Équation de Hill-Mathieu

Référence : [QZ06] ([Dem06]).

On s'intéresse aux propriétés qualitatives des solutions de l'équation (E) :

$$y'' + qy = 0$$

où $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, π-périodique et paire.
On note (y_1, y_2) un système fondamental de solutions de l'équation associé aux conditions initiales :

$$\begin{array}{ll} y_1(0) = 1 & y_2(0) = 0 \\ y_1'(0) = 0 & y_2'(0) = 1 \end{array}$$

((y_1, y_2) forme bien une base car le wronskien en 0, $w \neq 0$, il est donc non nul en tout point pour (y_1, y_2), ainsi la famille (y_1, y_2) est libre).
On note A l'endomorphisme :

$$\begin{aligned} A : W &\longrightarrow W \\ y &\longmapsto y(. + \pi) \end{aligned}$$

où W désigne l'espace vectoriel des solutions complexes de l'équation (E).
On note encore A la matrice de l'endomorphisme A dans la base (y_1, y_2) qui s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Déterminons au préalable les coefficients de cette matrice.
Par définition de la matrice A, on a :

$$Ay_1(x) = ay_1(x) + by_2(x) = y_1(x + \pi)$$

Si on dérive cette expression, on obtient :

$$y_1'(x + \pi) = ay_1'(x) + by_2'(x)$$

Évaluons maintenant ces deux équations en 0 :

$$\begin{aligned} y_1(\pi) &= ay_1(0) + by_2(0) = a \\ y_1'(\pi) &= ay_1'(0) + by_2'(0) = b \end{aligned}$$

(d'après les conditions initiales sur y_1 et y_2).
De la même façon, on montre que $c = y_2(\pi)$ et $d = y_2'(\pi)$, donc :

$$A = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$$

On pose également $T = tr(A) = a + d = y_1(\pi) + y_2'(\pi)$.

Proposition 0.1
1. *Si $|T| < 2$, alors toutes les solutions de (E) sont bornées ;*
2. *Si $|T| = 2$, alors (E) possède une solution non nulle bornée ;*
3. *$|T| = 2$ si et seulement si $bc = 0$;*
4. *Si $|T| > 2$, alors toutes les solutions non nulles de (E) sont non bornées.*

Démonstration

Préliminaire : détermination du polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A s'écrit : $\chi_A = X^2 - Tr(A)X + \det A$.
Déterminons alors le déterminant de A, pour ce faire nous allons montrer que y_1 est paire et y_2 est impaire.
$\rightsquigarrow$ On pose $z(x) = y_1(-x)$. Montrons que z vérifie l'équation (E) avec les mêmes conditions initiales que y_1.

$$z''(x) + q(x)z(x) = y_1''(-x) + q(x)y_1(-x) = y_1''(-x) + q(-x)y_1(-x) = 0$$

car q est paire et y_1 vérifie l'équation (E).
De plus $z(0) = y_1(-0) = 1$ et $z'(0) = -y_1'(-0) = 0$. Donc d'après l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz, on a $y_1 = z$. Ainsi y_1 est bien une solution paire.
$\rightsquigarrow$ De la même façon, on montre que y_2 est une solution impaire en considérant $z(x) = -y_2(-x)$.
$\rightsquigarrow$ Considérons maintenant le wronskien de (y_1, y_2), il s'écrit :

$$w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

On a donc en dérivant :

$$w'(x) = y_1'(x)y_2'(x)+y_1(x)y_2''(x)-y_1''(x)y_2(x)-y_1'(x)y_2'(x) = -q(x)y_1(x)y_2(x)-(-q(x)y_1(x)y_2(x)) = 0$$

Donc w est constant et on a $w = 1$ (en l'évaluant en 0 grâce à la connaissance des conditions initiales sur y_1 et y_2).
Or $\det(A) = w(\pi)$ donc $\det(A) = 1$. Donc $\chi_A = X^2 - TX + 1$ et son discriminant vaut $\Delta = T^2 - 4$, on voit donc apparaître la distinction de cas de la proposition.

Première assertion

Si $|T| < 2$, alors $\Delta < 0$, donc χ_A admet deux racines complexes conjuguées, notons-les ρ et $\overline{\rho}$.
Ces racines sont de module 1, car $\rho \times \overline{\rho} = \det(A) = 1 = |\rho|^2$.
Soient (u_1, u_2) une base de W formée des vecteurs propres de A associés aux valeurs propres ρ et $\overline{\rho}$, par définition des ces vecteurs propres, on peut écrire :

$$Au_1(x) = u_1(x + \pi) = \rho u_1(x)$$
$$Au_2(x) = u_2(x + \pi) = \overline{\rho} u_2(x)$$

Ainsi en passant au module, conne $|\rho| = |\overline{\rho}| = 1$, on obtient :

$$|u_1(x + \pi)| = |u_1(x)|$$
$$|u_2(x + \pi)| = |u_2(x)|$$

Donc les fonctions $|u_1|$ et $|u_2|$ sont continues (car la valeur absolue l'est) et π-périodiques (d'après les égalités ci-dessus), elles sont donc bornées.
Or toute solution de (E) s'écrit sous la forme $\alpha u_1(x) + \beta u_2(x)$ avec α et β des constantes, donc toutes les solutions de (E) sont bornées (puisque $|u_1|$ et $|u_2|$ le sont).

Deuxième assertion

Si $T = \pm 2$, alors $\Delta = 0$ et χ_A possède une racine, notons-la λ, qui s'écrit :

$$\lambda = -\frac{T}{2} = \pm 1$$

On a $|\lambda| = 1$. Notons u un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Alors par définition de ce qu'est un vecteur propre pour A, on a :

$$Au(x) = u(x + \pi) = \lambda u(x) = \pm u(x)$$

Donc en passant au module, on a : $|u(x + \pi)| = |u(x)|$, ainsi $|u|$ est continue et π-périodique donc bornée, or $u \in W$, car $A : W \longrightarrow W$, donc on a bien trouvé une solution non nulle bornée.

Troisième assertion
$\rightsquigarrow$ Montrons tout d'abord que $a = d$, ie $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$.
Comme $\det(A) = 1$, on peut considérer l'inverse de A, qui est donné par :

$$\begin{aligned} A^{-1} : W &\longrightarrow W \\ y &\longmapsto y(. - \pi) \end{aligned}$$

(en effet $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $A(A^{-1}y(x)) = A(y(x-\pi)) = y(x) = A^{-1}(Ay(x))$).
Donc si on détermine la matrice de A^{-1} de la même façon que celle de A, on obtient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & -y_2(\pi) \\ -y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$$

(car y_1 est paire et y_2 est impaire).
Or le théorème de Cayley-Hamilton, nous dit que $\chi_A(A) = 0$, ie $A^2 - TA + Id = 0$, donc en multipliant par A^{-1} cette expression, on obtient :

$$A - TId + A^{-1} = 0 \quad \text{ie :} \quad A + A^{-1} = TId$$

Ce qui se réécrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}$$

Donc $a = d$.
$\rightsquigarrow$ Montrons maintenant l'assertion (3). D'après ce qu'on vient de faire, on sait donc que :

$$a = d = \pm 1$$

(car $T = \pm 2$).
Or $\det(A) = 1 = ad - bc = 1 - bc$, donc $bc = 0$.
Inversement si $bc = 0$, alors $\det(A) = 1 = ad$ et comme $a = d$, alors $a = d = \pm 1$, d'où $T = a + d = \pm 2$.

Dernière assertion
Si $|T| > 2$, alors $\Delta > 0$, donc χ_A admet deux racines réelles, notons-les ρ_1 et ρ_2.
Comme $\rho_1 \times \rho_2 = \det(A) = 1$, alors $\rho_2 = \rho_1^{-1}$. Supposons désormais que $|\rho_1| > 1$.
Soient u_1 et u_2 les vecteurs propres associées aux valeurs propres ρ_1 et ρ_2.
Soit y une solution non nulle de (E), alors il existe des constantes α et β telles que :

$$y(x) = \alpha u_1(x) + \beta u_2(x)$$

Comme $y \neq 0$, alors nécessairement $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$.
- Si $\alpha \neq 0$, soit x tel que $u_1(x) \neq 0$ (un tel x existe car u_1 étant vecteur propre, u_1 est non identiquement nul). On peut monter par récurrence sur $n \geq 1$ que :

$$y(x + n\pi) = \alpha\rho_1^n u_1(x) + \beta\rho_2^n u_2(x) = \alpha\rho_1^n u_1(x) + \beta \left(\frac{1}{\rho_1}\right)^n u_2(x) \sim_{n \longrightarrow +\infty} \alpha\rho_1^n u_1(x)$$

  Donc y n'est pas borné.
- Si $\beta \neq 0$, soit x tel que $u_2(x) \neq 0$, de même, on a :

$$y(x + n\pi) = \alpha\rho_1^n u_1(x) + \beta\rho_2^n u_2(x) = \alpha \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^n u_1(x) + \beta\rho_2^n u_2(x) \sim_{n \longrightarrow -\infty} \beta\rho_2^n u_2(x)$$

  Donc y n'est pas borné.

D'où le résultat.

Lemmes utilisés On considère le problème de Cauchy :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Théorème 0.2 (de Cauchy-Lipschitz global) *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue sur un ouvert produit $U = J \times \mathbb{R}^m$, où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. On suppose de plus que f est globalement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. Alors il existe une unique solution globale pour l'équation à condition initiale fixée.*

Ce théorème s'applique ici à notre problème car on peut le réécrire sous la forme :

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = M(t)Y(t)$$

La fonction $f(t, Y(t)) = M(t)Y(t)$ est bien continue et lipschitzienne en Y de rapport $|||M(t)|||$.

On considère le problème de Cauchy (E_0) :

$$Y'(t) = M(t)Y(t)$$

où $M : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$ est une matrice $m \times m$ sur $\mathbb{K}$ à coefficients continus.

Proposition 0.3 *L'ensemble des solutions $(\mathcal{S})$ de (E_0) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension m.*

Démonstration On considère l'application :

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{K}^m \\ Y &\longmapsto Y(t_0) \end{aligned}$$

est un isomorphisme, la surjectivité provenant du théorème d'existence et l'injectivité du théorème d'unicité relatif au problème de Cauchy.

Définition 0.1 (Wronskien) *Le wronskien d'un système de m solutions $Y_1, \ldots, Y_m$ de l'équation (E_0) est :*

$$w(t) = \det(Y_1(t), \ldots, Y_m(t))$$

Proposition 0.4

$$w(t) = w(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} TrM(u)du\right)$$

Références

[Dem06] Jean-Pierre Demailly. *Analyse umérique et équations différentielles.* EDP sciences, 2006.

[QZ06] Hervé Queffelec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2006.