Espace $H^1(I)$

Référence : [Bre05] p.121-123 et p.129.

Définition 0.1 *Soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$. On définit l'espace de Sobolev $H^1(I)$ par :*

$$H^1(I) = \{u \in L^2(I); \quad u' \in L^2(I)\}$$

On munit $H^1(I)$ du produit scalaire :

$$< u, v >_{H^1} = < u, v >_{L^2} + < u', v' >_{L^2}$$

et de la norme :

$$\| u \|_{H^1} = (\| u \|_{L^2}^2 + \| u' \|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

Théorème 0.1

1. *$H^1(I)$ est un espace de Hilbert ;*
2. *$H^1(I)$ s'injecte de façon compacte dans $C^0(\overline{I})$.*

Démonstration

Montrons l'assertion (1). Il est clair que $(H^1(I), < .,. >_{H^1})$ est un espace préhilbertien, car $< .,. >_{H^1}$ défini un produit scalaire sur $H^1(I)$ puisqu'il est défini comme la somme de deux produits scalaires.
Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy de $H^1(I)$, ie :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall p, n \geq N; \| u_{n+p} - u_n \| < \epsilon$$

Autrement dit par définition de la norme sur $H^1(I)$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall p, n \geq N; (\| u_{n+p} - u_n \|_{L^2}^2 + \| u'_{n+p} - u'_n \|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

Ainsi $(u_n)_n$ et $(u'_n)_n$ sont de Cauchy dans $L^2(I)$. Or $(L^2(I), \| \ . \ \|_{L^2})$ est complet donc il existe $u, g \in L^2(I)$ tels que $\| u_n - u \|_{L^2} \longrightarrow 0$ et $\| u'_n - g \|_{L^2} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.
Or par définition de la dérivée au sens des distributions, on a $\forall \phi \in C_c^\infty(I)$:

$$\begin{aligned} \left| \int_I u'_n \phi - \int_I u' \phi \right| &= \left| - \int_I u_n \phi' + \int_I u \phi' \right| \\ &\leq \int_I |\phi'| |u_n - u| \\ &\leq \| u_n - u \|_{L^2} \| \phi' \|_{L^2} \\ &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

(car si $\phi \in C_c^\infty(I)$, alors $\phi \in L^2(I)$).
D'où $\int_I u'_n \phi \longrightarrow \int_I u' \phi$, $\forall \phi \in C_c^\infty(I)$.
De la même façon, on a $\forall \phi \in C_c^\infty(I)$:

$$\left| \int_I u'_n \phi - \int_I g \phi \right| \leq \int_I |u'_n - g| |\phi| \leq \| u'_n - g \|_{L^2} \| \phi \|_{L^2} \longrightarrow 0$$

D'où $\int_I u'_n \phi \longrightarrow \int_I g \phi$, $\forall \phi \in C_c^\infty(I)$.
Ainsi par unicité de la limite, on a :

$$\int_I (g - u') \phi = 0, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(I)$$

Donc $g = u'$ presque partout (d'après le lemme 1), donc $g = u'$ dans $L^2(I)$ (par définition de $L^2(I)$ comme le quotient de $\mathcal{L}^2(I)$ par la relation d'équivalence : l'égalité presque partout).
Ainsi

$$\| u_n - u \|_{H^1} = (\| u_n - u \|_{L^2}^2 + \| u_n' - u' \|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$$

Donc $(u_n)_n$ converge dans $H^1(I)$ vers $u \in H^1(I)$ (car $u \in L^2(I)$ et $u' \in L^2(I)$).

Montrons l'assertion (2). **Étape 1 : Montrons que $u \in H^1(I)$ admet un représentant continu.**
Soit $u \in H^1(I)$, montrons qu'il existe alors une fonction $\tilde{u} \in C^0(\overline{I})$ telle que :
- $u = \tilde{u}$ presque partout sur I ;
- $\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt$, $\forall x, y \in \overline{I}$.

On fixe $y_0 \in I$ et on pose $\overline{u}(x) = \int_{y_0}^x u'(t)dt$.
D'après le lemme 3, comme $u' \in L^1_{loc}(I)$ (car $u \in L^2(I)$ et $L^2(I) \subset L^1(I)$ car I est compact) , alors $\overline{u} \in C^0(\overline{I})$ et :

$$\int_I \overline{u}\phi' = -\int_I u'\phi \quad \forall \phi \in C_c^\infty(I)$$

Et comme u est dérivable au sens des distributions, on a $\int_I u'\phi = -\int_I u\phi'$ d'où :

$$\int_I (u - \overline{u})\phi' = 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(I)$$

Donc d'après le lemme 2, puisque $u - \overline{u} \in L^1_{loc}(I)$, on a l'existence d'une constante C telle que :

$$u - \overline{u} = C \quad \text{presque partout sur } I$$

Ainsi la fonction $\tilde{u}(x) = \overline{u}(x) + C$ correspond à la fonction recherchée car $\tilde{u} \in C^0(\overline{I})$ puisque $\overline{u} \in C^0(\overline{I})$ et elle vérifie :
- $u = \tilde{u}$ presque partout sur I et ;
- pour tout $x, y \in \overline{I}$:

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \overline{u}(x) + C - \overline{u}(y) - C = \int_{y_0}^x u'(t)dt - \int_{y_0}^y u'(t)dt = \int_y^x u'(t)dt$$

Étape 2 : montrons que l'injection $H^1(I) \subset C^0(\overline{I})$ est compacte.
Autrement dit montrons que l'application :

$$\begin{aligned} T : H^1(I) &\longrightarrow C^0(\overline{I}) \\ u &\longmapsto \tilde{u} \end{aligned}$$

vérifie que si B est la boule unité de $H^1(I)$, alors $T(B)$ est relativement compact.
Pour ce faire, nous allons utiliser le théorème d'Ascoli. Vérifions alors ses hypothèses.
- $\overline{I}$ compact ;
- Soit B la boule unité de $H^1(I)$. Soit $u \in B$, alors (en utilisant le représentant continue de u et en le notant u) :

  $$|u(x) - u(y)| = \left| \int_y^x u'(t)dt \right| \leq \int_y^x |u'(t)|dt \leq \| u' \|_{L^2} \left(\int_y^x dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \| u \|_{H^1} |x-y|^{\frac{1}{2}} \leq |x-y|^{\frac{1}{2}}$$

  (car $\| u' \|_{L^2} \leq \| u \|_{H^1}$ par définition de $\| \, . \, \|_{H^1}$).
  Ainsi B est uniformément équicontinue dans $C^0(\overline{I})$.

– Soit $u \in B$, soit $x \in I$:

$$\begin{aligned}
|u(x)| = \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b u(x)dy \right| &= \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_y^x u'(t)dt + u(y) \right) dy \right| \\
&= \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_y^x u'(t)dtdy + \frac{1}{b-a} \int_a^b u(y)dy \right| \\
&\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_y^x |u'(t)|dtdy + \frac{1}{b-a} \int_a^b |u(y)|dy \\
&\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_a^b |u'(t)|dtdy + \frac{1}{b-a} \int_a^b |u(y)|dy \\
&= \int_a^b |u'(t)|dt + \frac{1}{b-a} \int_a^b |u(y)|dy \\
&\leq |b-a|^{\frac{1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2} + \frac{1}{b-a} |b-a|^{\frac{1}{2}} \parallel u \parallel_{L^2} \\
&\leq |b-a|^{\frac{1}{2}} \parallel u \parallel_{H^1} \leq |b-a|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

D'où $\parallel u \parallel_\infty \leq C$, ainsi B est bien borné.
Donc d'après le théorème d'Ascoli, B est relativement compacte dans $C^0(\overline{I})$.
Donc l'opérateur :

$$\begin{aligned}
T : H^1(I) &\longrightarrow C^0(\overline{I}) \\
u &\longmapsto \tilde{u}
\end{aligned}$$

rend $T(B)$ relativement compact ; et c'est justement la définition d'injection compacte.

Lemmes utilisés

Lemme 0.1 (Nullité sous le signe intégral) *Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que :*

$$\int fu = 0 \quad \forall u \in C_c^0(\Omega)$$

Alors $f = 0$ presque partout sur Ω.

Démonstration On procède en deux étapes.

1. Supposons que l'on ait, de plus, $f \in L^1(\Omega)$ et la mesure de Ω finie.
   Étant donné $\epsilon > 0$, il existe $f_1 \in C_c^0(\Omega)$ telle que $\parallel f - f_1 \parallel_{L^1} < \epsilon$ car les fonctions continues à support compact sont denses dans les fonctions L^1.
   Or $\int fu = 0$, $\forall u \in C_c^0(\Omega)$. Donc :

$$\left| \int_\Omega f_1 u \right| = \left| \int (f_1 - f)u + \int fu \right| \leq \int |f_1 - f||u| \leq \epsilon \parallel u \parallel_\infty$$

   d'après l'inégalité de Hölder.
   On pose $K_1 = \{x \in \Omega; f_1(x) > \epsilon\}$ et $K_2 = \{x \in \Omega; f_1(x) \leq -\epsilon\}$. D'après le théorème de Tietze-Urysohn, on sait qu'il existe une fonction (comme K_1 et K_2 sont des compacts disjoints) $u_0 \in C_c(\Omega)$ telle que $u_0(x) = 1$ si $x \in K_1$ et $u_0(x) = -1$ si $x \in K_2$, de plus $|u_0(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \Omega$.
   Posons $K = K_1 \cup K_2$, on a :

$$\int_\Omega f_1 u_0 = \int_{\Omega \setminus K} f_1 u_0 + \int_K f_1 u_0$$

   Or d'après l'inégalité montrée précédemment, on a :

$$\int_K |f_1| = \int_K f_1 u_0 \leq \epsilon + \int_{\Omega \setminus K} |f_1 u_0| \leq \epsilon + \int_{\Omega \setminus K} |f_1|$$

par définition de u_0.
Par conséquent :

$$\int_\Omega |f_1| = \int_K |f_1| + \int_{\Omega\setminus K} |f_1| \leq \epsilon + 2\int_{\Omega\setminus K} |f_1| \leq \epsilon + 2\epsilon|\Omega|$$

puisque $|f_1| \leq \epsilon$ sur $\Omega \setminus K$.
Donc

$$\| f \|_{L^1} \leq \| f - f_1 \|_{L^1} + \| f_1 \|_{L^1} \leq 2\epsilon + 2\epsilon|\Omega|$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $\epsilon > 0$, on en conclut que $f = 0$ presque partout sur Ω.

2. Cas général. On écrit $\Omega = \cup_n \Omega_n$ avec les Ω_n ouvert et $\overline{\Omega_n}$ compact inclus dans Ω (par exemple, on peut choisir $\Omega_n = \{x \in \Omega; d(x, \Omega^c) > \frac{1}{n} \text{ et } |x| < n\}$). On applique ensuite ce qui précède avec Ω_n et $f_{|\Omega_n}$ et on voit que $f = 0$ presque partout sur Ω_n et on conclut que $f = 0$ presque partout sur Ω.

Lemme 0.2 (Dérivée nulle implique que la fonction est constante) *Soit $f \in L^1_{loc}(I)$ telle que :*

$$\int_I f\phi' = 0 \quad \forall \phi \in C^1_c(I)$$

Alors il existe une constante C telle que $f = C$ presque partout sur I.

Démonstration On fixe une fonction $\psi \in C^0_c(I)$ telle que $\int \psi = 1$.
Pour toute fonction $w \in C^0_c(I)$, il existe une fonction $\phi \in C^1_c(I)$ telle que :

$$\phi' = w - \left(\int_I w\right)\psi$$

En effet, la fonction $h = w - \left(\int_I w\right)\psi$ est continue, à support compact inclus dans I et comme $\int_I h = 0$, h admet une primitive (unique) à support compact.
On déduit de l'hypothèse du lemme que :

$$\int_I f\left(w - \left(\int_I w\right)\psi\right) = 0 \quad \forall w \in C^0_c(I)$$

ie

$$\int_I \left(f - \left(\int_I f\psi\right)\right) w = 0 \quad \forall w \in C^0_c(I)$$

Ainsi d'après le lemme 1, $f - \left(\int_I f\psi\right) = 0$ presque partout, ie $f = C$ presque partout avec $C = \int_I f\psi$.

Lemme 0.3 *Soit $g \in L^1_{loc}(I)$; pour $y_0 \in I$ fixé, on pose pour $x \in I$:*

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt$$

Alors $v \in C^0(I)$ et :

$$\int_I v\phi' = -\int_I g\phi \quad \forall \phi \in C^1_c(I)$$

Démonstration On a :

$$\int_I v\phi' = \int_a^b \left(\int_{y_0}^x g(t)dt\right)\phi'(x)dx = -\int_a^x dx \int_x^{y_0} g(t)\phi'(x)dt + \int_x^b dx \int_{y_0}^x g(t)\phi'(x)dt$$

En appliquant le théorème de Fubini sur un pavé, on en déduit que :

$$\int_I v\phi' = -\int_a^{y_0} g(t)dt \int_a^t \phi'(x)dx + \int_{y_0}^b g(t)dt \int_t^b \phi'(x)dx = -\int_I g(t)\phi(t)dt$$

car $\phi(a) = \phi(b) = 0$.

Lemme 0.4 (Théorème d'Ascoli) *Soit K un espace métrique compact. Soit H un sous-ensemble de $C^0(K)$. On suppose que :*

1. *H est borné ;*
2. *H est uniformément équicontinu, ie :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, d(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon, \forall f \in H$$

Alors H est relativement compact dans $C^0(K)$.

Lemme 0.5 (Inclusion de L^2 dans L^1) *Soit Ω un espace de mesure finie. Alors $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.*

Démonstration Soit $f \in L^2(\Omega)$, montrons que $f \in L^1(\Omega)$, pour ce faire, on considère :

$$\int_\Omega |f| d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \| f \|_{L^2} \mu(\Omega)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

(d'après l'inégalité de Hölder). Donc $f \in L^1(\Omega)$.

Références

[Bre05] Haim Brezis. *Analyse fonctionnelle.* Dunod, 2005.