Surjectivité de l'exponentielle

Référence : [FGN09] p.244-246.

Proposition 0.1 *L'exponentielle réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$.*

Démonstration

Étape 1 Montrons un lemme.

Lemme 0.1 *L'exponentielle réalise une bijection entre les matrices nilpotentes et les matrices unipotentes.*

Démonstration
Montrons que exp envoie bien une matrice nilpotente sur une matrice unipotente.
Soit N une matrice nilpotente, alors :

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$$

Ainsi la matrice :

$$N' = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$$

est aussi nilpotente puisque de la forme $N \times P(N)$ avec P un polynôme. Donc $\exp(N) = Id + N'$ est unipotente.
D'où la fait que exp : $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{U}$, en notant $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes et $\mathcal{U}$ celui des matrices unipotentes.
Montrons que l'application :

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{N} &\longrightarrow \mathcal{N} \\ N &\longmapsto \exp(N) - Id \end{aligned}$$

est une bijection.
Pour cela, exhibons la bijection réciproque. Considérons :

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{N} &\longrightarrow \mathcal{N} \\ N &\longmapsto ln(Id + N) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{N^k}{k} \end{aligned}$$

- ϕ est bien une application de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$ car $\phi(N) = NR(N)$ où R est un polynôme.
- Montrons que $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi = id$. On pose :

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k!} \quad \text{et} \quad Q(X) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{X^k}{k}$$

  L'application ψ associe à N la matrice $P(N)$ et ϕ associe à N la matrice $Q(N)$, ainsi $\psi \circ \phi$ associe à N la matrice $P(Q(N)) = (P \circ Q)(N)$. Pour déterminer cela, on a seulement besoin de connaître le polynôme $P \circ Q$ tronqué à la puissance $n-1$. Or comme :

$$e^x - 1 = P(x) + o(x^{n-1}) \quad \text{et} \quad ln(1+x) = Q(x) + o(x^{n-1})$$

celui-ci est exactement la partie polynomiale du développement limité à l'ordre $n-1$ en 0 de la fonction $e^{ln(1+x)} - 1 = x$, ie X. On a donc pour tout $N \in \mathcal{N}$:

$$(\psi \circ \phi)(N) = N$$

On obtient de la même façon que $(\phi \circ \psi)(N) = N$ pour tout $N \in \mathcal{N}$ puisque $ln(1+e^x-1) = x$. En conclusion pour tout $N' \in \mathcal{N}$, il existe un unique $N \in \mathcal{N}$ tel que $\exp(N) = Id + N'$.

Étape 2 Déterminons l'image de l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longmapsto \exp(M)$.
On distingue deux cas.

- Soit $B \in GL_n(\mathbb{C})$ et supposons que le spectre de B soit réduit à $\{\lambda\} \in \mathbb{C}^*$ (car sinon B ne pourrait pas être inversible). La matrice :

  $$N = \frac{1}{\lambda}(B - \lambda Id)$$

  est donc nilpotente car d'après le théorème Cayley-Hamilton B est annulé par son polynôme caractéristique $(X-\lambda)^n$.
  On a donc $B = \lambda(Id + N)$. D'après l'étape précédente, la matrice unipotente $Id + N$ est l'exponentielle d'une matrice M. De plus, λ étant non nul et l'exponentielle réalisant une surjection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$, on sait qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda = e^\mu$.
  Ainsi $B = e^\mu \exp(M) = e^\mu Id \exp(M) = \exp(\mu Id)\exp(M) = \exp(\mu M)$ puisque μId commute avec M. Donc $B \in Im(\exp)$.
- Soit $B \in GL_n(\mathbb{C})$ quelconque. On va se ramener au cas précédent. On sait que le polynôme caractéristique de B s'écrit :

  $$\chi_B = (X-\lambda_1)^{n_1} \times \ldots \times (X-\lambda_r)^{n_r}$$

  où les $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$ sont deux à deux différents et les $n_i \in \mathbb{N}^*$.
  Comme B est annulé par χ_B, le lemme de décomposition des noyaux assure que :

  $$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(B - \lambda_i Id)^{n_i}$$

  On considère la concaténation des bases de $\ker(B-\lambda_i Id)^{n_i}$, c'est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$. Notons b l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ associé à B.
  Chaque sous-espace $F_i = \ker(B-\lambda_i Id)^{n_i}$ est stable par b et l'endomorphisme b_i induit par b sur F_i est annulé par $(X-\lambda_i)^{n_i}$. Son spectre est donc réduit à λ_i. La matrice B' de l'endomorphisme b dans la base $\mathcal{B}$ est donc diagonale par blocs, ie $B' = diag(B_1, \ldots, B_r)$ avec $sp(B_i) = \{\lambda_i\}$.
  D'après la première étape, on sait que pour tout $1 \leq i \leq r$, il existe $M_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $B_i = \exp(M_i)$ et si on pose $M = diag(M_1, \ldots, M_r)$, on obtient $B' = \exp(M)$.
  Enfin en notant P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, on a $B = PB'P^{-1} = P\exp(M)P^{-1} = \exp(PMP^{-1}$
  et donc $B \in Im(\exp)$.

Par conséquent $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Remarque : La fonction exponentielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective, on peut s'en rendre compte par un argument de connexité, car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ est connexe alors que $GL_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes.

Lemme 0.2 *L'exponentielle réalise une surjection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.*

Références

[FGN09] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux x-ens algèbre 2.* Cassini, 2009.