Le problème de la ruine du joueur

Références : [Ouv09] p.394-398 ([Rud98]).

Énoncé Un joueur joue à pile ou face avec une pièce non nécessairement équilibrée.
On note p la probabilité d'obtenir pile lors d'un jet.
Le joueur reçoit 1 euro de la banque s'il obtient pile et en donne un s'il obtient face.
Sa fortune initiale est de $a \in \mathbb{N}^*$ euros et celle de la banque est de $b \in \mathbb{N}^*$ euros.
Le joueur joue jusqu'à sa ruine ou celle de la banque.

Modélisation On modélise le jeu de la manière suivante :
$(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi $p\delta_1 + q\delta_{-1}$, où $q = 1 - p$.
On note S_n la fortune du joueur après n parties, pour un jeu qui ne s'arrêterait pas, on pose $S_0 = a$ et $S_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$.
En posant $Y_0 = a$, les filtrations naturelles $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des processus Y et S sont les mêmes.
On note T le temps d'arrêt du jeu, ie $T = \inf\{n \in \mathbb{N}^*; S_n = 0 \,\text{ou}\, S_n = a + b\}$.
On se pose trois questions :
- quelle est la probabilité $\mathbb{P}(T < +\infty)$ que le jeu s'arrête ?
- quelle est la probabilité $\rho = \mathbb{P}(S_T = a + b)$ que le joueur gagne ?
- quel est le temps moyen $\mathbb{E}(T)$ d'arrêt du jeu ?

Étape 1 Déterminons la nature du processus $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ selon les valeurs de p.
On a si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(S_n - S_{n-1}|\mathcal{A}_{n-1}) = \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{A}_{n-1})$.
Les variables aléatoires (Y_n) étant indépendantes, on a :

$$\mathbb{E}(S_n - S_{n-1}|\mathcal{A}_{n-1}) = \mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\mathbb{P}(Y_n = k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k(p\delta_1(k) + q\delta_{-1}(k)) = p - q$$

Ce qui nous donne la classification suivante pour le processus S :
- S est une sous-martingale si $p > q$;
- S est une martingale si $p = q = \dfrac{1}{2}$;
- S est une sur-martingale si $p < q$.

Étape 2 Étude du cas $p \neq q$.

Écrivons la décomposition de Doob de la sous-martingale S et précisons son processus croissant prévisible A
D'après le théorème de décomposition de Doob, comme S est une sous-martingale : $S = A+M$ avec M une martingale et A un processus croissant prévisible défini par $A_0 = 0$ et $A_n - A_{n-1} = \mathbb{E}(S_n - S_{n-1}|\mathcal{A}_{n-1})$.
Donc $A_0 = 0$ et si $n \geq 1$, $A_n - A_{n-1} = p - q$ d'après l'étape 1. Donc par récurrence sur n, on obtient $A_n = n(p - q)$.

Déduisons-en que $\mathbb{E}(T) < +\infty$ et déterminons la valeur de $\mathbb{P}(T < +\infty)$ et de $\mathbb{E}(T)$ en fonction de ρ
Le premier théorème d'arrêt appliqué à la martingale $M = (S_n - n(p - q))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et au temps d'arrêt borné $\inf(T, n)$ nous donne :

$$a = \mathbb{E}(S_0) = \mathbb{E}(S_{\inf(T,n)} - \inf(T, n)(p - q))$$

D'où $(p-q)\mathbb{E}(\inf(T,n)) = \mathbb{E}(S_{\inf(T,n)}) - a$.
D'après le théorème de convergence monotone (ou de Beppo-Lévi), comme $f_n = \inf(T,n)$ est une fonction croissante et qui converge simplement vers T, alors $\mathbb{E}(T) = \limsup_n \mathbb{E}(\inf(T,n))$.
Il en résulte que T est intégrable, ainsi en particulier $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.
De plus :
- la suite $(S_{\inf(T,n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers S_T ;
- par définition de T, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq S_{\inf(T,n)} \leq a+b$ donc $0 \leq (p-q)\mathbb{E}(\inf(T,n)) \leq b$;

Donc en appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$(p-q)\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(S_T) - a$$

De plus, par définition de T, on a $\mathbb{E}(S_T) = (a+b)\mathbb{P}(S_T = a+b) + 0\mathbb{P}(S_T = 0)$, d'où

$$\mathbb{E}(T) = \frac{(a+b)\rho - a}{p-q}$$

On définit pour $s > 0$, le processus U par $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = s^{S_n}$. Déterminons s pour que U soit une martingale non constante et vérifions qu'alors la martingale arrêtée U^T converge $\mathbb{P}$-presque sûrement et dans L_1 vers U_T.
Soit $s > 0$, puisque $s^{S_{n-1}}$ est $\mathcal{A}_{n-1}$-mesurable et indépendante de s^{Y_n}, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}(U_n|\mathcal{A}_{n-1}) = \mathbb{E}(s^{S_{n-1}}s^{Y_n}|\mathcal{A}_{n-1}) = s^{S_{n-1}}\mathbb{E}(s^{Y_n}|\mathcal{A}_{n-1}) = s^{S_{n-1}}\mathbb{E}(s^{Y_n})$$

ie

$$\mathbb{E}(U_n|\mathcal{A}_{n-1}) = U_{n-1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s^k\mathbb{P}(Y_n = k) = U_{n-1}(sp + \frac{1}{s}q)$$

On a $sp + \frac{1}{s}q = 1$ si et seulement si $s^2p - s + q = 0$, équation du second degré dont les racines sont 1 et $\frac{q}{p}$. Ainsi pour $s = \frac{q}{p}$, U est une martingale non constante.
Par définition de T et puisque $\frac{q}{p} < 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$; la martingale arrêtée U^T est donc équi-intégrable et converge $\mathbb{P}$-presque sûrement et dans L_1 vers U_T.

Déduisons-en les valeurs de ρ et de $\mathbb{E}(T)$.
Par définition de T, U_T prend $\mathbb{P}$-presque sûrement les valeurs 1 ou $\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}$; sa moyenne vaut donc :

$$\mathbb{E}(U_T) = s^0\mathbb{P}(S_T = 0) + \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\mathbb{P}(S_T = a+b) = 1 - \rho + \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\rho$$

Par ailleurs d'après le premier théorème d'arrêt, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}(U_{\inf(T,n)}) = \mathbb{E}(U_0) = \left(\frac{q}{p}\right)^a$$

ce qui nous donne d'après le théorème de convergence dominée :

$$\mathbb{E}(U_T) = \lim_n \mathbb{E}(U_{\inf(T,n)}) = \left(\frac{q}{p}\right)^a$$

En reportant, on obtient :

$$\rho = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

et

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p-q}\left(\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} - a\right)$$

Étape 3 Étude du cas $p = q = \dfrac{1}{2}$.

Vérifions que S est une martingale de carré intégrable et déterminons son processus croissant prévisible B.
Le processus S est une martingale dans L_2 puisque les Y_n sont bornés.
On peut donc appliquer le théorème de décomposition de Doob à la sous-martingale S_n^2. Son processus croissant prévisible B est défini par $B_0 = 0$ et ses accroissements, si $n \geq 1$, par $B_n - B_{n-1} = \mathbb{E}((S_n - S_{n-1})^2 | \mathcal{A}_{n-1})$, d'où par indépendance de Y_n^2 et de $\mathcal{A}_{n-1}$:

$$B_n - B_{n-1} = \mathbb{E}(Y_n^2 | \mathcal{A}_{n-1}) = \mathbb{E}(Y_n^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2 (p\delta_1(k) + q\delta_{-1}(k)) = 1$$

On a donc $B_0 = 0$ et $B_n = n$ par récurrence sur $n \geq 1$.

Déduisons-en que $\mathbb{E}(T) < +\infty$ et déterminons $\mathbb{P}(T < +\infty)$.
Le premier théorème d'arrêt appliqué à la martingale $(S_n - n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et au temps d'arrêt borné $\inf(T, n)$ nous donne : $S_0 = a$ et

$$\mathbb{E}(S_0^2) = \mathbb{E}(S_{\inf(T,n)} - \inf(T, n)) = a^2$$

Puisque $S_{\inf(T,n)}^2 \leq (a + b)^2$, on alors :

$$\mathbb{E}(S_{\inf(T,n)}) = \mathbb{E}(\inf(T, n)) \leq (a + b)^2 - a^2$$

ce qui nous donne d'après le théorème de Beppo-Lévi :

$$\mathbb{E}(T) = \lim_n \mathbb{E}(\inf(T, n)) \leq (a + b)^2 - a^2$$

Il en résulte que T est intégrable et en particulier $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.

Vérifions que la martingale arrêtée S^T converge $\mathbb{P}$-presque sûrement, dans L_1 et dans L_2 vers S_T.
La suite $(S_{\inf(T,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers S_T puisque on a pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq S_{\inf(T,n)} \leq a+b$; puis le théorème de convergence dominée nous montre qu'il y a aussi convergence dans L_1 et L_2 vers S_T.

Déduisons-en les valeurs de $\mathbb{E}(S_T)$, ρ et $\mathbb{E}(T)$.
Le premier théorème d'arrêt appliqué à la martingale S et au temps d'arrêt borné $\inf(T, n)$ nous donne :

$$\mathbb{E}(S_{\inf(T,n)}) = \mathbb{E}(S_T) = a$$

Puisque par définition de T :

$$\mathbb{E}(S_T) = (a + b)\rho$$

on a :

$$\rho = \frac{a}{a + b}$$

La relation du deuxième point de cette étape, nous donne également, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}(\inf(T, n)) = \mathbb{E}(S_{\inf(T,n)}^2) - a^2$$

et puisque $(S_{\inf(T,n)})$ converge vers S_T dans L_2, en passant à la limite, on obtient :

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(S_T^2) - a^2$$

De plus, puisque par définition de T, on a :

$$\mathbb{E}(S_T^2) = (a + b)^2 \rho = a(a + b)$$

on obtient :

$$\mathbb{E}(T) = ab$$

Lemmes utilisés

Lemme 0.1 (Décomposition de Doob) *Soit X une sous-martingale intégrable. Alors :*

- *il existe une martingale intégrable M et un processus croissant prévisible A uniques tels que $S = A + M$;*
- *on a l'équivalence :*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n^+) < +\infty \Leftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|M_n|) < +\infty \; et \, A_\infty \in \mathcal{L}^1$$

Références

[Ouv09] Jean-Yves Ouvrard. *Probabilités 2*. Cassini, 2009.

[Rud98] Walter Rudin. *analyse réelle et complexe*. Dunod, 1998.