Réduction des endomorphismes auto-adjoints

Références : [Gou94] p.240-241 ([Gri11]).

Théorème 0.1 *Soit E un espace euclidien (respectivement hermitien). Soit f un endomorphisme de E auto-adjoint, ie $f^* = f$.*
Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour f (et de plus ses valeurs propres sont réelles).

Démonstration On procède par récurrence sur la dimension $n = \dim E$.
$\rightsquigarrow$ Si $n = 1$, le résultat est évident.
$\rightsquigarrow$ Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$ et montrons-le pour le rang n.
$\triangleright$ On considère l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto < x, f(x) > \end{aligned}$$

C'est une forme quadratique (respectivement hermitienne) de forme polaire :

$$\begin{aligned} \phi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto < x, f(y) > \end{aligned}$$

En effet, pour montrer que Φ est bien une forme quadratique, il suffit de montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique et que $\phi(x,x) = \Phi(x)$, ce qui est le cas car :

$$\begin{aligned} \phi(x,x) &=< x, f(x) >= \Phi(x) \\ \phi(\lambda x + y, z) &=< \lambda x + y, f(z) >= \lambda < x, f(z) > + < y, f(z) >= \lambda\phi(x,z) + \phi(y,z) \\ \phi(x,y) &=< x, f(y) >=< f^*(x), y >=< f(x), y >= \phi(y,x) \end{aligned}$$

car f est auto-adjoint et que la symétrie et la linéarité par rapport à la première variable nous donne la linéarité par rapport à la deuxième variable (on procède de la même façon, si on souhaite montrer qu'on a une forme hermitienne).
$\triangleright$ Comme on est en dimension finie, alors la sphère unité $S = \{x \in E; \| x \|= 1\}$ de E est compacte (pas besoin du théorème de Riesz, car c'est le sens facile de ce théorème qu'on utilise ici).
De plus l'application Φ est continue, car c'est une composée de deux fonctions continues $\phi \circ \psi$ où :

$$\begin{aligned} \psi : E \times E &\longrightarrow E \times E \\ (x,y) &\longmapsto (x,x) \end{aligned}$$

est une application linéaire sur un espace de dimension finie donc est continue. Et l'application ϕ est bilinéaire sur un espace de dimension finie, donc continue. Elle est bien continue car :

$$|\phi(x,y)| = | < x, f(y) > | \leq \| x \| \| f(y) \| \leq \| x \| \| f \| \| y \|$$

et f étant linéaire sur un espace de dimension finie, elle est donc continue donc la norme subordonnée de f existe bien (et aussi d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
Ainsi Φ est continue sur le compact S et à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc elle est bornée et atteint ses bornes, ie $\exists x_0 \in E$, tel que :

$$\Phi(x_0) = \sup_{x \in S} \Phi(x) := \lambda$$

$\triangleright$ On considère maintenant l'application :

$$\begin{aligned} \Phi_1 : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lambda \| x \|^2 - \Phi(x) \end{aligned}$$

c'est une forme quadratique (respectivement hermitienne) de forme polaire associée :

$$\begin{aligned}\phi_1 : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y) &\longmapsto \lambda < x,y > - < x, f(y) > = < x, \lambda y - f(y) > := < x, g(y) >\end{aligned}$$

(c'est évident car ϕ_1 définit une forme bilinéaire symétrique car c'est la soustraction de deux formes bilinéaires symétriques et on a bien $\phi_1(x,x) = \Phi_1(x)$, c'est tout aussi évident si on doit montrer qu'on a à faire à une forme hermitienne).
De plus Φ_1 est positive par définition de λ et Φ_1 n'est pas définie positive, car :

$$\Phi_1(x_0) = \lambda \parallel x_0 \parallel - \Phi(x_0) = \lambda - \lambda = 0$$

Donc Φ_1 est dégénérée et cette dégénérescence entraîne celle de ϕ_1, ie l'application :

$$\begin{aligned}j : E &\longrightarrow E\\ x &\longmapsto \phi_1(x,.)\end{aligned}$$

est non injective, ie $N(\phi_1) = \{x \in E, \phi_1(x,y) = 0, \forall y \in E\} \neq \{0\}$, ie $\exists x \neq 0$ tel que $\forall y \in E$, $\phi_1(x,y) = 0 = < x, g(y) >$.
L'application $g = \lambda id - f$ est donc non surjective (car si on suppose que g est surjective, alors $\forall y \in E$, $< x, g(y) > = 0$ implique que $x \in E^{\perp}$, ie $x = 0$ ce qui n'est pas le cas, d'où la non-surjectivité) et donc également non injective (car on est en dimension finie), ce qui entraîne l'existence d'un vecteur normé e_1 tel que $g(e_1) = 0 = \lambda e_1 - f(e_1)$, ie $\lambda \in \mathbb{R}$ (par définition de λ) est valeur propre de f associée au vecteur propre normé e_1.
▷ Posons $H = (< e_1 >)^{\perp}$. H est stable par f. En effet $\forall x \in < e_1 >$ et $\forall y \in H$:

$$< x, f(y) > = < f^*(x), y > = < f(x), y > = 0$$

car $< e_1 >$ stable par f (car un sous-espace propre est stable).
La restriction de f à H étant auto-adjointe, l'hypothèse de récurrence assure l'existence d'une base orthonormée $(e_2, \ldots, e_n)$ de H qui diagonalise $f_{|_H}$ (à valeurs propres réelles).
La base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est alors une base orthonormée qui diagonalise f et les valeurs propres de f sont toutes réelles.

Lemme utilisé

Lemme 0.1 *Une application continue sur un compact et à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration Montrons d'abord que l'image d'un compact par une application continue est compact.
On se place toujours dans le cadre métrique.
Soit K un compact et f une application continue, montrons que $f(K)$ est compact.
Soit (y_n) une suite de $f(K)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ il va exister $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$. On considère la suite $(f(x_n))_n \in f(K)$.
Comme K compact, alors il existe $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\phi(n)})_n$ converge vers $x \in K$. Or comme f est continue alors la suite $f(x_{\phi(n)})$ converge vers $f(x) \in f(K)$, d'où la compacité de $f(K)$.
Montrons maintenant que l'application atteint ses bornes.
Pour cela, on considère une suite régularisante, ie une suite $(y_n) \in f(K)$ telle que $y_n \longrightarrow \sup f(K)$.
Comme $f(K)$ est fermé alors $\sup f(K) \in f(K)$ donc l'application atteint bien son maximum (on procède de même pour montrer que l'infinimum est atteint via une suite minimisante).

Remarque : Existence d'une suite maximisante
Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. On distingue deux cas :

- Soit $\sup A = +\infty$, ie A n'est pas majoré. Alors :

$$\forall M > 0, \exists a_n \in A, a_n \geq M$$

  en effet, sinon cela signifierait que :

$$\exists M > 0, \forall a_n \in A, a_n < M$$

  ce qui correspond à la définition de M majorant de A.
  Ainsi la suite (a_n) converge vers $\sup A$.

– Soit $\sup A = M$, ie A majoré. Alors :

$$\forall \epsilon > 0, \exists a_\epsilon \in A, M - a_\epsilon \leq \epsilon$$

en effet, sinon cela signifierait que :

$$\exists \epsilon > 0, \forall a \in A, M - a > \epsilon$$

ie $M - a$ serait un majorant de A plus petit que M ce qui est impossible par définition du sup qui est le plus petit des majorants.
Ainsi la suite $a_{\frac{1}{n}}$ tend vers $\sup A$, car :

$$0 \leq M - a_{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Références

[Gou94] Xavier Gourdon. *Algèbre.* Ellipses, 1994.

[Gri11] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire.* Cépaduès, 2011.