Théorème de Liapounov

Références : [Rou09] p.138-143 ([Gou08] et [Gou94]).

Théorème 0.1 *Soit le système différentiel :*

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x \end{cases}$$

avec $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et telle que $f(0) = 0$.
On suppose que la matrice $A = Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative.
Alors l'origine est un point d'équilibre attractif du système différentiel et pour tout x assez voisin de 0, la solution $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

But : comparer le comportement des solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x \end{cases}$$

à celui des solutions du système linéarisé au voisinage de 0 :

$$\begin{cases} z' = Az \\ z(0) = x \end{cases}$$

Démonstration

Étape 1 : Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A. Montrons que $\exists P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\| e^{tA}x \| \leq P(|t|) \left(\sum_{j=1}^{k} e^{t\Re(\lambda_j)} \right) \| x \|$$

D'après le lemme des noyaux, on sait que :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_j \ker(A - \lambda_j I)^{m_j}$$

où m_j est la multiplicité de λ_j.
Ainsi $\forall x \in \mathbb{C}^n$, on a $x = x_1 + \ldots + x_k$, avec les $x_j \in \ker(A - \lambda_j I)^{m_j}$.
Chaque sous-espace E_j est stable par A, donc :

$$\begin{aligned} e^{tA}x_j &= e^{t\lambda_j} e^{tA - t\lambda_j I} x_j \\ &= e^{t\lambda_j} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda_j I)^p \right) x_j \\ &= e^{t\lambda_j} \left(\sum_{p=0}^{m_j - 1} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda_j I)^p \right) x_j \end{aligned}$$

car $x_j \in E_j$, ie $(A-\lambda_j I)^p(x_j) = 0$ pour $p \geq m_j$. L'espace $\mathbb{C}^n$ étant muni d'une norme quelconque, on a donc, $\forall t \in \mathbb{R}$ et $1 \leq j \leq k$ une inégalité de la forme :

$$\begin{aligned}
\| e^{tA}x_j \| &\leq \| e^{t\lambda_j} \| \| x_j \| \| \sum_{p=0}^{m_j-1} \frac{t^p}{p!}(A-\lambda_j I)^p \| \\
&\leq \| e^{t\lambda_j} \| \| x_j \| m_j(1+|t|)^{m_j-1} \| A-\lambda_j I \|^{m_j} \\
&\leq C \| e^{t\Re(\lambda_j)+i\Im(\lambda_j)} \| (1+|t|)^{m_j-1} \| x_j \| \\
&\leq C e^{t\Re(\lambda_j)}(1+|t|)^{n-1} \| x_j \|
\end{aligned}$$

Ainsi pour $x \in \mathbb{C}^n$:

$$\| e^{tA}x \| \leq \sum_{j=1}^{k} \| e^{tA}x_j \| \leq C(1+|t|)^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{k} e^{t\Re(\lambda_j)}\right) \max_j \| x_j \|$$

D'où l'inégalité voulue par équivalence des normes sur $\mathbb{C}^n$.

Étape 2 Déduisons-en le comportement de $z(t)$ quand $t \longrightarrow +\infty$. On a :

$$\begin{cases} z' = Az \\ z(0) = x \end{cases}$$

La solution du système linéarisé est $z(t) = e^{tA}x$. Comme les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative, alors $\exists a > 0$ tel que $\Re(\lambda_j) < -a$ pour tout $j = 1, \ldots, k$. Ainsi d'après l'étape 1, on a :

$$\begin{aligned}
\| z(t) \| = \| e^{tA}x \| &\leq C(1+|t|)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{k} e^{t\Re(\lambda_j)}\right) \| x \| \\
&= C(1+|t|)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{k} e^{t\Re(\lambda_j)}e^{ta}\right) e^{-at} \| x \|
\end{aligned}$$

Or $C(1+|t|)^{n-1}e^{t(\Re(\lambda_j)+a)} \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$ (car on a choisi a pour cela), donc cette quantité est bornée pour $t \geq 0$, d'où :

$$\| z(t) \| \leq Ce^{-at} \| x \|$$

Donc $z(t)$ tend exponentiellement vers 0 quand $t \longrightarrow +\infty$ et l'origine est un point d'équilibre attractif.

Étape 3 Montrons que :

$$b(x,y) = \int_0^\infty < e^{tA}x, e^{tA}y > dt$$

définit une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ et que la forme quadratique $q(x) = b(x,x)$ (appelée fonction de Liapounov) est définie positive.

- b **bien définie :**

$$| < e^{tA}x, e^{tA}y > | \leq \| e^{tA}x \| \| e^{tA}y \| \leq C^2 e^{-2at} \| x \| \| y \|$$

  d'après l'étape 2 et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, donc b est bien définie.
- b **linéaire par rapport à la première variable :** soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
b(\lambda x + y, z) &= \int_0^\infty < e^{tA}(\lambda x + y), e^{tA}z > dt \\
&= \int_0^\infty (\lambda < e^{tA}x, e^{tA}z > + < e^{tA}y, e^{tA}z >) dt \\
&= \lambda b(x,z) + b(y,z)
\end{aligned}$$

  car $< .,. >$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

- b **symétrique :** $b(x,y) = b(y,x)$ car $< .,. >$ l'est.
- b **bilinéaire :** car linéaire par rapport à la première variable et symétrique.
- q **définie positive :** soit $x \in \mathbb{R}^n$, on suppose que :

$$b(x,x) = \int_0^\infty \| e^{tA}x \|^2 \, dt = 0$$

Alors d'après le théorème de nullité de l'intégrale, on a $\forall x \in [0, +\infty[$, $e^{tA}x = 0$, d'où $x = 0$.

Étape 4 Montrons que :

$$< \operatorname{grad} q(x), Ax >= 2b(x, Ax) = - \| x \|^2$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} q(x+ty) = b(x+ty, x+ty) &= b(x,x) + 2b(x,ty) + b(ty,ty) \\ &= q(x) + 2tb(x,y) + t^2 q(y) \end{aligned}$$

D'où en dérivant par rapport à t :

$$\frac{d}{dt}(q(x+ty)) = 2b(x,y) + 2tq(y)$$

Ainsi :

$$Dq(x)(y) = \frac{d}{dt}(q(x+ty))_{|t=0} = 2b(x,y)$$

En particulier, on a donc :

$$< \operatorname{grad} q(x), Ax >= Dq(x)(Ax) = 2b(x, Ax) = \int_0^{+\infty} 2 < e^{tA}x, e^{tA}Ax > dt$$

Or $< e^{tA}x, e^{tA}x >' = < e^{tA}Ax, e^{tA}x > + < e^{tA}x, e^{tA}Ax >= 2 < e^{tA}x, e^{tA}Ax >$ d'où :

$$\int_0^\infty 2 < e^{tA}x, e^{tA}Ax > dt = [\| e^{tA}x \|^2]_0^\infty = - \| x \|^2$$

car $\| e^{tA}x \| \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$ d'après l'étape 2.

Étape 5 On suppose qu'il existe une solution $y(t)$ au problème initial définie pour tout $t \geq 0$. On pose $r(y) = f(y) - Ay$. Montrons que $q(y)' = - \| y \|^2 + 2b(y, r(y))$ et que $\exists \alpha, \beta > 0$ tels que $q(y) \leq \alpha$ implique $- \| y \|^2 + 2b(y, r(y)) \leq \beta q(y)$.
On a le système : $y' = f(y) = Ay + r(y)$.

$$q'(y) = Dq(y)(y') = 2b(y, y') = 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y)) = - \| y \|^2 + 2b(y, r(y))$$

d'après l'étape 4.
On remarque qu'on aurait simplement $q(z)' = - \| z \|^2$ pour le système linéarisé. L'idée est que, r étant petit, les fonctions $q(y(t))$ et $q(z(t))$ auront à peu près le même comportement quand $t \longrightarrow +\infty$. Pour préciser cela, on va majorer $b(y, r(y))$ en utilisant, par commodité, la norme donnée par la forme quadratique q. On a :

$$|b(y, r(y))| \leq \sqrt{q(y)}\sqrt{q(r(y))}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour une forme bilinéaire et par définition de la norme associée à une forme quadratique.
Comme $r(y) = f(y) - Ay = f(y) - f(0) - Df(0)(y)$ (car $f(0) = 0$ et $A = Df(0)$) et comme par définition de la différentielle :

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \| h \| \epsilon(\| h \|)$$

avec $\epsilon(h) \longrightarrow 0$ quand $h \longrightarrow 0$. Si on fait $a = 0$, $h = y$ et $\| \, . \, \| = \sqrt{q(.)}$, alors on obtient :

$$f(y) = f(0) + Df(0)(y) + \sqrt{q(y)}\epsilon(\sqrt{q(y)})$$

D'où $\forall \epsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que $q(y) \leq \alpha$ implique $\sqrt{q(r(y))} \leq \epsilon\sqrt{q(y)}$ (par définition de limite).
Ainsi :

$$2b(y, r(y)) \leq 2\epsilon q(y)$$

De plus d'après l'équivalence des normes $\| \,.\, \|$ et $\sqrt{q(.)}$, il existe une constante $C > 0$ telle que $Cq(y) \leq \| y \|^2$, d'où :

$$q(y)' = - \| y \|^2 + 2b(y, r(y)) \leq -\beta q(y)$$

pour $q(y) \leq \alpha$ et avec $\beta = C - 2\epsilon$ (qui est positif si on choisit $\epsilon < \frac{C}{2}$).

Étape 6 Déduisons-en que $q(x) < \alpha$ implique $q(y(t)) \leq \alpha$ pour tout $t \geq 0$ et que $q(y(t)) \leq e^{-\beta t}q(x)$.
D'après l'étape 5, on a : $q(y(t))' \leq -\beta q(y(t))$ lorsque $q(y(t)) \leq \alpha$, cette condition est satisfaite pour $t \geq 0$ si la donnée initiale x vérifie $q(x) < \alpha$.
En effet, sinon il existerait $t_0 > 0$ tel que $q(y(t_0)) = \alpha$ d'où $q(y(t_0))' \leq -\beta q(y(t_0)) < 0$ et $q(y(t))$ devrait être $> \alpha$ pour t légèrement inférieur à t_0, ce qui est en contradiction avec la définition de t_0.
$q(y)$ vérifie une inéquation différentielle, on la résout :

$$(e^{\beta t}q(y))' = e^{\beta t}(q(y)' + \beta q(y)) \leq 0$$

d'après l'étape 5. Or $y(0) = x$ d'où $\forall t \geq 0$:

$$q(y(t)) \leq e^{-\beta t}q(x)$$

Donc $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 quand $t \longrightarrow +\infty$, tout comme $z(t)$ du système linéarisé.

Lemmes utilisés
- Cauchy-Schwartz ;
- norme définie à partir d'une forme quadratique
- ajouter déf d'un point d'équilibre attractif ;
- ajouter méthode de calcul d'une différentiel avec l'ajout de t ;
- ajouter formule liant le gradient et la différentielle.

Lemme 0.1 (Décomposition des noyaux) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P = P_1 \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$ avec les $P_i \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux. Alors :* $\ker(P(f)) = \ker(P_1(f)) \oplus \dots \oplus \ker(P_k(f))$.

Démonstration On procède par récurrence sur $k \geq 2$.
- **k=2** Comme P_1 et P_2 sont premiers entre eux alors d'après le théorème de Bézout il va exister $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP_1 + VP_2 = 1$.
  Soit $x \in \ker(P_1(f)) \cap \ker(P_2(f))$. Alors $P_1(f)(x) = 0$ et $P_2(f)(x) = 0$. Or d'après la relation de Bézout $x = (UP_1 + VP_2)(x) = UP_1(f)(x) + VP_2(f)(x) = 0$ donc $x = 0$. Donc $\ker(P_1(f)) \cap \ker(P_2(f)) = \{0\}$.
  Soit $x \in \ker(P(f))$. On a toujours $x = (UP_1 + VP_2)(x)$. Or :

  $$P_2(f)(UP_1(f)(x)) = UP_1P_2(f)(x) = UP(f)(x) = 0$$

  donc $UP_1(f)(x) \in \ker(P_2(f))$.
  De même, on montre que $VP_2(f)(x) \in \ker(P_1(f))$ donc $x = UP_1(f)(x) + VP_2(f)(x)$ s'écrit somme d'un élément de $\ker(P_1(f))$ et de $\ker(P_2(f))$ d'où le résultat.
- **k $\geq$ 2** On suppose que le résultat est vrai au rang k.
  On a $P = Q_1Q_2$ avec $Q_1 = P_1 \dots P_k$ et $Q_2 = P_{k+1}$, comme les polynômes Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux, alors d'après le cas où $k = 2$, on a $\ker(P(f)) = \ker(Q_1(f)) \oplus \ker(Q_2(f))$.
  Or par hypothèse de récurrence on sait que $\ker(Q_1(f)) = \ker(P_1(f)) \oplus \dots \oplus \ker(P_k(f))$. D'où le résultat.

Corollaire 0.1.1 $\mathbb{C}^n = \bigoplus_j \ker(A - \lambda_j I)^{m_j}$

Démonstration On pose $P = \prod_j (X-\lambda_j)^{m_j}$. Comme les $(X-\lambda_j)^{m_j}$ sont premiers entre eux deux à deux (car les λ_j sont distincts) et comme A est la matrice d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, alors d'après le lemme des noyaux :

$$\ker(P(f)) = \bigoplus_j \ker(f-\lambda_j id)^{m_j}$$

Or A diagonalisable, donc $P(f) = 0$ d'où $\ker(P(f)) = \mathbb{C}^n$, d'où le résultat.

Lemme 0.2 *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors $\forall x \in E$, $x = \sum_i x_i e_i$.
On sait que $N_0(x) = \sup_i |x_i|$ définit une norme sur E. Montrons que toutes les normes sur E sont équivalentes à N_0.
Soit N une norme sur E, on a $\forall x \in E$:

$$\begin{aligned} N(x) = N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) &\leq \sum_{i=1}^n N(x_i e_i) \quad \text{car } N \text{ norme}\,; \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \quad \text{car } N \text{ norme}\,; \\ &\leq \sup_i |x_i| \sum_{i=1}^n N(e_i) = CN_0(x) \end{aligned}$$

Munissons maintenant $\mathbb{K}^n$ de la norme produit, ie $\| (x_1, \ldots, x_n) \|_\infty = \sup_i |x_i|$.L'application :

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{K}^n, \| \,.\, \|_\infty) &\longrightarrow (E, N_0) \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

est une isométrie donc $S = \{x \in E, N_0(x) = 1\}$ est un compact de (E, N_0) (car image de la sphère unité de $\mathbb{K}^n$, qui est compacte car fermée et bornée dans $\mathbb{K}^n$, par ϕ qui est continue car isométrique). D'après l'inégalité précédente et celle de Minkowski, on a :

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq CN_0(x-y)$$

Donc l'application $N : (E, N_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.
Or comme S est un compact de (E, N_0), on en déduit que $b = \inf_{N_0(x)=1} N(x) \neq 0$. Ainsi $\forall x \in E$, $x \neq 0$:

$$N(x) = N_0(x) N\left(\frac{x}{N_0(x)}\right) \geq bN_0(x)$$

D'où le résultat.

Lemme 0.3 *Une suite convergente est bornée.*

Démonstration Comme $(u_n)_n$ est une suite convergente alors :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \epsilon$$

Ainsi si $n \geq N$, $|u_n| = |u_n - l + l| \leq \epsilon + |l|$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \max_{n<N} |u_n| + \epsilon + |l|$.
Donc $(u_n)_n$ est bornée.

Références

[Gou94] Xavier Gourdon. *Algèbre.* Ellipses, 1994.

[Gou08] Xavier Gourdon. *Analyse.* Ellipses, 2008.

[Rou09] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel.* Cassini, 2009.