(x) = v(x, t)$ e $V(x) = U(x) - U(0)$. Supomos que $0 \in \Omega$.

♣ Se $U(x) = Ax + b$, logo $U(x) - U(x') = A(x - x')$ e portanto $(U(x) - U(x')) \cdot (x - x') = 0$ por A ser antisimétrica.

♣ Assumindo $(U(x) - U(x')) \cdot (x - x') = 0$ para quaisquer x, x' , tomando $x' = 0$ logo $V(x) \cdot x = 0$. Tomando $x' = \underline{e}_i$, temos $(U(x) - U(\underline{e}_i)) \cdot (x - \underline{e}_i) = 0$, ou seja $(V(x) - V(\underline{e}_i)) \cdot (x - \underline{e}_i) = 0$ (*). Por (*), $V(x) \cdot \underline{e}_i = -V(\underline{e}_i) \cdot x$. Escrevendo $V(x)$ em componentes, temos $V(x) = V_i(x) \underline{e}_i$ com $V_i(x) = V(x) \cdot \underline{e}_i$.

Temos $x = x_j \underline{e}_j$ e portanto $V_i(x) = -V(\underline{e}_i) \cdot \underline{e}_j x_j$. Logo, $v_i(x, t) = A_{ij} x_j + b$ com $A_{ij} = -V(\underline{e}_i) \cdot \underline{e}_j$ e $b = U(0)$. Por (*) com $x = \underline{e}_j$, $A = -A^T$ e $A_{ij} = \epsilon_{ijk} \omega_k(t)$ com $w_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kmn} A_{mn}$.

Determinante

Expressão indicial do determinante

♣ Seja uma matriz $M \in \mathbb{M}^{3 \times 3}$. Temos

$\det M = (M_{2\star} \times M_{3\star}) \cdot M_{1\star} = M_{1i}\epsilon_{ijk}M_{2j}M_{3k}$. Invertendo duas linhas, muda o sinal, portanto $\epsilon_{pqr} \det M = \epsilon_{ijk}M_{pi}M_{qj}M_{rk}$.

Invertendo linhas e colunas e multiplicando por ϵ_{pqr} ,

$$\text{logo } \epsilon_{pqr}\epsilon_{pqr} \det M = \epsilon_{pqr}\epsilon_{ijk}M_{ip}M_{jq}M_{kr}$$

$$\Rightarrow \det M = \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}M_{ip}M_{jq}M_{kr}$$

♣ Toma $M = F := \nabla_X \Phi = \nabla_X x$ (i.e., $M_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j}$). Logo

$$\partial_t F = \partial_t \nabla \Phi = \nabla_X v = \nabla_x v \nabla_X x = \nabla_x v F \quad (\Leftrightarrow \text{Curl } F = 0).$$

Lema: diferencial do determinante do gradiente de deformação

$$\begin{aligned} \partial_t (\det \nabla \Phi) &= 3 \times \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} (\partial_t \nabla \Phi_{ip}) \nabla \Phi_{jq} \nabla \Phi_{kr} = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\nabla_x v)_{il} \epsilon_{pqr} F_{lp} F_{jq} F_{kr} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\nabla_x v)_{il} \epsilon_{ljk} \det F = \\ &= \frac{1}{2} (2\delta_{il}) (\nabla_x v)_{il} \det F = (\nabla_x v)_{ii} \det F = \text{div } v \det F. \end{aligned}$$

Diferencial de um integral de volume dependente do tempo

Objetivo: Calcular

$$\frac{d}{dt} \left(\mathcal{K}(t) := \int_{\omega_t} k_M(t) dx \right), \forall \omega_t \subset \Omega_t,$$

onde k_M é um campo tensorial de ordem $k \geq 0$.

Assumimos que $\Phi \in \mathcal{C}^1(\Omega_0 \times I)$ e que $v \in \mathcal{C}^1(\Omega_t \times I)$.

Lei de conservação: forma geral

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}(t) = \int_{\omega_t} B(x, t) dx + \int_{\partial \omega_t} s(x, t) dx,$$

onde B é a contribuição de volume (bulk part) e s a de superfície.

Teorema do transporte de Reynolds

Teorema do transporte de Reynolds

Seja $k_M(t) = k(x, t)$, com $k \in \mathcal{C}^1(\Omega_t \times I)$, e $\omega_t \subset \Omega_t$.

Logo

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt}(t) = \int_{\omega_t} \partial_t k(x, t) dx + \int_{\omega_t} \operatorname{div} (k(x, t) \otimes v(x, t)) dx,$$

ou seja (com N , a normal unitária a $\partial\Omega_t$),

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt}(t) = \int_{\omega_t} \partial_t k(x, t) dx + \int_{\partial\omega_t} (k \otimes v)(x, t) N(x, t) dS(x),$$

DEM.

♣ Seja $J := \det F = \det \nabla \Phi$. Mudança de variável:

$$\mathcal{K}(t) := \int_{\omega_t = \Phi(\omega_0)} k(x, t) dx = \int_{\omega_0} k(\Phi^{-1}(X, t), t) J dX$$

♣ Pelo lema anterior: $\frac{d}{dt}(kJ) = J\partial_t k + J(\nabla k)v + k\partial_t J = J\partial_t k + J \operatorname{div} (k \otimes v) - Jk \operatorname{div} v + kJ \operatorname{div} v = (\partial_t k + \operatorname{div} (k \otimes v)) J$.

Conservação da massa

Seja $\rho(x, t)$ a massa volumica (ou densidade) de um corpo.

Conservação da massa (forma global)

$$\clubsuit m(\omega_t) = \int_{\omega_t} \rho(x, t) dx = m(\omega_0) = \text{cte} \quad (\forall \omega_t \subset \Omega_t).$$

Condição no Jacobiano ($J = \det F = \det \nabla \Phi$)

$$\clubsuit m(\omega_t) = \int_{\omega_0} \rho(\Phi(X, t), t) J dX = \int_{\omega_0} \rho_0(X, 0) dX, \quad \forall \omega_t \subset \Omega_t.$$

Logo, a forma local: $\rho J = \rho_0$, e

$$\rho = \text{cte} \Rightarrow \boxed{\text{incompressibilidade} \Leftrightarrow J = 1.}$$

Pequenas deformações

$$\clubsuit F = \nabla_X \Phi = \mathbb{I} + \nabla_X u$$

$$\begin{aligned} \clubsuit 6 \det F &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} (\mathbb{I} + \nabla_X u)_{ip} (\mathbb{I} + \nabla_X u)_{jq} (\mathbb{I} + \nabla_X u)_{kr} = \\ &= ((\nabla_X u)_{ip} \epsilon_{iqr} \epsilon_{pqr} + (\nabla_X u)_{jq} \epsilon_{pjr} \epsilon_{pqr} + (\nabla_X u)_{kr} \epsilon_{pqk} \epsilon_{pqr} + \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk}) \\ &+ O(|\nabla u|^2) = 6((\nabla_X u)_{ii} + 1) + O(|\nabla u|^2). \quad (\text{Nota: } \epsilon_{pqk} \epsilon_{pqr} = 2\delta_{kr}) \end{aligned}$$

$$\clubsuit \text{Em deformações linearizadas: } J = \det F \sim \text{div } u + 1, \text{ i.e.:}$$

$$\rho/\rho_0 \sim 1 - \text{div } u \quad (\rho < \rho_0 \text{ em tracção} \Rightarrow \text{div } u > 0).$$

Equação de continuidade

Equação de continuidade

Consideramos $\frac{d}{dt}m(\omega_t) = 0$. Logo, para cada $(x, t) \in \Omega_t \times I$ temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(v\rho) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v = 0. \quad (\star).$$

♣ Para um fluido: se ρ for constante longo as linhas de fluxo, i.e., $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, então o fluido tem $\operatorname{div} v = 0$.

Densidade de massa de um campo

Seja $\mathcal{C}(x, t)$ uma densidade de volume de um campo. Então a densidade de massa (ou “específica”) é $c(x, t) := \frac{\mathcal{C}(x, t)}{\rho(x, t)}$ e portanto

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \mathcal{C}(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} c(x, t) \rho(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \frac{Dc(x, t)}{Dt} \rho(x, t) dx. \quad (\star).$$

♣ E como dizer que a massa $dm = \rho dx$ do ponto material não varia com o movimento do mesmo.

Centros de massas

Seja $m := m(\Omega_t)$ a massa de Ω_t .

Centro de massa

♣ Centro de massa: $\text{CM}(\Omega_t) := \frac{1}{m} \int_{\Omega_t} x(t) \rho(x, t) dx$.

♣ Pelo Lema, $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} c(x, t) \rho(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \frac{Dc(x, t)}{Dt} \rho(x, t) dx$.

Tomando $c(x, t) = x(t)$,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} x(t) \rho(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \frac{Dx(t)}{Dt} \rho(x, t) dx = \int_{\Omega_t} v(x, t) \rho(x, t) dx.$$

Momentos

♣ Momento linear: $P(\Omega_t) := \int_{\Omega_t} v(x, t) \rho(x, t) dx$,

♣ Momento cinético: $L_O(\Omega_t) := \int_{\Omega_t} x \times v(x, t) \rho(x, t) dx$,

sendo $x := \overrightarrow{OP}$ ($L_O = 0$ momento relativo ao ponto O).

Cinematica

Derivadas do centro de massa

$$\frac{d}{dt} CM(\Omega_t) = \frac{1}{m} \int_{\Omega_t} v(x, t) \rho(x, t) dx = \frac{1}{m} P(\Omega_t) =: CMV(\Omega_t).$$

Centros de massa de velocidade e aceleração

$$\frac{d}{dt} CMV(\Omega_t) = \frac{1}{m} \int_{\Omega_t} \frac{Dv}{Dt}(x, t) \rho(x, t) dx =$$

$$CMA(\Omega_t) := \frac{1}{m} \int_{\Omega_t} a(x, t) \rho(x, t) dx.$$

Derivadas dos momentos= Resultante dinamica

$$RD(\Omega_t) := \frac{d}{dt} P(\Omega_t) = m \frac{d^2}{dt^2} CM(t) = \int_{\Omega_t} a(x, t) \rho(x, t) dx.$$

$$\frac{d}{dt} L_O(\Omega_t) := \int_{\Omega_t} \left(\frac{Dx}{Dt} \times v(x, t) + x \times \frac{Dv}{Dt} \right) \rho(x, t) dx.$$

i.e.
$$\frac{d}{dt} L_O(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} x \times a(x, t) \rho(x, t) dx.$$

Forças-1-

Seja dois sistemas S e S'

♣ Em cada tempo t o sistema S' atua uma força no sistema S . A mesma é representada por uma medida vectorial $d\sigma_t(x)$.

Os 4 tipos de forças

- ▶ Força de volume: $d\sigma_t(x) = f(x, t)dx$
- ▶ Força de superfície: $d\sigma_t(x) = f_S(x, t)dS(x)$
- ▶ Força de linha: $d\sigma_t(x) = f_L(x, t)dL(x)$
- ▶ Força pontual: $d\sigma_t(x) = f_P(x)\delta_x(t)$

Lembrete: massa de Dirac: seja φ uma função continua com suporte compacto, então $\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x)$

Forças resultantes

$$\sigma_t(\Omega_t) := \int d\sigma_t(x) = \int_{\Omega_t} f(x, t)dx \text{ ou}$$

$$\sigma_t(\Omega_t) := \int d\sigma_t(x) = \int_{\Sigma_t} f_S(x, t)dS(x), \text{ onde } \Sigma_t \cup \Omega_t \neq \emptyset, \text{ etc.}$$

Leis fundamentais da dinâmica

Propriedade de aditividade

♣ Seja $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ disjuntos mas não mutuamente separados. Então

$$F_{\Omega \rightarrow \Omega_1 \cup \Omega_2}(t) := \sigma_t^\Omega(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \sigma_t^\Omega(\Omega_1) + \sigma_t^\Omega(\Omega_2) = \\ F_{\Omega \rightarrow \Omega_1}(t) + F_{\Omega \rightarrow \Omega_2}(t)$$

representa a força atuada por Ω sobre $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

♣ Também: $F_{\Omega_1 \cup \Omega_2 \rightarrow \Omega}(t) := \sigma_t^{\Omega_1 \cup \Omega_2}(\Omega) = \sigma_t^{\Omega_1}(\Omega) + \sigma_t^{\Omega_2}(\Omega) = \\ F_{\Omega_1 \rightarrow \Omega}(t) + F_{\Omega_2 \rightarrow \Omega}(t)$

representa a força atuada por $\Omega_1 \cup \Omega_2$ sobre Ω .

Leis fundamentais da dinâmica (Modelo de Newton)

Num referencial inercial temos:

♣ $\frac{d}{dt}P(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} v(x, t) \rho(x, t) dx = \text{RD}(\Omega_t) = \\ \int_{\Omega_t} a(x, t) \rho(x, t) dx = d\sigma_t(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} f(x, t) dx = F_{\rightarrow \Omega_t}(t).$

♣ $\frac{d}{dt}L_O(\Omega_t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} x \times v(x, t) \rho(x, t) dx = \\ \int_{\Omega_t} x \times a(x, t) \rho(x, t) dx = \int_{\Omega_t} x \times d\sigma_t(x) = \int_{\Omega_t} x \times f(x, t) dx.$

Terceira lei de Newton

Princípio de Acção-Reacção

Seja Ω_1, Ω_2 disjuntos mas não mutuamente separados. Então

$$F_{\Omega_1 \rightarrow \Omega_2}(t) = -F_{\Omega_2 \rightarrow \Omega_1}(t).$$

♣ DEM. Seja $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Então

$$F_{\rightarrow \Omega_2}(t) = F_{\Omega_1 \rightarrow \Omega_2}(t) + F_{\Omega^c \rightarrow \Omega_2}(t) \text{ e}$$

$$F_{\rightarrow \Omega_1}(t) = F_{\Omega_2 \rightarrow \Omega_1}(t) + F_{\Omega^c \rightarrow \Omega_1}(t).$$

Pela aditividade e a segunda lei de Newton, $RD(\Omega) = F_{\rightarrow \Omega}(t) = F_{\Omega^c \rightarrow \Omega}(t) = F_{\Omega^c \rightarrow \Omega_1 \cup \Omega_2}(t) = F_{\Omega^c \rightarrow \Omega_1}(t) + F_{\Omega^c \rightarrow \Omega_2}(t) = F_{\rightarrow \Omega_2}(t) - F_{\Omega_1 \rightarrow \Omega_2}(t) + F_{\rightarrow \Omega_1}(t) - F_{\Omega_2 \rightarrow \Omega_1}(t) = RD(\Omega_1 \cup \Omega_2) - F_{\Omega_1 \rightarrow \Omega_2}(t) - F_{\Omega_2 \rightarrow \Omega_1}(t) \Rightarrow F_{\Omega_1 \rightarrow \Omega_2}(t) = -F_{\Omega_2 \rightarrow \Omega_1}(t).$

Movimento do centro de massa (Modelo de Newton)

♣ O movimento do centro de massa de um corpo é o mesmo de o de uma massa pontual, cuja massa é a massa total do corpo, e sobre a qual atua uma força igual a força resultante (i.e., total) no corpo: $m \frac{d^2}{dt^2} CM(t) = RD(\Omega_t) = F_{\rightarrow \Omega_t}(t). (\star)$

O tensor de Cauchy -1-

♣ Seja Ω_1, Ω_2 disjuntos mas não mutuamente separados, e $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Seja $\Sigma := \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$.

Forças coesivas

♣ A força atuada por Ω_2 sobre Ω_1 é uma força de contacto em Σ , ou seja é representada por uma medida vectorial absolutamente continua respeito a dS , cuja densidade é $T(x)dS(x)$ (no tempo t).

♣ O vector T só depende da posição $x \in \Sigma$ e da normal $N(x)$: $T = \hat{T}(x, N)$.

♣ Fixado N , $x \mapsto T(x, N)$ é contínuo.

T é chamado força interna (ou coesiva, ou das tensões internas) em x na direcção N .

Lemma 1

♣ Para todos os $x \in \Omega$ and todos os $N \in \mathbb{S}^2$ ($|N| = 1$) temos: $T(x, N) = -T(x, -N)$. (★)

O tensor de Cauchy -2-

Tomando $x = 0$ e $N = \underline{e}_i$, o vector $T(0, \underline{e}_i)$ tem 3 componentes σ_{ji} , $1 \leq j \leq 3$, ou seja: $T(0, \underline{e}_i) = \sigma_{ji} \underline{e}_j$. Portanto $T_j(0, \underline{e}_i) = \sigma_{ji}$ é a componente j da força atuada pelo meio contínuo em x num faceta de normal \underline{e}_i .

Tetraedro de Cauchy

♣ Seja $\Omega_1 \subset \Omega$ um tetraedro de cume a origem 0, e dado pelos 3 outros pontos A_i no eixo \underline{e}_i . Portanto a base $A_1 A_2 A_3$ tem uma normal N , enquanto $0 A_1 A_2$ tem normal $-\underline{e}_3$, $0 A_2 A_3$ tem normal $-\underline{e}_2$, $0 A_1 A_3$ tem normal $-\underline{e}_1$.

♣ Temos também $N_i = N \cdot \underline{e}_i =$ o ângulo entre $A_1 A_2 A_3$ e $0 A_k A_l$, $k, l \neq i$.

♣ Para além, a equação de $A_1 A_2 A_3$ é $N_i x_i = h$, onde h é a distância de $A_1 A_2 A_3$ a 0.

Equação do movimento de um contínuo

Teorema de Cauchy (linearidade das tensões)

Temos $T(x, N) = N_i T(x, \underline{e}_i) = \sigma_{ji} N_i \underline{e}_j$, ou $T_j(0, N) = \sigma_{ji} N_i$. (★)

Equação do movimento, ou Conservação do momento linear

♣ Seja um contínuo de massa volumica $\rho(x, t)$ sobre o qual atua um força de densidade volumica $f(x, t)$. Portanto

$\rho a = \rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \frac{D^2 x}{Dt^2} = f + \text{div } \sigma$. As equações do corpo em equilíbrio são $-\text{div } \sigma = f$.

♣ DEM. Toma $\omega_t \subset \Omega_t$. Portanto

$\int_{\omega_t} a(x, t) \rho(x, t) dx = \int_{\partial \omega_t} T(x, N; t) dS(x) + \int_{\omega_t} f dx$. Pelo

Teorema da divergência e o teorema de Cauchy ($T = \sigma N$):

$\int_{\omega_t} a(x, t) \rho(x, t) dx = \int_{\omega_t} (f - \text{div } \sigma) dx, \forall \omega_t \Rightarrow$ forma local.

Simetria do tensor de Cauchy, ou Conservação do momento cinetico

O tensor de Cauchy é simétrico: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. (★)

Conservação da Energia cinética

Potência das tensões internas

Para qualquer sistema material $\omega_t \subset \Omega_t$, a potência das tensões internas é igual à $\mathcal{P}_i(\omega_t) := \int_{\omega_t} (\sigma \cdot d) dx$, com $d := \nabla^S v$ a taxa de deformação associadas à velocidade v (não devem ser pequenas!).

Teorema: Conservação da Energia cinética

Para qualquer sistema material $\omega_t \subset \Omega_t$ e num qualquer referencial inercial, a derivada com o tempo da energia cinética é igual à soma das potência das forças externas de volume f e de contacto T atuadas no sistema, menos $\mathcal{P}_i(\omega_t)$.

Forma global (num referencial inercial, $\forall \omega_t \subset \Omega_t$)

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \frac{\rho v^2}{2} dx = \int_{\omega_t} (f \cdot v - \sigma \cdot d) dx + \int_{\partial \omega_t} \sigma N \cdot v dS(x).$$

♣ DEM. Utilisa-se a equação do movimento, e integrações por parte e o facto de $\sigma \cdot \nabla v = \sigma \cdot d$ (pela simetria de σ).

Conservação da Energia total

Lei: Primeiro princípio da termodinâmica

\forall sistema material $\omega_t \subset \Omega_t$, existe uma função “energia interna” específica e (i.e., por unidade de massa) tal que a derivada com o tempo da soma da energia interna e da energia cinética seja igual à soma das potências das forças externas de volume f e de contacto T atuadas no sistema mais a soma das contribuições por unidade de tempo de calor volumico (i.e. fonte de calor Q mais radiação r) e da contribuição de calor χ na superfície.

Lemma: \exists fluxo de Calor J t.q. $\chi = -J \cdot N$. (Cf. Cauchy)

Forma global (num referencial inercial, $\forall \omega_t \subset \Omega_t$)

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dx = \int_{\omega_t} (f \cdot v + Q + r) dx + \int_{\partial \omega_t} (\sigma N \cdot v - J \cdot N) dS(x) \quad (\star).$$

Conservação da Energia total como princípio primeiro

Forma local (derivada material da energia interna)

$$\rho \frac{De}{Dt} = \sigma \cdot d + Q + r - \operatorname{div} J \text{ em } (x, t) \in \Omega_t \times [0, T].$$

♣ DEM. Utilisa-se a eq. do movimento, e integrações por partes.

Da conservação da Energia á da massa e do momento linear

♣ A invariança de Galileo ou inercial diz que a forma global deve ser invariante por transformação $v \rightarrow v + v_0$ onde v_0 é uma velocidade constante. Portanto substituímos v por $v + v_0$ em (\star) .

Por $\partial_t v_0 = \nabla v_0 = 0$ obtemos a forma local:

$$\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v \right) \frac{v_0^2}{2} + v_0 \left(v \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v \right) + \rho \frac{Dv}{Dt} - f - \operatorname{div} \sigma \right) = 0.$$

♣ Pela arbitrariedade de v_0 obtemos:

► Massa: $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v = 0,$

► Momento linear: $\rho \frac{Dv}{Dt} - f - \operatorname{div} \sigma = 0.$

As 3 leis de conservação: forma generica

♣ Seja C_M uma quantidade extensiva do sistema no ponto material M , de densidade especifica $c_M(t) = c(x, t)$.

♣ A conservação de C_M escreve se como:

$$\int_{\omega(t)} \partial_t(\rho c)(x, t) dx = \int_{\omega(t)} \eta^c(x, t) dx - \int_{\partial\omega(t)} \xi^c \cdot N dS(x),$$

onde (N é a normal exterior a $\omega(t)$)

- ▶ η^c : taxa de produção (≥ 0) ou destruição (≤ 0) de C_M por unidade de volume
- ▶ ξ^c : fluxo de C_M através de $\partial\omega(t)$ por unidade de area e tempo

As 3 leis

<u>Quantidade</u> (C_M)	<u>Flusso</u> : ξ^c	<u>Fonte</u> : η^c
Massa(ρ)	ρv	0
Momento linear(ρv)	$-\sigma + \rho v^2$	f
Energia interna(ρe)	$J + \rho e v$	$Q + r + \sigma \cdot d$

Equação do Calor

Interpretação física da energia interna

A energia interna de um ponto material representa a soma de todas as energias (cinética, potencial) das moléculas do ponto material.

Equação do Calor

Tomando $e = cT$, com c o calor específico, e T a temperatura, temos pela Lei de Fourier $J = -k\nabla T$ e a forma local da conservação da Energia :

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \sigma \cdot d + Q + r + k\Delta T. \text{ Nota que}$$

- ▶ $\frac{DT}{Dt} = \partial_t T + \nabla T \cdot v$ (tomar conto do termo de transporte)
- ▶ $\sigma \cdot d$ representa o aquecimento devido ao trabalho das tensões
- ▶ Equação do Calor é acoplada com a do movimento.

Simplificações usuais

Sistema no repouso: $v = \nabla v = d = 0$ e portanto $\frac{DT}{Dt} = \partial_t T$.

♣ Em deformações infinitesimais: $\frac{D}{Dt} = \partial_t$ se

$$|\nabla T| \sim |\nabla v| \sim |\nabla u| \ll 1.$$

Segunda Lei da termodinâmica -1- Introdução

Preâmbulo

A 1ª Lei da termodinâmica é um princípio em relação a conservação da **quantidade de energia**. Por sua vez, a 2ª Lei da termodinâmica nos diz algo sobre a **qualidade da energia**. O princípio é o seguinte: havendo a conservação da energia total de um sistema pela primeira Lei, o 2º princípio nos diz que a parte da energia “utilizável” diminui enquanto a parte “inutilizável” aumenta.

♣ Em termos microscópicos, a 2ª Lei da termodinâmica nos diz que um sistema tende a evoluir a mais desordem, desorganização, caos. Esta evolução não pode voltar atrás: chama-se a **irreversibilidade** do processo.

♣ Portanto a 2ª Lei da termodinâmica dá uma orientação ao tempo (fora dos sistemas reversíveis, onde “não há tempo”).

♣ Exemplo: o Calor vai da parte quente a parte fria, e não o oposto (sem outras forças a atuar no sistema).

Segunda Lei da termodinâmica -2- Introdução

Energia “utilizável”

É basicamente a energia que se transforme em trabalho (tipicamente: ativar um pistão) necessário para a produção, crescimento, reparação, etc., de subsistemas.

Energia “inutilizável”

Os processos indicados acima não existem sem gastar energia (tipicamente: por dissipação térmica, atrito, etc.) Esta parte consiste em energia perdida, por não ser transformável.

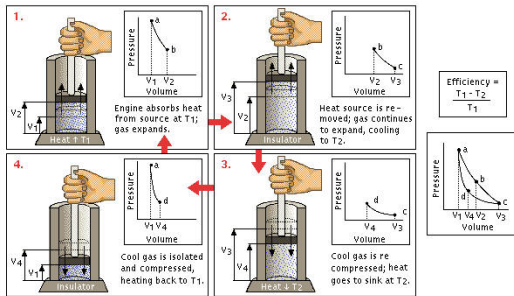
Entropia

A **entropia** é uma medida da parte “inutilizável” da energia de um sistema. Portanto é uma quantidade escalar que aumenta com esta última energia. Por isso, diz-se que a entropia mede o desordem de um sistema.

Segunda Lei da termodinâmica -3-: Estados em equilíbrio

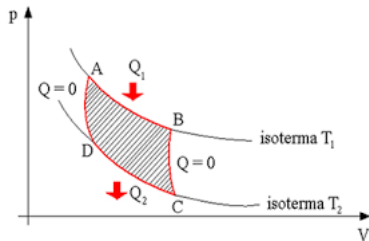
Máquina de Carnot

Até meados do século XIX, acreditava-se ser possível a construção de uma máquina térmica ideal, que seria capaz de transformar toda a energia fornecida em trabalho, obtendo um rendimento total (100%). Para demonstrar que não seria possível, o engenheiro N. Carnot (1796-1832) propôs uma máquina térmica teórica que se comportava como uma máquina de rendimento máximo.



- ♣ Este ciclo seria composto de quatro processos
- ♣ Consideramos o caso ideal onde não ha atrito em nenhum dos quatros.

Segunda Lei da termodinâmica -4-: Ciclo de Carnot



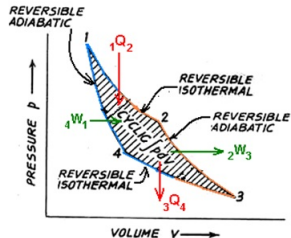
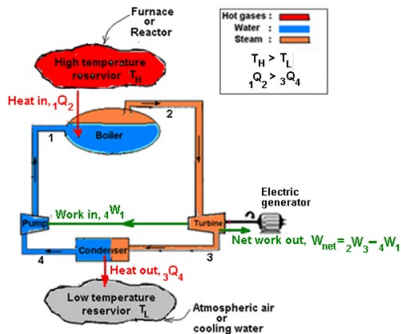
♣ Medimos que: $\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}$

♣ Pela 1ª Lei, o rendimento é $\frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$
(partes útil/fornecida da energia em saída) = $1 - \frac{T_2}{T_1}$

♣ 100% $\Leftrightarrow T_2 = 0$ ou $T_1 = \infty$ (fisicamente impossível)

- ▶ A-B: Uma expansão **isotérmica** reversível. O sistema recebe calor da fonte de aquecimento
- ▶ B-C: Uma expansão **adiabática** reversível. O sistema não troca calor com as fontes térmicas
- ▶ C-D: Uma compressão isotérmica reversível. O sistema cede calor para a fonte de resfriamento
- ▶ D-A: Uma compressão adiabática reversível. O sistema não troca calor com as fontes térmicas

Segunda Lei da termodinâmica -5-: Máquina de Carnot



Segunda Lei da termodinâmica -6-: Consequências

Existência de energia “inutilizável”

O ciclo ideal de Carnot mostre-nos que mesmo sem atrito, ou seja no caso de uma máquina perfeita **não é possível** transferir todo o Calor fornecido em trabalho útil, pelo que existirá sempre uma parte da energia “inutilizável”.

Ciclo real (A,B,C,D em equilíbrio)

Introduzimos a forma diferencial $\frac{\delta Q}{T}$. Num ciclo de Carnot temos $\oint_{ABCD} \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0$. Sendo esta forma fechada, é exata, i.e. existe uma função escalar S (dita “de estado”) tal que $dS = \frac{\delta Q}{T}$.

♣ Num sistema real (com atrito) teríamos $Q'_1 \geq Q_1$ e $Q'_2 \leq Q_2$.

Portanto num sistema real, i.e., não reversível: $\frac{\delta Q}{T} = \frac{Q'_2}{T_2} - \frac{Q'_1}{T_1} \leq 0$.

♣ Logo, num processo real do estado A ao estado B temos

$$\int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{irrev}} + \int_B^A \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rev}} = \int_A^A \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{irrev}} \leq 0, \quad \forall A, B$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} - dS\right) \leq 0, \quad \forall A, B} : \text{Relação de Clausius-Plank.}$$

Segunda Lei da termodinâmica -7- 2º Princípio

♣ No âmbito da Mecânica racional, assumimos a validade de Clausius-Plank mesmo fora do equilíbrio.

2º Princípio da Termodinâmica: $\exists S$ (a entropia) t.q $dS \geq \frac{\delta Q}{T}$.

Para um qualquer sistema material $\omega_t \subset \Omega_t$, existe uma função “entropia” específica s tal que a derivada com o tempo da entropia do sistema seja maior ou igual à soma das contribuições por unidade de tempo de calor volumico e do fluxo de calor J atuados no sistema, ambos divididos pela temperatura.

Forma global

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho s dx \geq \int_{\omega_t} \frac{Q + r}{T} dx - \int_{\partial \omega_t} \frac{J \cdot N}{T} dS(x).$$

Forma local

♣ Pelo teorema de Transporte, $\forall (x, t) : \rho \frac{Ds}{Dt} \geq \frac{Q+r}{T} - \operatorname{div} \left(\frac{J}{T} \right).$

Segunda Lei da termodinâmica 8- Energia livre

Desigualdade de Clausius-Duhem

Pela conservação da energia (forma local):

$$\forall \text{ referencial inercial, } \forall(x, t) : \rho T \frac{Ds}{Dt} - \rho \frac{De}{Dt} \geq -\sigma \cdot d + J \cdot \frac{\nabla T}{T}$$

(Nota: $\operatorname{div} \left(\frac{J}{T} \right) = \frac{1}{T} \operatorname{div} J - J \cdot \frac{\nabla T}{T^2} = \frac{1}{T} \operatorname{div} J + J \cdot \nabla \frac{1}{T}$).

Energia livre de Helmholtz

Definida como $h := e - Ts$.

2º Princípio da Termodinâmica em forma local

Pela desigualdade de Clausius-Duhem: em qualquer referencial

inercial temos: $\forall(x, t) : 0 \leq \sigma \cdot d - \rho \left(\frac{Dh}{Dt} - s \frac{DT}{Dt} \right) - J \cdot \frac{\nabla T}{T}$.

Dissipação mecânica

Definida como $\mathcal{D} := \sigma \cdot d - \rho \frac{Dh}{Dt} \geq 0$ ($T = \text{constante em C.-D.}$).

Segunda Lei da termodinâmica -7a- Irreversibilidade

Conservação da Entropia

Podemos também exprimir o segundo princípio na forma seguinte:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \eta^s - \operatorname{div} \xi^s,$$

onde

- ▶ η^s : fonte volumica de entropia (processo interno ao sistema), ou taxa de produção local (= dissipação local)
- ▶ ξ^s : fluxo local de entropia (do ou para o exterior) (tipicamente: $\xi^s = \frac{J}{T}$ em primeira aproximação)
- ▶ Clausius-Plank / Duhem implica que: $\eta^s \geq \frac{Q+r}{T}$

Segunda Lei da termodinâmica -9- Modelização

Regra de modelização

Uma lei constitutiva (ou de comportamento) de um modelo deve sempre ser amissível pelo 2º princípio da Termodinâmica, ou seja deve satisfazer à desigualdade de Clausius-Duhem.

Exemplo

Assumimos que $e = \hat{e}(F, s)$ e que $v = 0$. Portanto C.-D. implica que $\rho \frac{Ds}{Dt} (T - \frac{\partial e}{\partial s}) - J \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0$. Portanto a escolha

$$\begin{cases} J = -k \nabla T & (\text{Fourier}) \\ T = \frac{\partial e}{\partial s} \end{cases} \quad \text{é consistente.}$$

♣ Geralmente, para uma transformação isovolumica, a única maneira de garantir a desigualdade é de tomar $T := \frac{\partial e}{\partial s}$ (pode ser visto como uma definição da temperatura).

♣ Outra interpretação (Liu, 1972): T^{-1} é um multiplicador de Lagrange relativo a conservação da energia.

Segunda Lei da termodinâmica -10- Princípio de máxima entropia máxima

♣ Seja a **energia total** $\mathcal{E} := E_{\text{int}} + E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}}$, onde

$$E_{\text{int}} := \int_{\omega_t} \rho e dx, \quad E_{\text{cin}} := \int_{\omega_t} \rho \frac{v^2}{2}, \quad E_{\text{pot}} := \int_{\omega_t} -f \cdot u dx + \int_{\partial\omega_t} -g \cdot u dS(x).$$

A 1ª Lei escreve-se como (i)

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E} = \int_{\omega_t} (Q + r) dx - \int_{\partial\omega_t} J \cdot N dS(x) \quad \text{e a 2ª como (ii)}$$

$$\frac{d}{dt} S \geq \int_{\omega_t} \frac{Q+r}{T} dx - \int_{\partial\omega_t} \frac{J \cdot N}{T} dS(x), \quad \text{com a **entropia** } S := \int_{\omega_t} \rho s dx.$$

Princípio de máxima entropia máxima de Clausius (1822–1888)

Consideramos um sistema adiabático (i.e., $J = r = 0$) sem fontes de Calor volumicas (i.e., $Q = 0$). Portanto, a 1ª Lei, (i), significa a conservação no tempo de \mathcal{E} . i.e., $\frac{d}{dt} \mathcal{E} = 0$ enquanto a 2ª Lei, (ii), o crescimento no tempo de S , i.e., $\frac{d}{dt} S \geq 0$.

♣ Esta observação conduz Rudolf. E. Clausius a escrever:

“The energy of the universe is constant, and the entropy of the universe tends to a maximum”.

Segunda Lei da termodinâmica -11- Princípio de máxima entropia/minima energia

Princípio de máxima entropia/minima energia

Consideramos um sistema com $Q + r = 0$, de volume constante e de temperatura constante $T = T_0$ na fronteira (só). Pela 2^a Lei, $\frac{d}{dt}(T_0 S) \geq - \int_{\partial\Omega_t} J \cdot N dS(x)$, i.e. temos $\frac{d}{dt}\mathcal{A} \leq 0$, $\mathcal{A} := \mathcal{E} - T_0 S$:

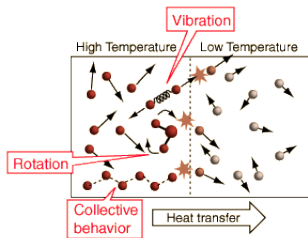
- ▶ Minimiza-se \mathcal{E} (energia) a entropia constante, ou
- ▶ Maximiza-se S (entropia) a energia constante.

♣ Notamos:

- ▶ $T = \text{cst}, f, g = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = \int_{\omega_t} (\rho h + \rho \frac{v^2}{2}) dx : \frac{d}{dt}\mathcal{A} \leq 0$ and $\int_{\omega_t} \rho \frac{v^2}{2} dx \leq 0 \Rightarrow \frac{Dh}{Dt} \leq 0$. (cf. fluido Newtoniano) .
- ▶ Pode-se maximizar S e minimizar \mathcal{E} simultaneamente.
- ▶ Existe sistemas onde maximizar S é contraditório com minimizar \mathcal{E} : neste caso, um princípio só é que ganha.
- ▶ Não é preciso chegar aos valores minimos/maximos: é suficiente ter \mathcal{E} a diminuir, enquanto S aumentar.

Segunda Lei da termodinâmica -12- Temperatura

♣ A relação $T := \frac{\partial e}{\partial s}$ vem do 2º Princípio: é uma definição macroscópica da temperatura, através a Lei de comportamento $s \mapsto e(\cdot, s)$. Portanto a noção de temperatura segue a de entropia e de energia interna. Contudo, nem s nem e foram definidas a escala macroscópica (foi só postulada suas existências).



♣ Ambos s e T têm uma definição à escala microscópica.

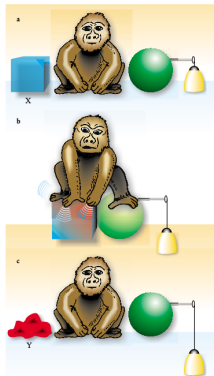
Cadeia de decaimento da energia

♣ $E_{\text{int}} + E_{\text{pot}} \rightsquigarrow E_{\text{cin}} \rightsquigarrow \mathcal{D} :=$
dissipação de Calor

♣ Energias utilizáveis acabam por se transformar em dissipação térmica, aumentando a entropia do sistema

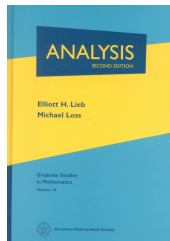
♣ A temperatura é a tendência de um ponto material ceder energia espontaneamente à própria vizinhança.

Segunda Lei da termodinâmica -13- Abordagem axiomático



♣ O peso significa que só foi realizado trabalho (força do Gorilla considerada infinita)

♣ Devido a Elliott H. Lieb e Jakob Yngvason
(*Phys. Today* 53 (4), 32 (2000))



Transformação adiabática

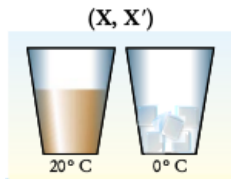
Definida como um processo termodinâmico de um estado X (de equilíbrio) de um sistema a um estado Y deste sistema, onde

- ▶ não existe transferência de Calor com o exterior ao sistema (i.e., é isolado)
- ▶ trabalho tem sido realizado (sobre o sistema pelo exterior ou sobre o do exterior sobre o sistema).

Segunda Lei da termodinâmica -14- Abordagem axiomática

Relação lógica entre dois estados: $X \prec Y$

Se existe uma transformação adiabática que faz evoluir o sistema do estado X ao estado Y , escrevemos que $X \prec Y$ e digamos que X precede Y .



Estados conjuntos (combinados)

Seja X e X' dois estados. Portanto o estado conjunto é o par (X, X') .

Entropia

Sejam um conjunto de pares (X, Y) onde $X \prec Y$. Pela 2ª Lei, podemos codificar esta lista numa função S definida sobre todos os estados do sistema tal que $X \prec Y \Leftrightarrow S(X) \leq S(Y)$ (temos = se a transformação estiver reversível).

Segunda Lei da termodinâmica -15- Additividade da entropia

♣ Pelo 2º princípio, a entropia S deve verificar a propriedade de aditividade: $S(X, X') = S(X) + S(X')$.

♣ $\forall (Y, Y')$ tal que $X \prec Y$ e $X' \prec Y'$. Portanto $(X, X') \prec (Y, Y')$.

♣ O oposto é falso: $\exists (X, X') \prec (Y, Y')$ sem que $X \prec Y, X' \prec Y'$.

♣ Portanto $S(X) + S(X') \leq S(Y) + S(Y')$

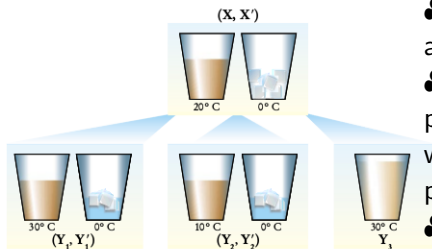
(mesmo se $S(X) \geq S(Y)$).

Exemplos (precedência adiabática)

♣ Misturando (adiabático!) pode-se aquecer whiskey e fundir gelo

♣ Colocando os 2 copos em contacto pode-se aquecer o gelo e arrefecer o whiskey: o estado conjunto é dado por uma transformação adiabática.

♣ Mas arrefecer o whiskey sozinho não é adiabático (e $S(X) \geq S(Y_2)$).



Segunda Lei da termodinâmica -16- Scaling da entropia

Grandeza intensiva ou extensiva

As propriedades intensivas são propriedades físicas que não dependem da extensão do sistema (i.e., do scaling), isto é, são independentes do tamanho ou da quantidade de matéria de um dado sistema. Já as propriedades extensivas, dependem da extensão do sistema, isto é, variam de forma proporcional com o tamanho ou a quantidade de matéria existente num dado sistema.

- ▶ Propriedades intensivas: temperatura (T em K), pressão (p em Pa), massa volúmica (ρ em kg/m^3), ponto de ebulição.
- ▶ Propriedades extensivas: massa (m em kg), volume (V em m^3), energia interna (U em J), **entropia** (S em J/K), capacidade calorífica (C_p ou C_V em J/K)

A entropia é uma grandeza extensiva: $S(\lambda X) = \lambda S(X)$.

Segunda Lei da termodinâmica -17- Propriedades

Sumário das propriedades básicas de \prec

- ▶ Reflexividade: $X \prec X$
- ▶ Transitividade: $X \prec Y$ and $Y \prec Z \Rightarrow X \prec Z$
- ▶ Junção adiabática: $X \prec Y$ and $X' \prec Y' \Rightarrow (X, X') \prec (Y, Y')$
- ▶ Extensão adiabática: $X \prec Y \Rightarrow \lambda X \prec \lambda Y$
- ▶ Corte adiabático: $\forall 0 \leq \lambda \leq 1, X \prec ((1 - \lambda)X, \lambda X)$
- ▶ Recombinação adiabática: $\forall 0 \leq \lambda \leq 1, ((1 - \lambda)X, \lambda X) \prec X$

Segunda Lei da termodinâmica -18- Hipótese de Comparação

Hipótese de Comparação

Seja X e Y estados (em equilíbrio) de um sistema (massa total e composição química dadas), simples ou combinados. Então

$$X \prec Y \text{ ou } Y \prec X.$$

♣ Sejam X_0 , X e X_1 , 3 estados de um sistema. Pelas Hipótese de Comparação e as propriedades de corte e de recombinação, temos $\forall 0 \leq \lambda \leq 1$, $X \prec ((1 - \lambda)X_0, \lambda X_1)$ ou $((1 - \lambda)X_0, \lambda X_1) \prec X$.

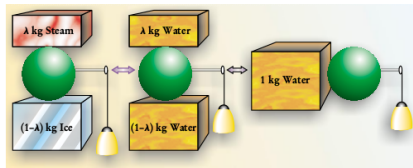
♣ Seja X_0 , X e X_1 estados (em equilíbrio) de um sistema tal que $X_0 \prec X \prec X_1$ (exemplo: mesma massa de água nos estados de gelo, líquido, e vapor).

Segunda Lei da termodinâmica -19- Existência

Teorema de existência de um limite inferior à entropia

Existe pelo menos um $0 \leq \lambda \leq 1$ tal que $((1 - \lambda)X_0, \lambda X_1) \prec X$.

♣ Logo, $(1 - \lambda)S(X_0) + \lambda S(X_1) \leq S(X)$. Tomando $S(X_0) = 0$ e $S(X_1) = 1$ como entropias de referência dos estados de referência X_0 e X_1 (equivale a dizer que $S(X_0)$ e $S(X_1)$ são os valores mínimo e máximo da entropia para este sistema), temos $\lambda \leq S(X)$.



♣ Extraímos or introduzimos energia no sistema sob a forma de trabalho só, por exemplo com uma máquina de Carnot reversível que funciona entre as parte do sistema com alta e baixa temperaturas.

Segunda Lei da termodinâmica -20- Definição da entropia

Unicidade da entropia

$$S(X) := \lambda_{\max} = \max\{\lambda : ((1 - \lambda)X_0, \lambda X_1) \prec X\}.$$

♣ Corollario (reversibilidade adiabática):

$X \prec ((1 - \lambda_{\max})X_0, \lambda_{\max}X_1)$ (visto que temos $=$).

Definição da entropia

Seja $X_0 \prec X \prec X_1$.

DEF: A entropia $S(X)$ do estado X de um sistema é igual à fração máxima de X_1 necessária para transformar X_1 em 1kg de X com ajuda de $(1 - S(X))$ de X_0 .

♣ Nota-se que esta definição é puramente derivada de princípios lógicos. Em particular, não se fala nem de temperatura, nem de energia ou de Ciclos de Carnot reversíveis.

Mecânica dos fluidos -1- O fluido Newtoniano

Definições

- ▶ Um contínuo é dito fluido se o tensor das tensões é uma função isotropa de $d = \nabla^S v$. i.e., $\sigma = \hat{\sigma}(d)$.
- ▶ Um fluido é dito Newtoniano se $\hat{\sigma}(d)$ é afina em d .
- ▶ Um fluido é dito incompressível se $\text{tr } d = \text{div } v = 0$.

♣ Pela estrutura de uma forma quadrática isotropa, um fluido Newtoniano verifique $\sigma \cdot d = -p \text{tr } d + A(\text{tr } d)^2 + B \text{tr } d^2$. Logo, sua Lei constitutiva é $\hat{\sigma}(d) = -p\mathbb{I} + 2\mu d + \lambda \text{tr } d \mathbb{I} = -p\mathbb{I} + \mathbb{A}d$.

Pressão

♣ p é chamada pressão hidrostática: $p = \hat{p}(T, \rho)$

♣ Para fluido incompressível, a pressão é definida como menos um terço do traço das tensões, i.e. $p := -\frac{1}{3} \text{tr } \sigma$. A partida, não existe uma lei constitutiva entre p e d , pois que $p = \tilde{p}(x, t)$ é considerado um multiplicador de Lagrange pelo vínculo $\text{div } v = 0$.

Mecânica dos fluidos -2- Estática

♣ No repouso, i.e., se $v = 0$, temos $d = 0$ e portanto $\sigma = -p\mathbb{I}$.

Lema 1

Seja um fluido no repouso e supomos que as forças de volume derivam de um potencial, i.e., $f = -\nabla\mathcal{P}$. Portanto $p + \mathcal{P} = \text{cste}$.

♣ DEM. Logo, pelo equilíbrio $-\text{div } \sigma = f$.

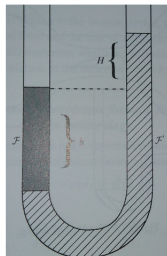
♣ Caso da gravidade: $\mathcal{P} = \rho_0 g z$ onde ρ_0 é a densidade constante do fluido.

♣ Fluido no repouso com fronteira livre:

$p_a + \mathcal{P} = \text{cste} \Rightarrow \mathcal{P} = \text{cste}$. Logo $z = \text{cste}$.

♣ Caso de um fluido em rotação mas com $d = 0$ numa base em rotação (i.e. imóvel com respeito ao suporte): acrescenta-se as forças centrífugas, $\mathcal{P} = \rho_0 g z - \rho_0 \omega^2 \frac{r^2}{2}$. Logo, $z = \rho_0 \omega^2 \frac{r^2}{2g} + \text{cste}$: perfil=paraboloide de revolução.

Mecânica dos fluidos -3- Estatica

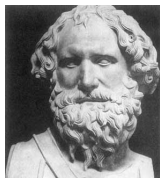


Equilíbrio entre 2 fluidos

Temos $f = \nabla p$ and $f = -\rho g e_z$.

Logo, $p = p_a - \rho g z$ e portanto:

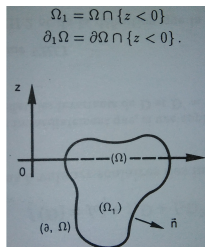
$$\rho h = \rho'(h + H).$$



Princípio de Archimedes (287-212 BC. Syracuse (Sicilia), Alexandria (Grecia))

A soma das forças de contacto atuadas sobre um corpo inteiramente ou parcialmente imerso num fluido no repouso é uma força vertical igual a menos o peso do volume de água deslocado, e atuando no centro de massa G do volume imerso.

Mecânica dos fluidos -4- Princípio de Archimedes



♣ Seja

$\Gamma = \{z = 0\} \cap \Omega_1$ e N a normal exterior á $\partial_1 \Omega$.

DEM. (Archimedes). Trata-se de calcular

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{\partial \Omega_1 = \partial_1 \Omega \cup \Gamma} \sigma N dS(x) = \int_{\partial_1 \Omega} -p \mathbb{I} N dS(x) \\
 &\quad - \int_{\Gamma} p_a \mathbb{I} \underline{e}_z dS(x) = \int_{\partial_1 \Omega} (\rho_0 g z - p_a) \mathbb{I} N dS(x) - \\
 &\quad \int_{\Gamma} p_a \mathbb{I} \underline{e}_z dS(x) = \int_{\partial \Omega_1} (\rho_0 g z - p_a) \mathbb{I} N dS(x), \text{ pois} \\
 &\quad \text{que } z = 0 \text{ em } \Gamma.
 \end{aligned}$$

Pelo teorema da divergência,

$$A = \int_{\Omega_1} \nabla(\rho_0 g z) dx = \int_{\Omega_1} \rho_0 g \underline{e}_z dx = m(\Omega_1) g \underline{e}_z.$$

Para além, $\int_{\partial \Omega_1 = \partial_1 \Omega \cup \Gamma} \overrightarrow{Gx} \times (\sigma N) dS(x) =$
 $\left(\int_{\Omega_1} \overrightarrow{Gx} dx \right) \times \rho_0 g \underline{e}_z = 0$, pela definição
 intrínseca do centro de massa.

Mecânica dos fluidos -5- Navier-Stokes

Equação de Navier-Stokes geral ou **compressível**

Pela equação do movimento, temos

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \operatorname{div} \sigma + f = -\nabla(p + \lambda \operatorname{tr} d) - 2\mu \operatorname{div} d + f.$$

Lembrando que $\operatorname{tr} d = \operatorname{div} u$ e $\operatorname{div} \nabla^T v = \nabla \operatorname{div} v$, temos

a equação de Navier-Stokes **compressível**:

$$\boxed{\rho \frac{Dv}{Dt} - \mu \Delta v + \nabla(p - (\lambda + \mu) \operatorname{div} v) = f,} \quad p = \hat{p}(\rho, T) = \alpha \rho T$$

\Rightarrow acoplado com

(i) (Massa) $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v = 0$ e

(ii) (Energia/Calor) $\rho c \frac{DT}{Dt} = \sigma \cdot d + Q + r + k \Delta T$

Restrições

A forma bilinear $\sigma \cdot d$ que aparece na formulação fraca deve ser fortemente elítica. É suficiente pedir estabilidade puntual. Isto vale, pois que $\mathbb{A} \geq 0$: $\mathcal{P}(d) := \mathbb{A}d \cdot d \geq 0$, $\forall d$ (i.e., a parte principal). Escrevendo $d = d^{\operatorname{dev}} + d^{\operatorname{sph}}$ com $d^{\operatorname{sph}} := \mathbb{I} \operatorname{tr} d / 3$:

$$\mathcal{P}(d) = 2\mu d^{\operatorname{dev}} \cdot d^{\operatorname{dev}} + (\lambda + 2/3\mu)(\operatorname{tr} d)^2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{\mu, \lambda + \frac{2\mu}{3} \geq 0}.$$

Mecânica dos fluidos -6- Navier-Stokes incompressível

♣ Incógnitas: (v, p) . (Caso compressível: também T e ρ).

Equação de Navier-Stokes incompressível: $\operatorname{div} v = 0$

$\Rightarrow \boxed{\rho_0 \frac{Dv}{Dt} - \mu \Delta v + \nabla p = f \quad (\operatorname{div} v = 0)},$ onde $\rho = \rho_0 = \text{cst}$ e p obtido a partir de v e f como $\Delta p = \operatorname{div} f - \rho_0 \nabla v \cdot \nabla^T v$.

$(\frac{Dv}{Dt}(t) = \frac{d}{dt}v^E(\Phi(X, t), t) = \partial_t v(x, t) + (v(x, t) \cdot \nabla)v(x, t),$ onde $v^E = v$. Com índices: $\frac{Dv_i}{Dt} = \partial_t v_i + v_j \partial_j v_i$).

ENS-i: propriedades

- ▶ Translação espacio-temporal: $x \rightarrow x + a, \quad t \rightarrow t + \tau$
- ▶ Isometrias (rotação/reflexão): $x \rightarrow Qx, Q^T Q = \mathbb{I}$
- ▶ Transformação de Galileio:

$$x \rightarrow x - v_0 t, \quad v \rightarrow v(x - v_0 t, t) + v_0$$
- ▶ Scaling $v(x, t), p(x, t)$ solução $\Rightarrow \lambda v(\cdot, \lambda^2 t), \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t)$ também é solução

Mecânica dos fluidos -7- Navier-Stokes incompressível

ENS-i: condições limites

Seja a velocidade relativa: $v_r = v - V_{\partial\Omega_t}$

- ▶ Fluido viscoso: $v_r = 0$ em $\partial\Omega_t$
- ▶ fluido perfeito: $v_r \cdot N = 0$
- ▶ Condição inicial: $(v(x, 0), p(x, 0)) = (v_0(x), p_0(x))$.

Adimensionalização, Numero de Reynolds

Define $\hat{x} = x/L$, $\hat{t} = t/\tau$, $\hat{v} = v/U$ ($U = L/\tau$),

$\hat{p} = p/U^2$, $\hat{f} = f\tau^2/L$: a ENS-c é re-escrita como (sem os \wedge)

$$\begin{cases} \frac{Dv}{Dt} + \nabla p - \text{Re}^{-1} \Delta v &= f \\ \text{div } v &= 0 \end{cases}.$$

♣ O escoamento não depende de ρ_0, L, U, μ separadamente, mas

sim do numero sem dimensões $\boxed{\text{Re} = \frac{L^2 \rho_0 / \mu}{L/U}} = \frac{\text{tempo viscoso}}{\text{tempo cinetico}}.$

Mecânica dos fluidos -8- ENS-i-Conservação da energia

♣ Termo não linear: $B(u, v) = (v \cdot \nabla)u$: $\frac{Dv}{Dt} = \partial_t v + B(v, v)$.

Lema 2: $\int_{\Omega} B(u, v) \cdot u dx = 0$ se $v = 0$ em $\partial\Omega$ e $\operatorname{div} v = 0$ em Ω .

DEM. Temos $\int_{\Omega} v_i \partial_i u_j u_j dx = \int_{\partial\Omega} v_i N_i u_j u_j dS(x)$
 $- \int_{\Omega} \partial_i (v_i u_j) u_j dx = - \int_{\Omega} \partial_i v_i u_j^2 dx - \int_{\Omega} v_i (\partial_i u_j) u_j dx \Rightarrow$
 $2 \int_{\Omega} v_i \partial_i u_j u_j dx = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} v) u^2 dx = 0.$

♣ Supomos v bastante regular. A energia cinética é igual a $\frac{1}{2} \|v\|_2^2$.

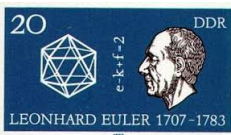
Lema 3: $\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|v\|_2^2 = -\operatorname{Re}^{-1} \|\nabla v\|_2^2 + (f, v)_2$ se $u = 0$ em $\partial\Omega$.

DEM. Integramos, $\int_{\Omega} (\partial_t v + B(v, v)) \cdot v dx = \int_{\Omega} -\nabla p \cdot v dx$
 $+ \int_{\Omega} (\operatorname{Re}^{-1} \Delta v + f) \cdot v dx = \int_{\Omega} p \operatorname{div} v dx - \int_{\Omega} \operatorname{Re}^{-1} \nabla v \cdot \nabla v dx$
 $+ \int_{\Omega} f \cdot v dx$. Pelo Lema 2 e a incompressibilidade, temos
 $\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|v\|^2 dx = - \int_{\Omega} \operatorname{Re}^{-1} \|\nabla v\|^2 dx + \int_{\Omega} f \cdot v dx.$

Mecânica dos fluidos -9- Navier-Stokes incompressível

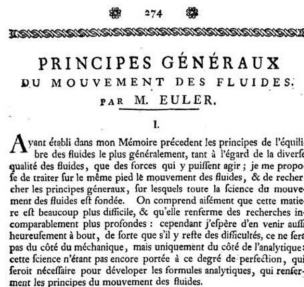
Caso limite 1: $Re \rightarrow \infty$: fluido perfeito: Eq. de Euler

Fluido sem dissipação viscosa, com turbulência...**não linear**:



(EE-i)

$$\begin{cases} \partial_t v + (v \nabla) \cdot v + \nabla p &= f \\ \operatorname{div} v &= 0 \end{cases}$$



Caso limite 2: $Re \rightarrow 0$: Eq. de Stokes

Velocidades e Re pequenos, fluido viscoso, **linear**:

$$(ES-i) \begin{cases} \partial_t v + \nabla p - Re^{-1} \Delta v &= f \\ \operatorname{div} v &= 0 \end{cases}.$$

Mecânica dos fluidos -10- Stokes incompressível e estacionario (ES-i-est)

$$\text{em } \mathbb{R}^3$$

$$(\star) \begin{cases} \operatorname{Re}^{-1} \Delta v - \nabla p &= -f \\ \operatorname{div} v &= 0 \\ |v|, p &\rightarrow 0 \text{ as } r = |x| \rightarrow \infty \end{cases}.$$

Metodo 1: solução canonica

Seja $F \in \mathbb{R}^3$. Consideramos (\star) com $f = F\delta_0$ e definimos $\mathbb{V} := \frac{\operatorname{Re}}{8\pi} \left(\frac{\mathbb{I}}{r} + \frac{x \otimes x}{r^3} \right)$. Portanto $v = \mathbb{V}F, p = \frac{F \cdot x}{4\pi r^3}$ é solução.

Lema 4: $\operatorname{Re}^{-1} \Delta v - \nabla p = 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

♣ DEM. Faz-se a mano.

Lema 5: $\operatorname{Re}^{-1} \Delta v - \nabla p = -F\delta_0$ em \mathbb{R}^3 .

♣ DEM. Temos que ver se

$$\operatorname{Re}^{-1}(\nabla v, \nabla w)_2 - (p, \operatorname{div} w)_2 = Fw(0), \quad \forall w \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)?$$

Mecânica dos fluidos -11- Stokes incompressível e estacionário em \mathbb{R}^3

Demonstração do Lema 5

$$\operatorname{Re}^{-1}(\nabla v, \nabla w)_2 - (p, \operatorname{div} w)_2 = \int_{B_\epsilon(0)} (\operatorname{Re}^{-1} \nabla v \cdot \nabla w - p \operatorname{div} w) dx \\ + \int_{B_\epsilon^c(0)} (\operatorname{Re}^{-1} \nabla v \cdot \nabla w - p \operatorname{div} w) dx = I + J. \text{ Logo}$$

$$|I| \leq C\epsilon, C > 0, \text{ pois } v \sim \frac{1}{r}, p \sim \frac{1}{r^2} \text{ e } dx = r^2 dr d\omega. \text{ Para além,} \\ J = \int_{B_\epsilon^c(0)} (\nabla p - \frac{\Delta v}{\operatorname{Re}}) \cdot w dx + \int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial_N v}{\operatorname{Re}} w dS(x) + \int_{\partial B_\epsilon} p w N dS(x).$$

$$\text{Por Lema 4, } = \int_{\partial B_\epsilon} (\frac{\partial_N v}{\operatorname{Re}} - p N) w dS(x). \text{ Logo } x = r \underline{e}_r, N = -\underline{e}_r \\ \Rightarrow \partial_N v = \frac{\operatorname{Re}}{8\pi r^2} (\mathbb{I} + \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) F, p N = \frac{-1}{4\pi r^2} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) F. \text{ Já} \\ \int_{\partial B_\epsilon} (\frac{\partial_N v}{\operatorname{Re}} - p N) w dS(x) = \mathcal{O}(\epsilon) + \frac{w(0)}{8\pi} \int_{S^2} (\mathbb{I} + 3\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) d\omega F \\ = \mathcal{O}(\epsilon) + \frac{w(0)}{8\pi} (4\pi \mathbb{I} + 3\frac{4\pi}{3}) F = \mathcal{O}(\epsilon) + w(0) F \text{ (expressar } \underline{e}_r \text{ na base} \\ \text{Cartesiana para integrar). Deixar } \epsilon \rightarrow 0.$$

Corollario: a solução de (★) é $v = \mathbb{V} \star f, p = \frac{x}{4\pi r^3} \cdot \star f$

DEM. Imediato, pois que $f = f \star \delta_0$.

Mecânica dos fluidos -12- ES-i-est em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado. Solução explícita no caso $f = 0$ (Papkovitch–Neuber)

Seja o vector Φ e o escalar χ tais que $\Delta\Phi = \Delta\chi = 0$. Logo

$$\begin{cases} v(x) = 2\operatorname{Re}(\nabla(x \cdot \Phi + \chi)(x) - 2\Phi(x)) \\ p(x) = \operatorname{div} \Phi(x) \end{cases} \quad \text{é solução.}$$

♣ Exemplo: $\chi = 0$ e $x \cdot \partial_i \Phi - \Phi_i = 0$ em $\partial\Omega$ implica $v = 0$ em $\partial\Omega$.

♣ Seja $V := \{v \in H_0^1(\Omega) : \operatorname{div} v = 0\}$ e
 $L_0^2(\Omega) := \{p \in L^2 : \int_{\Omega} p dx = 0\}$.

Teorema de existência no caso $v = 0$ em $\partial\Omega$.

Seja Ω conexo, Lipschitz, e $f \in H^{-1}(\Omega)$. Portanto

$\exists!(v, p) \in V \times L_0^2(\Omega)$ solução de (ES-c) com $v = 0$ em $\partial\Omega$.

♣ DEM. Seja $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_2$ e $L: (L, w) = \langle f, w \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$.

Sendo a uma norma para H_0^1 e L linear e continua em V ,

Lax-Milgram implica existência de um unico $(v, p) \in V \times L_0^2(\Omega)$ tal que $a(v, w) = L(w)$. Logo $\langle -\Delta v - f, w \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = 0, \forall w \in V$.

Pelo teorema de de Rahm, $\exists p \in L^2(\Omega) : \nabla p = -\Delta v - f$.

Mecânica dos fluidos -13- ES-i-est em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Problema de minimização e multiplicador de Lagrange

A solução obtida é o único mínimo de $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$:

$J(w) := \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \int_{\Omega} f \cdot w dx$, $\forall w \in V$. O gradiente de J em v é $\text{Grad } J(v) := -\Delta v - f \in H^{-1}(\Omega)$. Visto que v minimiza J no sub-espço V de vectores com divergência nula, o vínculo é a mapa linear $\text{div} : H_0^1(\Omega) \rightarrow L_0^2(\Omega)$, pelo que o teorema dos multiplicadores de Lagrange implica que $\text{Grad } J(v) = \Pi \circ \text{div}$, com $\Pi \in (L_0^2(\Omega))' = L_0^2(\Omega)$. Logo, $\exists p$:

$\text{Grad } J(v)[w] = \langle \Pi \circ \text{div}, w \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$
 $= (p, \text{div } w)_2 = \langle -\nabla p, w \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$ e portanto a pressão pode ser vista como um multiplicador de Lagrange para o vínculo $\text{div } v = 0$.

Mecânica dos fluidos -14- ES-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

$$(\blacksquare) \begin{cases} \partial_t v + \nabla p - \operatorname{Re}^{-1} \Delta v &= f & \Omega \\ \operatorname{div} v &= 0 & \Omega \\ v &= 0 & \partial\Omega \\ v(0) &= v_0 \end{cases}.$$

Formulação fraca (J.-L. Lions: 1928-2001)

Seja $v(\cdot, t) \in V$. Multiplicando (\blacksquare) por $w \in V$, temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v(x, t) w(x) dx + a(v, w) = \int_{\Omega} f(x, t) \cdot w(x) dx,$$

$$\text{onde } a(v, w) := \operatorname{Re}^{-1} \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla w(x) dx$$

♣ A mesma reescreve-se como uma ODE: procura-se $v(t)$ uma função em $]0, T[$ com valores em V tal que

$$(\square) \begin{cases} \frac{d}{dt} (v(t), w)_{L^2(\Omega)} + a(v(t), w) &= (f(t), w)_{L^2(\Omega)}, \\ v(0) &= v_0 \end{cases},$$

$\forall w \in V, 0 < t < T$, e onde v é contínua em 0.

Mecânica dos fluidos -15- ES-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

♣ Seja

$$V \curvearrowright W := \{v \in L^2(\Omega) : \operatorname{div} v = 0 \in \mathcal{D}'(\Omega), \gamma_{\partial\Omega}(v)N = 0\}.$$

Introduzimos $E_V^W := L^2(]0, T[; V) \cap \mathcal{C}([0, T]; W)$.

Teorema de existência de uma solução fraca; formulação geral

Seja $V \subset W$, dois espaços de Hilbert. Seja $a(u, v)$ uma forma simétrica, bilinear, contínua e coerciva em $V \times V$. Seja $T > 0$, $v_0 \in W$ e $f \in L^2(]0, T[; W)$. Portanto o problema (\square) tem uma solução única em E_V^W , e existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|v\|_{L^2(]0, T[; V)} + \|v\|_{\mathcal{C}([0, T]; W)} \leq C (\|v_0\|_W + \|f\|_{L^2(]0, T[; W)}).$$

♣ Assumindo bastante regularidade, $(\partial_t v + \operatorname{Re}^{-1} \Delta v - f, w)_2 = 0$, $\forall w \in V$ e portanto temos (\blacksquare) pelo teorema de de Rahm.

Mecânica dos fluidos -16- ES-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

♣ $\forall t : \frac{dv(t)}{dt} \in V' : \forall w \in V : \langle \frac{dv(t)}{dt}, w \rangle_{V',V} := \Pi'(t) \in \mathcal{D}'([0, T])$,
onde $\Pi(t) := (v(t), w)_{L^2(\Omega)} \in L^2(]0, T[)$. Temos

$\Pi'(t) \in \text{Der } \mathcal{C}([0, T]) : \langle \Pi'(t), \varphi(t) \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = - \int_0^T \Pi(t) \varphi'(t) dt$.

Geralmente, $\Pi'(t) \notin L^1(]0, T[)$, pois $\text{Der } \mathcal{C}([0, T]) \not\subseteq W^{1,1}(]0, T[)$.

♣ Se $v(t)$ for solução de (\square) , vê-se logo que $\Pi' \in L^1(]0, T[)$, pois
que $(f(t), w)_{L^2(\Omega)} - a(v(t), w) \in L^1(]0, T[)$. Logo $\langle \frac{dv(t)}{dt}, w \rangle_{V',V} \in L^1(]0, T[)$, pelo que $\langle v(t), w \rangle_{V',V} := (v(t), w)_{L^2(\Omega)} \in W^{1,1}(]0, T[) \hookrightarrow \mathcal{C}([0, T]) \Rightarrow v$ é \star -fraco contínuo com valores em $V' \Rightarrow$ tomar $v_0 \in V'$, pois $v(t) \rightharpoonup v(0) = v_0$ em V' , $t \rightarrow 0$.

♣ Formulação fraca com funções test que dependem do tempo:

$$(\diamond) \forall \psi \in \mathcal{C}_c(]0, T[; V) : 0 = \int_0^T \left(\langle \frac{dv(t)}{dt}, \psi(t) \rangle_{V',V} + a(v(t), \psi(t)) - \langle f(t), \psi(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)} \right) dt.$$

Mecânica dos fluidos -17- EE-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

$$\text{Consideramos } (\star) \begin{cases} \partial_t v + B(v, v) + \nabla p &= f = -\nabla \mathcal{P} \\ \operatorname{div} v &= 0 \\ \gamma_{\partial\Omega}(v)N &= 0 \end{cases}.$$

Lema 6:

$$B(v, v) := (v \nabla) \cdot v = \operatorname{div} (v \otimes v) = \nabla \frac{|v|^2}{2} + (\operatorname{Curl} v) \times v \text{ e} \\ \operatorname{div} B(v, v) = \nabla v \cdot \nabla^T v.$$

DEM. Imediato por cálculo indicial.

Equação da vorticidade: $\omega := \operatorname{Curl} v$.

(cf. o vetor rotação infinitesimal em elasticidade).

♣ Tomando o curl de (\star) , temos

$$\partial_t \omega + \operatorname{Curl} (\omega \times v) = \partial_t \omega + (v \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) v = \frac{D\omega}{Dt} - (\omega \cdot \nabla) v = 0.$$

♣ A $2D$, temos $\omega \cdot \nabla = 0$ e portanto $\frac{D\omega}{Dt} = 0$. Logo

$$\int_{\Omega} \omega(x, t) dx = \int_{\Omega} \omega(x, 0) dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot dL(x), \text{ por Stokes.}$$

\Rightarrow Há de resolver o sistema acoplado completo: $\Rightarrow \exists! v = \hat{v}(\omega)$.

Mecânica dos fluidos -18- EE-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

♣ Lembrando-se de

$$W := \{v \in L^2(\Omega) : \operatorname{div} v = 0 \in \mathcal{D}'(\Omega), \gamma_{\partial\Omega}(v)N = 0\}.$$

Leray decomposition

$$L^2(\Omega) = W \oplus W^\perp, W^\perp = \{u \in L^2(\Omega) : \exists \varphi \in H^1(\Omega), u = \nabla \varphi\}.$$

♣ Pois que $\nabla p \in W^\perp$, a projeção de (\star) sobre W é

$v \in W \subset H_0^1(\Omega) : \partial_t v + \tilde{B}(v, v) = 0$, onde \tilde{B} é a projecção de B sobre W . Depois: $p \in W^\perp : \Delta p = \operatorname{div} f - \rho_0 \nabla v \cdot \nabla^T v$.

Lema 7: Conservação da energia cinética $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|v\|^2 dx$

DEM. Temos $\frac{d}{dt} E_{\text{cin}} = \int_{\Omega} \partial_t v \cdot v dx =$

$$- \int_{\Omega} (B(v, v) + \nabla(p + \mathcal{P})) \cdot v dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} (bv) dx = 0, \text{ onde}$$

$b = \frac{|v|^2}{2} + p + \mathcal{P}$ pelo Lema 1, pelo teorema de Gauss e $vN = 0$.

Mecânica dos fluidos -19- EE-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Problema de Cauchy: $\partial_t v + \tilde{B}(v, v) = 0$, $v(0) = v_0$,
 onde a forma bilinear \tilde{B} é tal que: $\left(\tilde{B}(u, v), u \right)_{L^2(\Omega)} = 0$.

Existência em tempos curtos (Lichtenstein \sim 1925)

Seja $v_0 \in H^s(\Omega)$ ($s > 1 + d/2$). Existe um tempo $0 < T \leq \infty$ e uma solução única $v \in \mathcal{C}([0, T[; H^s(\Omega))) \cap \mathcal{C}^1([0, T[; H^{s-1}(\Omega)))$ do problema de Cauchy.

♣ Pois que $H^s(\Omega) \hookrightarrow C^1(\bar{\Omega})$ e $H^{s-1}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ temos uma única solução clássica $v \in \mathcal{C}^1(\Omega \times [0, T[)$, pois $\|v(t, \cdot) - v(t_0, \cdot)\|_{C^1} \rightarrow 0$ e $\|\partial_t v(t, \cdot) - \partial_t v(t_0, \cdot)\|_{\mathcal{C}} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$.

Mecânica dos fluidos -20- EE-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

♣ Pela formulação em rotor, temos: $\int_0^T \|\omega(t)\|_{\infty} dt < \infty$ onde T : tempo máximo de existência. Portanto

Extensão temporal (Beale–Kato–Majda, 1984)

A mesma solução pode ser estendida de modo único e regular ao intervalo $[T, T + \delta[$, $\delta > 0$ se $\omega \in L^1(]0, T[; L^\infty(\Omega))$.

♣ Fisicamente: existe uma instabilidade em $t = T$ se a vorticidade não estiver limitada.

Problema:

Gostaríamos de haver um resultado de existência num intervalo I independente da condição inicial, e para condições iniciais não tão regulares como \mathcal{C}^1 .

♣ Fisicamente temos que haver a energia cinética limitada, ou seja $\int_I \|v\|_2^2 dt < \infty$, dar um sentido fraco a $\operatorname{div}(v \otimes v)$ e ∇p . Para além temos $v_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ e v deve ser pelo menos contínua para darmos um sentido à condição inicial.

Mecânica dos fluidos -21- EE-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Solução fraca

O par (v, p) é solução no sentido das distribuições de (★) se $v \in \mathcal{C}(I; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)) \cap L^2_{\text{loc}}(I \times \mathbb{R}^d), p \in L^1_{\text{loc}}(I \times \mathbb{R}^d)$.

♣ Nota-se que nesta definição, não é exigido a conservação da energia: não resulta automaticamente, pois que $\partial_t v \in \mathcal{D}'$ (sentido de $\int_{\Omega} v \cdot \partial_t v dx$?)

Paradoxo de Scheffer-Schnirelman (1993, 1997))

Seja $f = 0$. Existe uma solução fraca de (★) não nula e com suporte compacto em $I \times \mathbb{R}^d$.

♣ Solução não é física, visto que existe um campo de velocidades não nulo, sem forçagem e com uma C.I. nula, e que volta a ser nulo num instante.

Mecânica dos fluidos -22- EE-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Teorema de De Lellis e Székelyhidi (2009)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto, $T > 0$, e $\bar{e} :]0, T[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_*$ uniformemente contínua e tal que $\bar{e} \in L^\infty(]0, T[; L^1(\Omega))$. Para $f = 0$ e qualquer $\eta > 0$ existe uma solução fraca tal que

- (i) $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R} : L^2(\mathbb{R}^d; \text{fraco}))$,
- (ii) $v(t, x) = 0$ se $(x, t) \notin]0, T[\times \Omega$,
- (iii) $\frac{|v(t, x)|^2}{2} = -\frac{d}{2}p(t, x) = \bar{e}(t, x)$, $\forall t \in]0, T[$ e q.t. $x \in \Omega$,
- (iv) $\sup_{0 \leq t \leq T} \|v(t, \cdot)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \leq \eta$.

♣ Nota-se que (iii) \Rightarrow velocidade pode ser localmente grandes quanto quizer num domínio pequeno quanto quizer, e a pressão constante ($\bar{e} = \text{cste} \Rightarrow$ sem interações entre partículas); (iv) \Rightarrow velocidade macroscópica quase invisível, com oscilações rápidas ($\partial_t v \sim \nabla \bar{e}$).

Mecânica dos fluidos -23- ENS-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Formulação forte

$$(\blacksquare) \begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p - \text{Re}^{-1} \Delta v & = f & \Omega \\ \text{div } v & = 0 & \Omega \\ v & = 0 & \partial\Omega \\ v(0) & = v_0 & \Omega \end{cases}.$$

Formulação fraca 1: funções test independente do tempo

Procura-se $v \in L^2([0, T[; V)$ tal que $\forall w \in V$:

$(\square) 0 =$

$$\frac{d}{dt}(v(t), w)_{L^2(\Omega)} + a(v(t), w) + (B(v, v), w)_2 - \langle f(t), w \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$$

vale em $\mathcal{D}'([0, T[)$, e $v(0) = v_0$ vale em V'

(i.e., continuidade fraca-★: $\langle v(t), \varphi \rangle_{V', V} \rightarrow \langle v_0, \varphi \rangle_{V', V}$).

Mecânica dos fluidos -24- ENS-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Formulação fraca 2: funções test dependente do tempo

Procura-se $v \in L^2(]0, T[; V)$ tal que $\frac{dv}{dt} \in L^1(]0, T[; V')$, que verifique $\forall \psi \in \mathcal{C}_c(]0, T[; V)$:

$$(\square\square) \int_0^T \left(\left\langle \frac{dv(t)}{dt}, \psi(t) \right\rangle_{V', V} + a(v(t), \psi(t)) + (B(v(t), v(t)), \psi(t))_2 - \langle f(t), \psi(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)} \right) dt = 0.$$

Lema 8: Equivalência das formulações

Seja $v \in L^2(]0, T[; V)$ e $f \in L^1(]0, T[; V')$. São equivalentes (i) v solução de (\square) e $\frac{dv}{dt} \in L^1(]0, T[; V')$, (ii) v solução de $(\square\square)$, e (iii) $v(t)$ é solução de (\blacksquare) em V' para quase todos os t .

Mecânica dos fluidos -25- ENS-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.Teorema (Leray \sim 1930)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ Lipschitziano, $\text{Re} > 0$, $f \in L^2_{\text{loc}}([0, \infty[; H^{-1}(\Omega))$, e $v_0 \in W$. Portanto existe $v \in L^\infty([0, T[, W) \cap L^2([0, T[; V)$ e $p \in W^{-1, \infty}([0, T[; L^2_0(\Omega))$ solução de $(\square\square)$ t.q

$\frac{dv}{dt} \in L^{4/3}([0, T[; V')$ (i.e., $v \in \mathcal{C}([0, T]; V')$, pela imersão de

Morrey: $\|v\|_{\mathcal{C}^{0, \alpha}} \leq \|v\|_{W^{1, p}}$ com $\gamma = 1 - \frac{n}{p} = 1/4$).

♣ Temos a desigualdade de energia:

$$\frac{1}{2}\|v\|_2^2(t) + \text{Re}^{-1} \int_0^t \|\nabla v\|_2^2(s) ds \leq \frac{1}{2}\|v\|_2^2(0) + \int_0^t \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}(s) ds$$

♣ Em $2d$ temos uma **única** $v \in \mathcal{C}([0, T]; W)$ e vale a **conservação** da energia:

$$\frac{1}{2}\|v\|_2^2(t) + \text{Re}^{-1} \int_0^t \|\nabla v\|_2^2(s) ds = \frac{1}{2}\|v\|_2^2(0) + \int_0^t \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}(s) ds$$

♣ Nota que se quiséssemos falar de um valor puntual de $v(t)$ com $0 \leq t \leq T$ então $v(t) \in V'$.

Mecânica dos fluidos -26- ENS-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

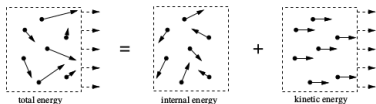
Relação com a 1ª Lei

Temos sempre $\frac{d}{dt} (E_{\text{int}} + E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}}) = \text{Contribuições de Calor}$.

Pelo teorema $\frac{d}{dt} \left(E_{\text{int}} - \text{Re}^{-1} \int_0^t \|\nabla v\|_2^2(s) ds \right) = \text{Calor}$.

♣ Escrevemos $\text{Re}^{-1} \|\nabla v\|_2^2(t) = \frac{d}{dt} E_{\text{int}}(t) - \text{Calor}$, i.e., interpretar $\text{Re}^{-1} \|\nabla v\|_2^2$ como uma dissipação viscosa (fonte de calor intrínseca).

♣ Interpretação: em $2d$, $E_{\text{int}} = \int_0^t \text{Re}^{-1} \|\nabla v\|_2^2(s) ds + \text{Calor}$ (Calor intrínseco=criado pelo fluido sobre si mesmo, mais o externo=fornecido), enquanto em $3d$, pelo teorema, $E_{\text{int}} \geq \int_0^t \text{Re}^{-1} \|\nabla v\|_2^2(s) ds + \text{Calor}$. \Rightarrow Parece que em $3d$ a energia interna (i.e., das moléculas do fluido) tem outro comportamento (i.e, existe formas de dissipação...).



Mecânica dos fluidos -27- ENS-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

♣ A solução fraca é que da existência global no tempo.

Extensão ao intervalo $[0, \infty[$ a 2d e 3d.

Visto que $v(T) \in V'$ em vez de W não se pode considerar o teorema num intervalo $[T, T + \delta]$.

♣ Em 2d: define v_n solução em $[0, n]$. Pela unicidade temos $v_n = v_m$ em $[0, n]$ se $n < m$ e portanto $v(t) := v_n(t)$ se $t \in [0, n]$. Em 3d não se pode proceder desta forma, pela falta de unicidade (mas vale o mesmo).

Dúvida: com uma condição inicial mais forte, será que existe uma solução forte que seja única?

SIM: $f \in L^2_{\text{loc}}([0, \infty[; L^2(\Omega))$, e $v_0 \in V \Rightarrow v \in \mathcal{C}([0, T^*]; V)$, para o unico $T^* : T^* = \left(2C\text{Re}^3(\|v_0\|_2^2 + C\text{Re} \int_0^{T^*} \|f\|_2^2(s)ds) \right)^{-1}$.

Nota-se que $T^* \rightarrow \infty$ se os dados forem pequenos ($v_0, f \rightarrow 0$).

Mecânica dos fluidos -28- ENS-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Extensão ao intervalo $[0, +\infty[$?

Visto que $v(T^*) \in V$ pode-se considerar existência num intervalo $[T, T + \delta]$. Mas, quem nos garante que pode-se chegar a $+\infty$? (Pois que δ depende de T^*).

♣ Temos $T^* = \infty$ se $\|\nabla v_0\|_2^2 \leq \frac{C(\Omega)}{\text{Re}^2}$, $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{C(\Omega)}{\text{Re}^4}$.

♣ Voltamos á solução fraca: $\forall 0 \leq t_0 < \infty$, só temos continuidade fraca para v , ou seja $\forall w \in W : (v(t) - v(t_0), w)_2 \rightarrow 0, t \rightarrow t_0$.

Sabemos também que $\forall T > 0 : \sup_{t \in]0, T[} \|v(t)\|_2 < \infty$.

♣ Em particular, não sabemos nada em termos de limite puntual. Nota-se que a velocidade só é definida em quase todos os pontos.

Conjunto singular (Solução com blow-up.)

Definimos $S(v) := \{(t, x) : \forall \delta > 0 : v \notin L^\infty(B_\delta(t, x))\}$.

Mecânica dos fluidos -29- ENS-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Teoremas (Serrin \sim 1962, 63, Caffarelli-Kohn-Nirenberg \sim 1982)

Se $(t, x) \notin S(v) \Rightarrow \forall k \in: v \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(B_{\delta/2}(t, x)), \alpha > 0$.

Temos

- ▶ $\mathcal{H}^1(S) = 0 \Rightarrow d_{\mathcal{H}}(S) \leq 1$.
- ▶ $\mathcal{H}^{1/2}(\pi S) = 0 \Rightarrow d_{\mathcal{H}}(\pi S) \leq 1/2$, onde πS é o conjunto dos tempos singulares.
- ▶ uma solução fraca só pode bifurcar nos tempos singulares.

♣ O blow-up significa fisicamente transferência de energia às escadas sempre mais pequenas, pois no final trata-se de energia concentrada num conjunto fractal.

Mecânica dos fluidos -30- ENS-c-td. Conclusão.

Solução com blow-up.

- ▶ Não são físicas: as ENS não estão validas se tiverem lugar.
- ▶ Argumento mais forte: a velocidade de um fluido não pode ser superior a velocidade do som.
- ▶ O matematico italiano Giovanni Prouse demostrou no 1979 que existe uma unica solução continua com este vínculo.
- ▶ O problema é a condição $\operatorname{div} v = 0$ que é uma aproximação que torna as equações elíticas (i.e., com propagação infinita).