Le groupe circulaire

Référence : [Aud06] p.203-206.

Définition 0.1 (Groupe circulaire) *Le groupe circulaire G est le groupe des transformations de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ engendré par :*
- *les homographies $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $ad-bc \neq 0$;*
- *la symétrie $z \longmapsto \overline{z}$.*

Définition 0.2 (Isométrie vectorielle) *Une isométrie vectorielle est une application linéaire qui conserve la norme, ie une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ (avec E et F des espaces vectoriels euclidiens) telle que $\forall u \in E$, $\| f(u) \| = \| u \|$.*

Définition 0.3 (Isométrie affine) *De même, une application affine $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ (où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des espaces affines euclidiens) est une isométrie affine si $\forall A, B \in \mathcal{E}$, $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$; ce qui est équivalent à dire que l'application linéaire associée est une isométrie vectorielle.*

Définition 0.4 (Homothétie affine) *Soit $\mathcal{O}$ un point de $\mathcal{E}$ et soit λ un scalaire et soit $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ l'application définie par $\overrightarrow{\mathcal{O}\phi(M)} = \lambda\overrightarrow{\mathcal{O}M}$. C'est alors une application affine, son application linéaire associée est l'homothétie vectorielle de rapport λ. Le point $\mathcal{O}$ est fixe et on appelle ϕ l'homothétie (affine) de centre $\mathcal{O}$ et de rapport λ, on la note $h_{\mathcal{O},\lambda}$.*

Définition 0.5 (Similitude) *Un endomorphisme f d'un espace vectoriel euclidien est une similitude vectorielle s'il existe un réel k strictement positif, appelé rapport de la similitude tel que $\forall x \in E$, $\| f(x) \| = k \| x \|$.*

Définition 0.6 (Réflexion) *Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.*

Définition 0.7 (Inversion) *Soit $\mathcal{O}$ un point du plan. Soit k un nombre réel non nul. On appelle inversion de pôle $\mathcal{O}$ et de puissance k, la transformation $I_{\mathcal{O},k} : \mathcal{E} \setminus \{\mathcal{O}\} \longrightarrow \mathcal{E} \setminus \{\mathcal{O}\}$ qui a tout point M associe le point M' de la droite $\mathcal{O}M$ vérifiant l'égalité :*

$$< \mathcal{O}M, \mathcal{O}M' > = k$$

ou

$$\overrightarrow{\mathcal{O}M'} = \frac{k}{\mathcal{O}M^2}\overrightarrow{\mathcal{O}M}$$

Définition 0.8 (Involution) *Une transformation j est dite involutive si $j \circ j = id$.*

Définition 0.9 (Birapport) *Soit D une droite projective. Trois points a, b, c (distincts) forment un repère projectif. Il existe une unique homographie de la droite sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ qui envoie a sur ∞, b sur 0 et c sur 1.*
Si d est un autre point de D, l'image de d par cette homographie est un point de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ qu'on appelle le birapport de (a, b, c, d) et qu'on note $[a, b, c, d]$.
Par définition le birapport vaut :
- *∞ lorsque $b = a$;*
- *0 lorsque $d = b$;*
- *1 lorsque $d = c$.*

Proposition 0.1 *Si a, b, c et d sont quatre points d'une droite affine, les trois premiers étant distincts, alors :*

$$[a, b, c, d] = \frac{\dfrac{z-b}{z-a}}{\dfrac{c-b}{c-a}}$$

Démonstration : L'unique homographie qui envoie a sur ∞, b sur 0 et c sur 1 est :

$$z \longmapsto \frac{\frac{z-b}{z-a}}{\frac{c-b}{c-a}}$$

puisqu'elle a un pôle en a et un zéro en b.
La formule annoncée donne donc bien l'image du point d.

Définition 0.10 (Division harmonique) *On dit que quatre points alignés forment une division harmonique si leur birapport vaut -1.*

Exemple : Si a, b, c sont trois points d'une droite affine D, les points a, b, c et ∞_D forment une division harmonique si c est le milieu du segment $[ab]$.

Proposition 0.2 *Le groupe circulaire G est engendré par les inversions et les réflexions.*

Démonstration Soit $\phi \in G$.
- Si $\phi(\infty) = \infty$, ϕ est une similitude (directe ou indirecte), elle est donc composée d'une homothétie h et d'une isométrie u. Or u est composée de réflexions et h d'inversions.
- Si $\phi(\infty) = A \in \mathbb{C}$, on compose ϕ avec une inversion I de pôle A et $I \circ \phi(\infty) = \infty$. On peut alors se ramener au cas précédent.

Lemme 0.1 *Soit f une similitude vectorielle de rapport $k > 0$. Alors il existe une unique isométrie vectorielle u telle que $f = h_k \circ u$, où h_k est l'homothétie de rapport k.*

Démonstration Comme on a supposé $k > 0$, l'homothétie h_k est inversible. On définit alors u par $u = h_k^{-1} \circ f$ de sorte que u est un endomorphisme et préserve la norme, en effet :

$$\| u(x) \| = \| h_k^{-1} \circ f(x) \| = \frac{1}{|k|} \| f(x) \| = \frac{1}{|k|} k \| x \|$$

Lemme 0.2 *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension n. Alors toute isométrie de $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme composée de p réflexions avec un entier $p \leq n+1$.*

Démonstration
- Si l'isométrie affine ϕ admet un point fixe $A \in \mathcal{E}$, on n'a qu'à vectorialiser $\mathcal{E}$ en A pour se ramener au cas vectoriel. On obtient donc en appliquant le lemme ci-dessous que ϕ est composée de p réflexions par rapport à des hyperplans passant par A (pour un nombre $p \leq n$).
- Sinon, soient A un point quelconque et $A' \neq A$ son image. Appelons H l'hyperplan médiateur de AA', de sorte que $\sigma_H \circ \phi$ est une isométrie affine qui fixe A et à qui on peut appliquer ce qui précède, ainsi :
  $$\sigma_H \circ \phi = \sigma_{H_1} \circ \ldots \circ \sigma_{H_p}$$
  et donc :
  $$\phi = \sigma_H \circ \sigma_{H_1} \circ \ldots \circ \sigma_{H_p}$$
  pour un $p \leq n$, donc ϕ est composée de $p+1$ ($\leq n+1$) réflexions.

Lemme 0.3 *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Alors toute isométrie de E peut s'écrire comme composée de p réflexions pour un entier $p \leq n$.*

Démonstration Récurrence sur la dimension.

Lemme 0.4 *La composée $I_{\mathcal{O},k} \circ I_{\mathcal{O},k'}$ de deux inversions de même pôle est la restriction à $\mathcal{E} \setminus \{\mathcal{O}\}$ de l'homothétie de centre $\mathcal{O}$ et de rapport $\frac{k}{k'}$.*
La composée $h_{\mathcal{O},\lambda} \circ I_{\mathcal{O},k}$ est l'inversion de pôle $\mathcal{O}$ et de puissance λk.

Démonstration On considère un point M et son image $M' = I_{\mathcal{O},k'}(M)$ par la première inversion et l'image $M'' = I_{\mathcal{O},k}(M')$ de ce dernier par la seconde inversion. On a alors :

$$\overrightarrow{\mathcal{O}M'} = \frac{k'}{\mathcal{O}M^2}\overrightarrow{\mathcal{O}M} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathcal{O}M''} = \frac{k}{\mathcal{O}M'^2}\overrightarrow{\mathcal{O}M'}$$

de sorte que :

$$\mathcal{O}M'^2 =< \overrightarrow{\mathcal{O}M'}, \overrightarrow{\mathcal{O}M'} >= \frac{k'^2}{\mathcal{O}M^4}\mathcal{O}M^2 = \frac{k'^2}{\mathcal{O}M^2}$$

et donc :

$$\overrightarrow{\mathcal{O}M''} = \frac{k}{\mathcal{O}M'^2}\overrightarrow{\mathcal{O}M'} = \frac{k}{\frac{k'^2}{\mathcal{O}M^2}}\frac{k'}{\mathcal{O}M^2}\overrightarrow{\mathcal{O}M} = \frac{k}{k'}\overrightarrow{\mathcal{O}M}$$

Ainsi $h_{\mathcal{O},\frac{k}{k'}} = I_{\mathcal{O},k} \circ I_{\mathcal{O},k'}$.
Ainsi $h_{\mathcal{O},\lambda} = I_{\mathcal{O},\lambda k} \circ I_{\mathcal{O},k}$ et il suffit de composer à droite des deux côtés par $I_{\mathcal{O},k}$ pour obtenir la deuxième assertion.

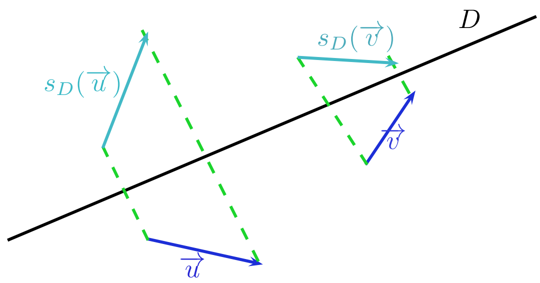
Corollaire 0.2.1 *Les éléments de G préservent les angles non orientés.*

Démonstration Les réflexions renversent les angles orientés et les inversions aussi, d'où le résultat.

Lemme 0.5 *Les réflexions renversent les angles orientés (de vecteurs ou de droite).*

Démonstration On considère une droite vectorielle D et deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$. On veut montrer que $(s_D(\overrightarrow{u}), s_D(\overrightarrow{v})) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$.
Considérons la médiatrice D' de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, ie la droite vectorielle $(u - v)^\perp$.
La composition $s_D \circ s_{D'}$ est une rotation et donc :

$$(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = (s_D \circ s_{D'}(\overrightarrow{v}), s_D \circ s_{D'}(\overrightarrow{u})) = (s_D(\overrightarrow{u}), s_D(\overrightarrow{v}))$$



Lemme 0.6 *Une inversion transforme un angle orienté en son opposé.*

Théorème 0.3 *Les éléments de G sont les transformations qui préservent les cercles et droites.*

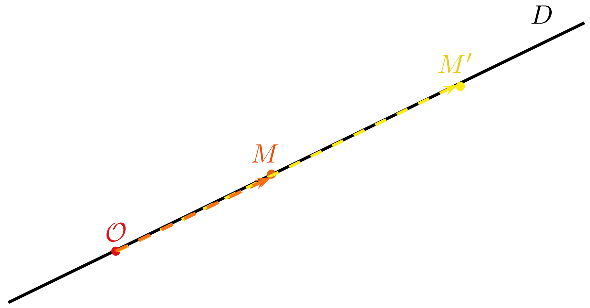
Démonstration $\rightsquigarrow$ D'après la proposition précédente, G est engendré par les inversions et les réflexions. Et par leurs propriétés, ces transformations préservent les cercles et les droites.

Lemme 0.7 *Soit I une inversion de pôle $\mathcal{O}$. L'image par I :*

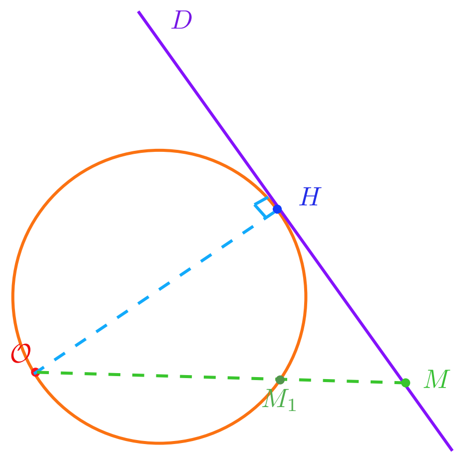
1. *d'une droite passant par $\mathcal{O}$ est cette droite elle-même ;*
2. *d'une droite ne passant pas par $\mathcal{O}$ est un cercle passant par $\mathcal{O}$;*
3. *d'un cercle passant par $\mathcal{O}$ est une droite ne passant pas par $\mathcal{O}$;*
4. *d'un cercle ne passant pas par $\mathcal{O}$ est un cercle ne passant pas par $\mathcal{O}$.*

Démonstration

1. évident !



2. Soit $I_{\mathcal{O},k}$ l'inversion de pôle $\mathcal{O}$ et de puissance k.
   Soit D une droite ne passant pas par $\mathcal{O}$.
   On commence par se ramener au cas d'une inversion de pôle $\mathcal{O}$ ayant un point fixe sur D.
   Soit H le projeté orthogonal de $\mathcal{O}$ sur D, de sorte que H est fixé par $I_{\mathcal{O},\mathcal{O}H^2}$.
   Si $h_{\mathcal{O},\lambda}$ est une homothétie de centre $\mathcal{O}$, d'après un lemme précédent, on sait que $h_{\mathcal{O},\lambda} \circ I_{\mathcal{O},k} = I_{\mathcal{O},k\lambda}$.
   On choisit $\lambda = \dfrac{k}{\mathcal{O}H^2}$, ainsi notre inversion est composée $I_{\mathcal{O},k} = h_{\mathcal{O},\lambda} \circ I_{\mathcal{O},\mathcal{O}H^2}$ et on considère l'image $I_{\mathcal{O},\mathcal{O}H^2}(D)$ de D par l'inversion de puissance $\mathcal{O}H^2$.
   Un point M du plan est sur D si et seulement si $< \overrightarrow{\mathcal{O}M}, \overrightarrow{\mathcal{O}H} >= \mathcal{O}H^2$.
   Si M_1 est l'image de M, on a :
   $$\overrightarrow{\mathcal{O}M} = \frac{\mathcal{O}H^2}{\mathcal{O}M_1^2}\overrightarrow{\mathcal{O}M_1^2}$$
   Donc M est sur D si et seulement si :
   $$< \frac{\mathcal{O}H^2}{\mathcal{O}M_1^2}\overrightarrow{\mathcal{O}M_1}, \overrightarrow{\mathcal{O}H} >= \mathcal{O}H^2$$
   soit si et seulement si $< \overrightarrow{\mathcal{O}M_1}, (\overrightarrow{\mathcal{O}H} - \overrightarrow{\mathcal{O}M_1}) >= 0$.
   Autrement dit si et seulement si $< \overrightarrow{\mathcal{O}M_1}, \overrightarrow{M_1H} >= 0$.
   Mais cette dernière relation exprime le fait que M_1 est sur le cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $\mathcal{O}H$. Celui-ci contient donc l'image de la droite D par l'inversion $I_{\mathcal{O},\mathcal{O}H^2}$.
   Réciproquement, ce même calcul montre que l'image par l'inversion de tout point M_1 de $\mathcal{C}_1$ (autre que $\mathcal{O}$) est un point de D ; puisque l'inversion est involutive, tous les points de $\mathcal{C}_1$ (sauf $\mathcal{O}$) sont donc les images de points de D.
   On a enfin $I_{\mathcal{O},k}(D) = h_{\mathcal{O},\lambda} \circ I_{\mathcal{O},\mathcal{O}H^2}(D) = h_{\mathcal{O},\lambda}(\mathcal{C}_1)$.
   Comme l'image par une homothétie de centre $\mathcal{O}$ d'un cercle passant par $\mathcal{O}$ est un cercle passant par $\mathcal{O}$, on a bien montrer que l'image de D est un cercle passant par $\mathcal{O}$.



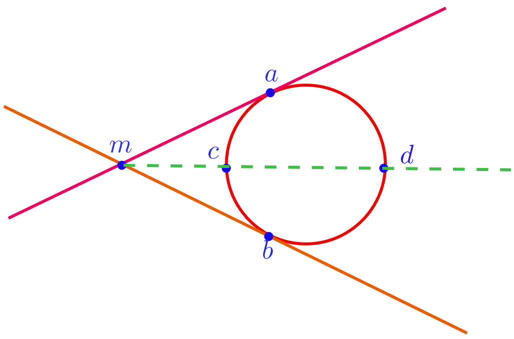
3. se déduit du deuxième point et de l'involutivité de l'inversion.

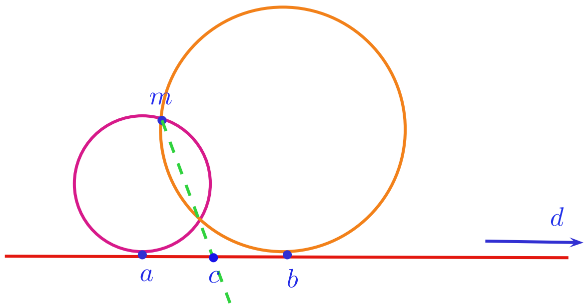
4. Soit $I_{\mathcal{O},k}$ une inversion de pôle $\mathcal{O}$ et de puissance k.
   Soit $\mathcal{C}$ un cercle ne passant pas par $\mathcal{O}$.
   Appelons $p = P_{\mathcal{C}}(\mathcal{O})$ la puissance du pôle par rapport au cercle considéré.

On choisit λ de telle sorte que $I_{\mathcal{O},k} = h_{\mathcal{O},\lambda} \circ I_{\mathcal{O},p}$ (ie $p = \dfrac{k}{\lambda}$).
Or la puissance p a été choisie pour que l'inversion de pôle $\mathcal{O}$ et de puissance p laisse globalement invariant le cercle $\mathcal{C}$, en échangeant entre eux les points d'intersections des droites passant par $\mathcal{O}$ avec $\mathcal{C}$.
Enfin $I_{\mathcal{O},k}(\mathcal{C}) = h_{\mathcal{O},\lambda}(\mathcal{C})$ est bien un cercle ne passant pas par $\mathcal{O}$.

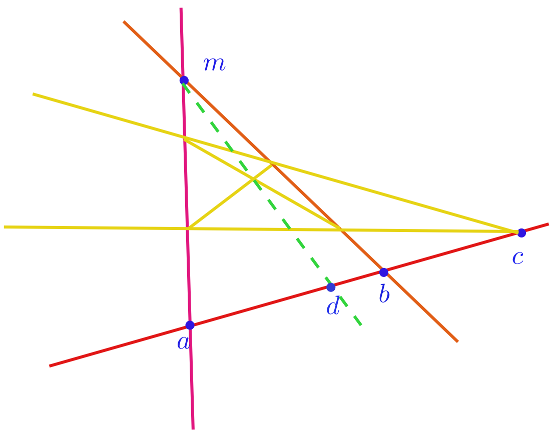
Retour à la démonstration $\leadsto$ Il est évident que les réflexions conservent les cercles et droites.
$\leadsto$ Réciproquement, soit $\phi : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ une transformation préservant les cercles et droites. Quitte à composer ϕ par une homographie, on peut supposer que $\phi(\infty) = \infty$ et donc que ϕ est une transformation de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui envoie tout cercle sur un cercle et toute droite sur une droite.
$\leadsto$ Montrons d'abord que ϕ préserve les divisions harmoniques.
Les figures ci-dessous représentent une construction à la règle de l'unique point d tel que $[a, b, c, d] = -1$ dans le cas où les trois points a, b et c ne sont pas alignés, tandis que la deuxième figure en fait autant dans le cas où ces trois points sont alignés.

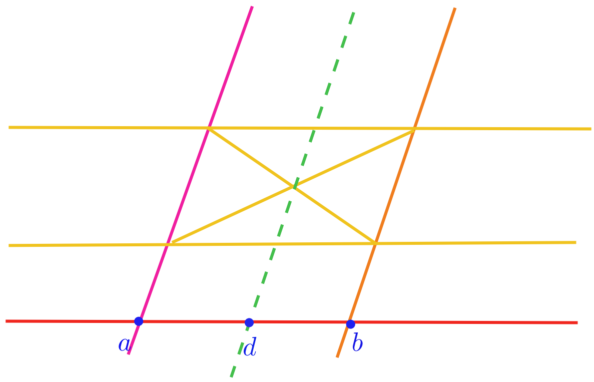
- Si a, b, c ne sont pas alignés (on peut toujours trouver un cercle qui les lient), on envoie d à l'infini de sorte que ma et mb deviennent deux cercles qui se coupent en m et en un autre point (image du point à l'infini) et que le cercle abc devient une droite (projective) tangente à ces deux cercles. Le point c est alors le milieu de l'image de ab, de sorte que le birapport $[a, b, c, d] = -1$ (car il se conserve par transformation).





- Si a, b, c sont alignés. On pose un point m n'appartenant pas à ab. On construit deux droites issues de c coupant les droites ma et mb ; puis on en déduit le point d. On transforme ensuite la droite mc en la droite à l'infini (ici dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$) et il reste à constater que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux, car alors $[a, b, d, c] = -1$, d'où $[a, b, c, d] = -1$.





Le théorème résulte alors du lemme qui suit.

Lemme 0.8 *Soit $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une transformation qui fixe* 0, 1 *et préserve les divisions harmoniques. Alors ϕ est un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$.*

Retour à la démonstration du théorème Une fois ce lemme admis, on compose ϕ avec une similitude pour se ramener au cas où elle préserve l'axe réel. Alors c'est un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$ qui préserve $\mathbb{R}$, c'est donc l'identité ou la conjugaison complexe. Donc $\phi \in G$.

Démonstration du lemme $\rightsquigarrow$ On rappelle que $[a, b, c, \infty] = -1$ si et seulement si c est le milieu de ab. Donc ϕ conserve les milieux, ie :

$$\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\phi(a)+\phi(b)}{2}$$

En particulier avec $b = 0$ et parce que $\phi(0) = 0$, on a :

$$\phi(a) = 2\phi\left(\frac{a}{2}\right)$$

D'où

$$\phi(a+b) = 2\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \phi(a) + \phi(b)$$

Donc ϕ est additive.
$\rightsquigarrow$ Remarquons maintenant que $[a, -a, a^2, 1] = -1$ (d'après la formule) pour tout a, de sorte que ϕ préserve aussi les carrés :

$$-1 = [a, -a, a^2, 1] = [\phi(a), \phi(-a), \phi(a^2), \phi(1)] = [\phi(a), -\phi(a), \phi(a^2), 1]$$

car $\phi(1) = 1$ et puisque ϕ préserve les divisions harmoniques.
Mais on a aussi : $[\phi(a), -\phi(a), \phi(a)^2, 1] = -1$ et donc :

$$[\phi(a), -\phi(a), \phi(a^2), 1] = [\phi(a), -\phi(a), \phi(a)^2, 1]$$

et $\phi(a^2) = \phi(a)^2$ pour tout $a \in \mathbb{C}$.
Enfin $ab = \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - (a-b)^2\right)$ donc avec la conservation des milieux et des carrés et l'additivité, on a :

$$\phi(ab) = \frac{1}{4}\left((\phi(a)+\phi(b))^2 - (\phi(a)-\phi(b))^2\right) = \phi(a)\phi(b)$$

d'où ϕ automorphisme de corps $\mathbb{C}$.

Références

[Aud06] Michèle Audin. *Géométrie.* EDP Sciences, 2006.