Théorème de Carathéodory

Références : [Tau05] ou [FGN10].

Théorème 0.1 *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension finie non nulle.*
Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{E}$.
Alors tout élément de $Cv(\mathcal{A})$ l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ est un barycentre à coefficients positifs ou nuls de k points de $\mathcal{A}$ avec $k \leq 1 + \dim(\mathcal{E})$.

Rappels

Définition 0.1 *Un espace affine euclidien est un espace affine $(\mathcal{E}, E)$ où E est un espace vectoriel euclidien.*

Définition 0.2 *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Un $\mathbb{K}$-espace affine est un triplet $(\mathcal{E}, E, *)$ où $\mathcal{E}$ est un ensemble non vide, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $*$ est une loi externe $* : \mathcal{E} \times E \longrightarrow \mathcal{E}$ possédant les propriétés suivantes :*
- *$\forall P \in \mathcal{E}$, l'application $\phi_P : E \longrightarrow \mathcal{E}$ telle que $\vec{u} \longmapsto P * \vec{u}$ est bijective ;*
- *$\forall P \in \mathcal{E}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E$, on a $(P * \vec{u}) * \vec{v} = P * (\vec{u} * \vec{v})$.*

On dit alors que E est l'espace vectoriel associé à $(\mathcal{E}, E, *)$ et que $(\mathcal{E}, E, *)$ est un espace affine attaché à E.

Démonstration Soit $M \in Cv(\mathcal{A})$. Alors d'après le lemme qui suit M est une combinaison convexe de k points de $\mathcal{A}$, ie

$$M = \sum_{i=1}^{k} t_i A_i$$

avec $A_i \in \mathcal{A}$ et $t_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$.
Ainsi cela signifie que :

$$\overrightarrow{A_1 M} = \sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{A_1 A_i} = \sum_{i=2}^{k} t_i \overrightarrow{A_1 A_i}$$

(car $\overrightarrow{A_1 A_1} = \overrightarrow{0}$ et d'après les différentes façons de noter un barycentre).
On raisonne par l'absurde et on suppose que $k > 1 + \dim(\mathcal{E})$.

Étape 1 Le système $(\overrightarrow{A_1 A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1 A_k})$ est lié (car M combinaison convexe de A_i) donc il existe $\lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que :

$$\lambda \overrightarrow{A_1 A_2} + \ldots + \lambda_k \overrightarrow{A_1 A_k} = \overrightarrow{0}$$

On pose $\mu_1 = \lambda_2 + \ldots + \lambda_k$ et $\mu_i = -\lambda_i$ pour $i = \{2, \dots, k\}$. Alors :

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = \mu_1 + \sum_{i=2}^{k} \mu_i = \sum_{i=2}^{k} \lambda + \sum_{i=2}^{k} (-\lambda_i) = 0$$

et les μ_i sont non tous nuls, car les λ_i sont non tous nuls.
Ainsi si $O \in \mathcal{E}$, on a :

$$\mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \ldots \mu_k \overrightarrow{OA_k} = \overrightarrow{0}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \mu_i \overrightarrow{OA_i} &= \mu_1 \overrightarrow{OA_1} +_s um_{i=2}^{k} \mu_i \overrightarrow{OA_i} \\
&= \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \sum_{i=2}^{k} \mu_i (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_i}) \\
&= \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \sum_{i=2}^{k} \mu_i \overrightarrow{OA_1} + \sum_{i=2}^{k} \mu_i \overrightarrow{A_1A_i} \\
&= \left(\mu_1 + \sum_{i=2}^{k} \mu_i \right) \overrightarrow{OA_1} + \sum_{i=2}^{k} \mu_i \overrightarrow{A_1A_i} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i \overrightarrow{OA_i} \right) - \sum_{i=2}^{k} \lambda_i \overrightarrow{A_1A_i} \\
= 0
\end{aligned}$$

par définition des μ_i et des λ_i.

Étape 2 Comme les $(\mu_i)_{1 \leq i \leq k}$ sont non tous nuls et que $\sum \mu_i = 0$ alors $\exists j \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $\mu_j > 0$. Posons pour $1 \leq i \leq k$,

$$\lambda = \inf\{\frac{t_i}{\mu_i}, \mu_i > 0\}$$

(on a le droit puisqu'il y a au moins $\dfrac{t_j}{\mu_j} \in \lambda$). Et soit $v_i = t_i - \lambda \mu_i$. On a $v_i \in \mathbb{R}_+$ par définition de λ et :

$$\sum_{i=1}^{k} v_i = \sum_{i=1}^{k} (t_i - \lambda \mu_i) = \sum_{k=1}^{k} t_i - \lambda \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1$$

car $\sum t_i = 1$ et $\sum \mu_i = 0$.
D'autre part $\exists q \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $v_q = 0$ par définition de λ et car $v_i = t_i - \lambda \mu_i$, donc :

$$M = \sum_{i=1, i \neq q}^{k} v_i A_i$$

car :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{OA_i} \\
&= \sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{OA_i} - \lambda \sum_{i=1}^{k} \mu_i \overrightarrow{OA_i} \quad \text{par définition des } \mu_i \,; \\
&= \sum_{i=1}^{k} (t_i \lambda \mu_i) \overrightarrow{OA_i} \\
&= \sum_{i=1}^{k} v_i \overrightarrow{OA_i} \\
&= \sum_{i=1, i \neq q}^{k} v_i \overrightarrow{OA_i}
\end{aligned}$$

Ainsi on a écrit M comme barycentre de $k-1$ points de $\mathcal{A}$ ce qui contredit notre hypothèse de départ.

Corollaire 0.1.1 *Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{A}$ est une partie compacte de $\mathcal{E}$ alors $Cv(\mathcal{A})$ est aussi compacte.*

Démonstration Soient $n = \dim(\mathcal{E})$ et

$$K = \{(t_1, \dots, t_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1\}$$

K est un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$. On pose :

$$f : K \times \mathcal{E}^{n+1} \Longrightarrow \mathcal{E}$$
$$(t_1, \dots, t_{n+1}, A_1, \dots, A_{n+1}) \longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} t_i A_i$$

Or $Cv(\mathcal{A}) = f(K \times \mathcal{A}^{n+1})$ d'après le théorème précédent, f est continue et $K \times \mathcal{A}^{n+1}$ est un compact (car produit fini de compacts) alors $Cv(\mathcal{A})$ est compact.

Lemmes utilisés

Lemme 0.1 *Un produit fini de compacts est compact.*

Démonstration On se place dans le cas métrique, ie l'espace admet une distance. Dans ce cas, on a la caractérisation séquentielle de la compacité, ie de toute suite d'un compact, on peut extraire une sous-suite convergente.
On procède par récurrence sur le nombre de compact dans le produit.

- **k = 2** On considère $K_1 \times K_2$. Soient $(x_n, y_n) \in K_1 \times K_2$ une suite. Comme K_1 est compact alors il existe une fonction $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\phi(n)})_n$ converge vers $x \in K_1$. Comme K_2 est aussi compact alors il existe $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\psi(n)})$ converge vers $y \in K_2$. De plus puisque $(x_{\phi(n)})$ converge alors $(x_{\psi(\phi(n))})$ converge aussi vers $x \in K_1$. Ainsi on a trouvé une sous-suite de $K_1 \times K_2$ qui converge dans $K_1 \times K_2$ d'où le résultat.
- **k ≥ 2** On suppose le résultat vrai pour un produit de n compacts. On considère un produit de $n+1$ compacts : $K_1 \times \ldots \times K_{n+1} = Q_1 \times K_{n+1}$ avec K_{n+1} compact et Q_1 produit de n compacts donc compact par hypothèse de récurrence, d'où $K_1 \times \ldots \times K_{n+1}$ compact d'après l'initialisation.

Lemme 0.2 *L'image par une application continue d'un compact est compact.*

Démonstration On se place toujours dans le cadre métrique.
Soit K un compact et f une application continue, montrons que $f(K)$ est compact.
Soit (y_n) une suite de $f(K)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ il va exister $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$. On considère la suite $(f(x_n))_n \in f(K)$.
Comme K compact, alors il existe $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\phi(n)})_n$ converge vers $x \in K$. Or comme f est continue alors la suite $f(x_{\phi(n)})$ converge vers $f(x) \in f(K)$, d'où la compacité de $f(K)$.

Remarque : Si $x_n \longrightarrow x$ alors $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ avec f continue, ce résultat se démontre en utilisant les définitions de la continuité de f et de la convergence de x_n.
En effet, comme $x_n \longrightarrow x$ alors :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_n, x) < \epsilon$$

Comme f est continue en x_n en particulier alors cela signifie que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, d(x_n, y) < \delta \Rightarrow d(f(x_n), f(y)) < \epsilon$$

En particulier la définition de continuité s'applique au point x, si on fixe $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $d(x_n, x) < \delta \Rightarrow d(f(x_n), f(x)) < \epsilon$.
Or comme $x_n \longrightarrow x$, on sait qu'un tel δ existe, ie pour $\epsilon > 0$ fixés et pour ce $\delta > 0$ fixés, on a $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $d(x_n, x) < \delta \Rightarrow d(f(x_n), f(x)) < \epsilon$.
Or δ dépend uniquement du ϵ d'avant d'où pour $\epsilon > 0$ fixés, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $d(f(x_n), f(x)) < \epsilon$.
D'où le résultat.

Références

[FGN10] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux x-ens algèbre 3*. Cassini, 2010.

[Tau05] Patrice Tauvel. *Géométrie*. Dunod, 2005.