Étude d'un système dynamique

Référence : [FGN07] p.88-90.

Proposition 0.1 *Soit* $\lambda \in]0,1]$. *Étudions la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\begin{cases} x_0 \in]0,1[; \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 \end{cases}$$

Démonstration

Étape 1 : étude de la fonction définissant la suite
Soit :

$$\begin{aligned} f :]0,1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1 - \lambda x^2 \end{aligned}$$

$\leadsto$ On remarque tout d'abord que $]0,1[$ est stable par f, en effet :

$$\begin{aligned} 0 < x &< 1 \\ 0 < x^2 &< 1 \\ 0 < \lambda x^2 &< \lambda \leq 1 \\ -1 < -\lambda x^2 &< 0 \\ 0 < 1 - \lambda x^2 &< 1 \end{aligned}$$

$\leadsto$ Ensuite f est dérivable sur $]0,1[$ et de dérivée pour tout $x \in]0,1[$:

$$f'(x) = -2\lambda x < 0$$

Donc la fonction f est (strictement) décroissante sur $]0,1[$, par conséquent $f \circ f$ est croissante sur $]0,1[$ (on peut le vérifier par le calcul au besoin).
$\leadsto$ Ainsi les deux sous-suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et bornées (car comprises entre 0 et 1), donc convergentes. Reste à savoir si elles ont la même limite.
$\leadsto$ On sait que les sous-suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un point fixe de $f \circ f$. Pour $x \in]0,1[$, on a :

$$(f \circ f)(x) - x = 1 - \lambda(1 - \lambda x^2)^2 - x = 1 - \lambda(1 + \lambda^2 x^4 - 2\lambda x^2) - x = 1 - \lambda - x + 2\lambda^2 x^2 - \lambda^3 x^4$$

Cette expression peut être factorisée par $f(x) - x = 1 - \lambda x^2 - x$, car les points fixes de f sont des points fixes de $f \circ f$. On trouve :

$$(f \circ f)(x) - x = (1 - \lambda x^2 - x)(\lambda^2 x^2 - \lambda x + 1 - \lambda)$$

Déterminons les points fixes de $f \circ f$
$\leadsto$ **Étude du premier polynôme**
L'équation $1 - \lambda x^2 - x = 0$ a pour discriminant :

$$\Delta = 1 + 4\lambda^2 > 0$$

car $\lambda > 0$.
Donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{-2\lambda} = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\lambda}}{2\lambda} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\lambda}}{-2\lambda} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{2\lambda}$$

Déterminons le signe de ces solutions :

$$\begin{aligned} &0 < \lambda \leq 1 \\ &2 < 1 + \sqrt{1+4\lambda} \leq 1 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

et $0 < 2\lambda \leq 2$ d'où :

$$\lambda_1 < 0$$

Par conséquent λ_1 n'est pas un point fixe de f sur $]0,1[$.

$$\begin{aligned} &0 < \lambda \leq 1 \\ &1 < \sqrt{1+4\lambda} \leq \sqrt{5} \\ &0 < -1 + \sqrt{1+4\lambda} \leq -1 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

D'où :

$$0 < \lambda_2 \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$$

Ainsi la seule solution dans $]0,1[$ est λ_2 que nous noterons désormais l.
$\rightsquigarrow$ **Étude du second polynôme**
$\lambda^2 x^2 - \lambda x + 1 - \lambda = 0$ a pour discriminant :

$$\Delta = \lambda^2 - 4\lambda^2(1-\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda^3 = \lambda^2(-3\lambda^2 + 4\lambda)$$

Le signe de Δ dépend ici de λ. On distingue alors trois cas :

Cas 1 : $\lambda \in \left]0, \frac{3}{4}\right[$.

Alors $\Delta < 0$ et le polynôme $\lambda^2 x^2 - \lambda x + 1 - \lambda$ n'admet pas de solution réelle. Donc le seul point fixe de $f \circ f$ dans $]0,1[$ est l (qui est aussi un point fixe de f), par conséquent les sous-suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l, ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Cas 2 : $\lambda = \frac{3}{4}$.

Alors $\Delta = 0$ et le polynôme admet une racine double qui vaut :

$$-\frac{-\lambda}{2\lambda^2} = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2}\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Or on remarque que pour $\lambda = \frac{3}{4}$, on a aussi :

$$l = \frac{2}{3}$$

Donc encore une fois, on n'a qu'un seul point fixe et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l = \frac{2}{3}$.

Cas 3 : $\lambda \in \left]\frac{3}{4}, 1\right[$.

Alors $\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines réelles distinctes qui sont :

$$l_1 = \frac{\lambda - \lambda\sqrt{-3+4\lambda}}{2\lambda^2} = \frac{1-\sqrt{-3+4\lambda}}{2\lambda} \quad \text{et} \quad l_2 = \frac{\lambda + \lambda\sqrt{-3+4\lambda}}{2\lambda^2} = \frac{1+\sqrt{-3+4\lambda}}{2\lambda}$$

Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge vers l (l'unique point fixe de f) que si elle est stationnaire.
On a $|f'(l)| = |-2\lambda l| = |\sqrt{1+4\lambda} - 1| = \sqrt{1+4\lambda} - 1 > 1$ car $\lambda > \frac{3}{4}$.
Soit alors $k \in]1, |f'(l)|[$, par continuité de f', on sait qu'il existe un voisinage V de l tel que si $x \in V$, alors $|f'(x)| > k$.
Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in V$. On déduit alors de l'égalité des accroissements finis que pour tout $n \geq n_0$:

$$|f(x_n) - f(l)| \geq k|x_n - l|$$

ie

$$|x_{n+1} - l| \geq k|x_n - l|$$

ie
$$|x_n - l| \geq k^{n-n_0}|x_{n_0} - l|$$
Si $x_{n_0} \neq l$, alors $\lim_n k^{n-n_0}|x_{n_0} - l| = +\infty$ ce qui contredit l'hypothèse de convergence de la suite, on a donc $x_{n_0} = l$, ie la suite est stationnaire.
De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_{n+1} = \lambda \Leftrightarrow 1 - \lambda x_n^2 = 1 - \lambda l^2 \Leftrightarrow x_n^2 = l^2 \Leftrightarrow x_n = l$$

car $x_n > 0$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est stationnaire que si $x_0 = l$, ie la suite est constante et $x_0 = l$.

Supposons maintenant que $x_0 \neq l$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas (si elle ne peut pas converger vers l, elle ne peut pas converger car f n'admet pas d'autre point fixe). Les suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ne peuvent donc pas converger vers l (sinon l'autre sous-suite convergerait vers l car $f(l) = l$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi). Elles ne peuvent donc pas avoir la même limite (pour la même raison). On en déduit que l'une converge vers l_1 et l'autre vers l_2 et que $f(l_1) = l_2$ et $f(l_2) = l_1$.
Plus précisément, on a :
$$l_1 < l < l_2$$
En effet :

$$l_1 < l \Leftrightarrow 1 - \sqrt{-3+4\lambda} < \sqrt{1+4\lambda} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{-3+4\lambda} + \sqrt{1+4\lambda} > 2$$

cette dernière inégalité est vérifiée car :

$$\begin{aligned} \lambda &> \frac{3}{4} \\ \sqrt{1+4\lambda} &> 2 \\ \sqrt{-3+4\lambda} + \sqrt{1+4\lambda} &> 2 \end{aligned}$$

Et puis la fonction f étant strictement décroissante, on en déduit que $f(l_1) < f(l)$, ie $l_2 > l$ puisque $f(l) = l$ et $f(l_1) = l_2$.
On distingue alors deux cas :
- Si $x_0 < l$, alors $x_1 > l$, ie pour tout n, $x_{2n} < l$ et $x_{2n+1} > l$ car $]0, l[$ et $]l, 1[$ sont stables par $f \circ f$; par conséquent $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_1 et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vers l_2.
- Si $x_0 > l$ c'est le contraire.

Remarque Grâce à l'étude que nous venons de mener, on peut facilement étudier la suite définie par $u_{n+1} = 2 - u_n^2$, il suffit pour cela de poser $x_n = \frac{u_n}{2}$ et d'étudier le cas où $\lambda = 2$.

Références

[FGN07] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux x-ens analyse 1*. Cassini, 2007.