Tudo o que você sempre quis saber sobre álgebras de Lie e teve medo de perguntar

Pedro J Freitas

Janeiro de 2006

Definições gerais

Definição

Sophus Lie

Definição *Uma* **álgebra de Lie** *sobre um corpo F é um espaço vectorial L, sobre F munido com uma operação $[\ ,\ ]$, chamada* parêntese de Lie*, bilinear, anti-simétrica e satisfazendo a* igualdade de Jacobi*: para $x, y, z \in L$,*

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

♣ **Exemplos.**

- Qualquer espaço vectorial, com $[\cdot,\cdot] \equiv 0$.
- O conjunto de todas as matrizes do tipo $n \times n$, com $[A,B] := AB - BA$.
- Analogamente, sendo V um espaço vectorial, os endomorfismos lineares de V, com $[f,g] := fg - gf$.
- Sendo M uma variedade diferenciável, os campos vectoriais definidos em V, com $[X,Y] := D_Y X - D_X Y$.

As famílias clássicas

Alguns subconjuntos do conjunto de todas as matrizes, constituem importantes exemplos de álgebras de Lie.

- As matrizes de traço 0, notadas por $\mathfrak{sl}(n+1,F)$, ou A_n.
- As matrizes que satisfazem $XJ + JX = 0$, nos seguintes casos:
  - $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{bmatrix}$. O conjunto é denotado $\mathfrak{o}(2n+1,F)$ ou B_n.
  - $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$. O conjunto é denotado $\mathfrak{sp}(2n,F)$ ou C_n.
  - $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$. O conjunto é denotado $\mathfrak{o}(2n,F)$ ou D_n.

Algumas definições (1)

Definição *Seja L uma álgebra de Lie sobre um corpo F.*

- *Um subespaço $K \subseteq L$ diz-se uma* subálgebra *se*

$$\forall x \in K,\ y \in K\ \ [x,y] \in K.$$

- *Uma subalgebra $I \leq L$ diz-se um* ideal *se*

$$\forall x \in L,\ y \in I\ \ [x,y] \in I.$$

- *Uma álgebra de Lie diz-se* simples *se não tiver ideais próprios.*

$\mathfrak{sl}(2,F)$ é simples

Proposição *Seja F um corpo de característica diferente de 2. Então $\mathfrak{sl}(2,F)$ é simples.*

Demonstração. Vamos notar

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esta é uma base de $\mathfrak{sl}(2,F)$. Temos que

$$[h,x] = 2x, \quad [h,y] = -2y, \quad [x,y] = h.$$

Suponhamos então que $0 \neq I \trianglelefteq L$, e que $0 \neq ax + by + ch \in I$.
Fazendo o parêntese com x duas vezes, obtemos $-2bx = 0$.
Fazendo o parêntese com y duas vezes, obtemos $-2ay = 0$.
Assim, se a ou b forem não nulos, temos $I = L$.
Se ambos forem 0, temos $h \in I$ e $I = L$. $\square$

Algumas definições (2)

Chamamos a $[x, y]$ um *comutador*.

Sendo $K, N \subseteq L$, definimos

$$[K, N] := <[x, y],\ x \in K,\ y \in N>.$$

Se $K, N \trianglelefteq L$, então $[K, N] \trianglelefteq L$. Se $x \in K$, $y \in N$ e $z \in L$, temos

$$[z, [x, y]] = -[x, [y, z]] - [y, [x, z]] = -[x, [y, z]] + [[x, z], y] \in [K, N]$$

Seja $K \leq L$. Definimos o *centralizador de* L como

$$C_L(K) = \{x \in L : [x, y] = 0\, \forall y \in K\}.$$

Notamos por $Z(L) = C(L)$, o centro de L. Se $Z(L) = L$, L diz-se *abeliana*.

Definimos o *normalizador de* K como

$$N_L(K) = \{x \in L : [x, y] \in K\, \forall y \in K\}.$$

7 / 79

Representações e módulos

Seja L uma álgebra de Lie sobre um corpo F.

- Dizemos que uma aplicação $\phi : L \to \mathfrak{gl}V$, V um espaço vectorial sobre F, é uma *representação* de L se ϕ for uma aplicação linear que respeite o parêntese de Lie — isto é, para quaisquer $x, y \in L$,

  $$\phi([x, y]) = \phi(x)\phi(y) - \phi(y)\phi(x).$$

  Neste caso, V diz-se um *módulo* (de Lie) sobre L.
- $V' \leq V$ diz-se um submódulo-L de V, se, para todo o $x \in L$, $\phi(x)(V') \subset V'$.

8 / 79

Indecomponibilidade e irredutibilidade

- Uma representação $\phi : L \to \mathfrak{gl}V$ diz-se *irredutível* se V não admitir submódulos-L, para além dos triviais L e 0. Neste caso, V diz-se um módulo *simples*.
- Uma representação $\phi : L \to \mathfrak{gl}V$ diz-se *indecomponível* se V não admitir uma expressão como $V = U \oplus W$, com U, W submódulos-L.
- Uma representação $\phi : L \to \mathfrak{gl}V$ diz-se *completamente decomponível* se existirem $V_1, \ldots, V_k$ submódulos simples de V tais que

  $$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k.$$

  Em dimensão finita, isto é equivalente a pedir que qualquer submódulo $U \leq V$ tenha um complemento, isto é, outro submódulo $U \leq V$ com $V = U \oplus W$.

A representação adjunta

Existe uma representação de L para $\mathfrak{gl}L$, a *representação adjunta*: para $x, y \in L$,

$$(\operatorname{ad} x)(y) := [x, y],$$

que tem como núcleo o *centro de* L:

$$Z(L) := \{x \in L : [x, y] = 0 \,\forall y \in L\},$$

que é um ideal de L.

Nota: L é simples se e só se a representação adjunta for irredutível — isto porque um submódulo para a representação adjunta é um ideal de L.

Forma de Killing

Wilhelm Killing

Definição *Seja L uma álgebra de Lie. Definimos a* forma de Killing *de L como*

$$\kappa(x, y) := \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y).$$

- É simples de ver que a forma é simétrica.
- Se f for um automorfismo de L, então $\kappa(f(x), f(y)) = \kappa(x, y)$.
- Nas álgebras clássicas, $\mathfrak{sl}(n, F)$, $o(n, F)$ e $\mathfrak{sp}(n, F)$, a forma é dada por

$$\kappa(x, y) = C(n) \operatorname{tr}(xy^T),$$

em que $C(n) \in F$ é uma constante.

Definições

Definimos em L as seguintes séries descendentes de ideais:

Série Derivada	*Série Central Inferior*
$L^{(0)} = L$	$L^0 = L$
$L^{(1)} = [L, L]$	$L^1 = [L, L]$
$L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}]$	$L^2 = [L, L^1]$
$\ldots$	$\ldots$
$L^{(i+1)} = [L^{(i)}, L^{(i)}]$	$L^{i+1} = [L, L^i]$
$\ldots$	$\ldots$

- Se a série derivada chegar a 0, a álgebra diz-se *resolúvel*.
- Se a série central inferior chegar a 0, a álgebra diz-se *nilpotente*.

Como $L^{(i)} \subset L^i$ para todo o i, toda a álgebra nilpotente é resolúvel.

Exemplos

♣ **Exemplo**: A álgebra das matrizes triangulares superiores $\mathfrak{t}(n, K)$ é resolúvel, e a álgebra das matrizes triangulares superiores de diagonal nula $\mathfrak{n}(n, K)$ é nilpotente.

Para verificar isto, definimos o *nível* de uma matriz triangular superior como a primeira sobre-diagonal onde aparece o primeiro elemento diferente de zero, tendo nível 0 a diagonal principal.
Formalmente, se esse elemento aparece na entrada (i, j) o nível é $j - i$.
Exemplos: as seguintes matrizes têm, respectivamente, níveis 0, 1 e 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

É simples de verificar que, para $A, B \in \mathfrak{t}(n, F)$, temos que

$$\mathrm{nv}(AB) = \mathrm{nv}(A) + \mathrm{nv}(B),$$

e portanto

$$\mathrm{nv}([A, B]) \geq \mathrm{nv}(A) + \mathrm{nv}(B).$$

Se A e B forem de nível 0, $[A, B]$ vem de nível maior ou igual a 1.

Exemplos (cont)

Notamos por $\mathfrak{t}_k(n, F)$ as matrizes de $\mathfrak{t}(n, F)$ de nível maior ou igual a k. Em particular $\mathfrak{t}_0(n, F) = \mathfrak{t}(n, F)$, $\mathfrak{t}_1(n, F) = \mathfrak{n}(n, F)$. É simples de ver agora que

$$[\mathfrak{t}_k(n, F), \mathfrak{t}_l(n, F)] = \mathfrak{t}_{k+l}(n, K).$$

Portanto, as séries derivada e central inferior para $\mathfrak{t}(n, F)$ são:

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}(n, F)^{(i)} &= \mathfrak{t}_{2^{i-1}}(n, F), \quad i > 1, \\ \mathfrak{t}(n, F)^2 &= [\mathfrak{t}(n, F), \mathfrak{t}(n, F)] = \mathfrak{n}(n, F), \\ \mathfrak{t}(n, F)^i &= [\mathfrak{t}(n, F), \mathfrak{n}(n, F)] = \mathfrak{n}(n, F). \end{aligned}$$

A série central inferior para $\mathfrak{n}(n, F)$ é:

$$\mathfrak{n}(n, F)^i = \mathfrak{t}_{i+1}(n, F).$$

Portanto, $\mathfrak{t}(n, f)$ é resolúvel, mas não nilpotente, enquanto $\mathfrak{n}(n, F) = [\mathfrak{t}(n, F), \mathfrak{t}(n, F)]$ é nilpotente (logo, também resolúvel).

Algumas propriedades

Seja L uma álgebra de Lie, $I, J \trianglelefteq L$. Temos as seguintes propriedades:

- Se L for resolúvel ou nilpotente, o mesmo se passa com I e com L/I.
- Se L/I e I forem resolúveis, o mesmo se passa com L.
- Se $L/Z(L)$ for nilpotente, o mesmo se passa com L.
- Se I e J forem resolúveis ou nilpotentes, o mesmo se passa com $I + J$.

A demonstração da última propriedade é muito diferente para os casos resolúvel e nilpotente.
No primeiro caso, temos que $(I + J)/I \cong J/(I \cap J)$, logo é resolúvel. Como I é resolúvel, $I + J$ é resolúvel.
No segundo caso, os geradores de $(I + J)^{n+1}$ são da forma

$$[x_1, [x_2, \ldots [x_{n-1}, x_n] \ldots]],$$

em que cada x_i está em I ou em J. Portanto se $I^r = 0$ e $J^s = 0$, tomando $n + 1 > r + s$, temos que estes elementos têm que estar ou em I^r ou em J^s, logo $I + J$ é nilpotente.

Os radicais

Devido à última propriedade do slide anterior, é possível definir, numa álgebra de Lie L de dimensão finita:

- O ideal resolúvel máximo, chamado o **radical**, ou radical resolúvel, e
- O ideal nilpotente máximo, chamado o **nilradical**.

ad-nilpotência

Suponhamos que L é uma álgebra de Lie nilpotente. Isso quer dizer que, para um certo $n \in \mathbb{N}$, e quaisquer $x_1, \ldots, x_n, y \in L$,

$$[x_1, [x_2, \ldots [x_n, y] \ldots]] = 0.$$

Escrito doutra maneira,

$$(\mathrm{ad}\, x_1)(\mathrm{ad}\, x_2) \ldots (\mathrm{ad}\, x_n)(y) = 0.$$

Em particular $\mathrm{ad}\, x$ é nilpotente, para qualquer $x \in L$. Dizemos então que L é ad-*nilpotente*.

Em característica zero, a recíproca é também (surpreendentemente) verdadeira! É esse o enunciado do teorema de Engel.

Teorema de Engel

Suponhamos que F tem característica 0.

Teorema. *Seja $L \subseteq \mathfrak{gl}V$, com V de dimensão n, uma subálgebra constituída por endomorfismos nilpotentes. Então existe uma base de V em relação à qual as matrizes dos elementos de L estão em $\mathfrak{n}(n, F)$.*

Teorema de Engel. *Seja L uma álgebra de Lie para a qual, se $x \in L$, $\mathrm{ad}\, x$ é nilpotente. Então L é nilpotente.*

Pesos

Suponhamos agora que F tem característica 0 e é algebricamente fechado.

Teorema. *Seja L uma álgebra nilpotente, e V um módulo-L indecomponível, de dimensão n, associado à representação ϕ. Então existe uma base B de V em relação à qual as matrizes de $\phi(L)$ são do tipo*

$$M(\phi(x), B) = \lambda(x) I_n + N(x),$$

com $N(x) \in \mathfrak{n}(n, F)$, para cada x.

A aplicação λ, do teorema anterior, é uma aplicação linear de L em F, isto é, é um elemento de L^*. Se existe um módulo V, indecomponível, tal que as matrizes de $\phi(L)$ têm diagonal determinada por $\lambda \in L^*$, então λ é chamado um **peso de** L. É como se fosse um *valor próprio para toda a álgebra ao mesmo tempo.*

Teorema de Lie

Seja agora F um corpo algebricamente fechado de característica 0.

Teorema de Lie. *Seja $L \subseteq \mathfrak{gl}V$ uma álgebra de Lie resolúvel, com V espaço vectorial de dimensão finita sobre F. Então existe em V um vector próprio comum a todos os elementos de V. Daqui segue que os elementos de L são simultaneamente triangularizáveis.*

A diferença principal em relação ao caso nilpotente, é que os elementos da diagonal principal não têm que ser iguais nas representações indecomponíveis.

Assim, vemos que $\mathfrak{t}(n, F)$ e $\mathfrak{n}(n, F)$ são exemplos muito importantes de resolubilidade e nilpotência, respectivamente.

Relações entre nilpotência e resolubilidade

Destes resultados saem as seguintes relações entre nilpotência e resolubilidade.

Teorema *Seja L uma álgebra de Lie e κ a sua forma de Killing. Temos que*

- *Se L é nilpotente, κ é identicamente nula.*
- *L é resolúvel se e só se $\kappa([L, L], L) = 0$.*
- *Se $\mathrm{car}(F) = 0$, então L é resolúvel se e só se $[L, L]$ é nilpotente.*

Revisões de álgebra linear

Formas bilineares

Seja Ω uma forma bilinear, definida em V, espaço vectorial de dimensão n sobre F, isto é, uma aplicação bilinear $V \times V \to F$.

Define-se a *matriz de* Ω em relação a uma base de V, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ como a matriz do tipo $n \times n$, em que a entrada (i, j) é dada por $\Omega(e_i, e_j)$.

A forma Ω diz-se *não degenerada* se tivermos qualquer uma das seguintes condições equivalentes:

- Para qualquer $0 \neq v \in V$, temos $\Omega(v, \cdot) \not\equiv 0$.
- A matriz de Ω em relação a qualquer base de V é invertível.
- A matriz de Ω em relação a uma dada base de V é invertível.

Não degenerescência

Seja então Ω uma forma não degenerada definida em V. Então esta define um isomorfismo de V para $V^* := L(V, F)$:

$$\begin{array}{ccc} V & \to & V^* \\ v & \mapsto & \Omega(v, \cdot) \end{array}$$

Trata-se de uma aplicação injectiva por causa de Ω ser não degenerada: se $v \neq 0$, $\Omega(v, \cdot) \neq 0$, logo o núcleo da aplicação é zero.

Como $\dim V = \dim V^*$, temos que a aplicação é um isomorfismo.

Espaços Ω-complementares

Continuamos a supôr definida em V uma forma Ω não degenerada.

Para $W \leq V$, definimos o conjunto

$$W^\perp := \{v \in V : \forall\, w \in W \quad \Omega(w, v) = 0\}.$$

Temos que $W^\perp$ é um subespaço vectorial de V de dimensão $\dim V - \dim W$.

Tudo isto é semelhante ao que se passa quando Ω é o produto interno num espaço vectorial real.

Definição

Lembramos que, para uma álgebra de Lie L, o *radical de* L é o ideal resolúvel máximo, que notaremos $\operatorname{Rad} L$.

Definição *Se* $\operatorname{Rad} L = 0$*,* L *diz-se* semisimples*.*

♣ Exemplo: $L/\operatorname{Rad} L$ é semisimples. Isto porque um ideal resolúvel de $L/\operatorname{Rad} L$ teria a forma $I/\operatorname{Rad} L$, com I ideal resolúvel de L.

Algumas propriedades.

- L é semisimples se e só se a sua forma de Killing é não degenerada.
- Se L é semisimples, então a representação ad é injectiva, pois o seu centro, $Z(L)$, se não fosse zero, seria resolúvel e não nulo.

Primeira decomposição

A partir de agora, L será uma álgebra de Lie semisimples sobre um corpo algebricamente fechado de característica 0.

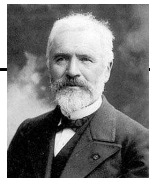
Temos que $L = I_1 \oplus \ldots \oplus I_k$, com I_j ideais simples, $1 \le j \le k$. Mais: qualquer ideal de L é soma directa de alguns destes ideais.

Isto é o mesmo que dizer que *a representação adjunta é completamente decomponível*. Se quisermos encontrar um complemento para um ideal I, este é

$$I^{\perp} = \{x \in L : \kappa(x, I) = 0\}$$

que satisfaz o pretendido, entre outras coisas, por causa de κ ser não degenerada.

Decomposição de Jordan-Chevalley



Camille Jordan

Para $x \in L$, existe uma decomposição única, da forma

$$x = s + n$$

com $\operatorname{ad} s$ diagonalizável, $\operatorname{ad} n$ nilpotente e $ns = sn$. Esta é a *decomposição de Jordan-Chevalley*, que coincide com a habitual se $L \subseteq \mathfrak{gl}V$. Mais geralmente:

Se $x = s + n$ for a decomposição de Jordan generalizada, e $\phi : L \to \mathfrak{gl}V$ for uma representação, então $\phi(s)$ é diagonalizável, e $\phi(n)$ é nilpotente.

30 / 79

Um exemplo motivador: $\mathfrak{sl}(2, F)$

Vamos a partir de agora definir as *raízes* de uma álgebra de Lie semisimples.

♣ **Exemplo**: Considere-se $\mathfrak{sl}(2, F)$, que é simples, com base

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere-se a acção de $\operatorname{ad} h$ em L, que é diagonalizável: os vectores próprios são precisamente x, h, y:

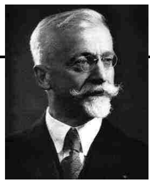
$$(\operatorname{ad} h)(x) = [h, x] = 2x, \quad (\operatorname{ad} h)(h) = 0, \quad (\operatorname{ad} h)(y) = -2y.$$

Então $\mathfrak{sl}(2, F) = <h> \oplus <x> \oplus <y>$, com $<x>$, $<h>$, $<y>$ espaços próprios para a acção de h.

Nota: Estes espaços não são ideais! Lembramos que $\mathfrak{sl}(2, F)$ é simples.

31 / 79

Subálgebras de Cartan



Élie Cartan

Para uma álgebra semisimples L, em geral, o que vai fazer o papel de $h \in \mathfrak{sl}(2, F)$ é uma subálgebra nilpotente contida em L.

- Dizemos que $H \leq L$ é uma *subálgebra de Cartan* se H for nilpotente e $N_L(H) = H$.
- Dizemos que $H \leq L$ é uma *subálgebra toral maximal* se for uma subálgebra maximal entre as fomadas por elementos x com $\operatorname{ad} x$ diagonalizável.

Como L é semisimples, estas duas definições são equivalentes.
Uma propriedade importante destas subálgebras é que são abelianas. Por isso, $\operatorname{ad} H$ é formado por elementos simultaneamente diagonalizáveis.
Por outras palavras, considerando L como módulo-H, *os seus submódulos irredutíveis têm dimensão 1*, de acordo com o que estudámos sobre as álgebras nilpotentes. Assim, os pesos estão ligados a submódulos indecomponíveis de dimensão 1.

32 / 79

Raízes

Podemos então decompor L em espaços próprios para *todos* os elementos de H: tomamos, para $\alpha \in H^*$,

$$L_\alpha := \{x \in L : \forall h \in H (\operatorname{ad} h)(x) = \alpha(h)x\}.$$

As formas $\alpha \in H^*$ para as quais existe um submódulo $L_\alpha \subset L$ é não nulo são chamadas as **raízes de L em relação a H**.

As raízes são então os pesos de L, como representação de H, pela acção adjunta.

Como já dissemos, eles são como valores próprios para toda a álgebra H ao mesmo tempo.

33 / 79

Segunda decomposição: espaços-raiz

$$L_\alpha := \{x \in L : \forall h \in H (\operatorname{ad} h)(x) = \alpha(h)x\}.$$

Temos que $H = L_0$. Tomando Φ como o conjunto dos elementos $\alpha \in H^*$ diferentes de 0, com $L_\alpha \neq 0$, então podemos escrever

$$L = H \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha).$$

Isto é válido para qualquer álgebra nilpotente. O que é especial aqui é que as matrizes de $\operatorname{ad} H$ são diagonais, mais do que triangulares superiores.

Os espaços L_α, com $\alpha \in \Phi$ chamam-se *espaços-raiz*.

♣ Em $\mathfrak{sl}(2, F) = <h> \oplus <x> \oplus <y>$, os espaços $<x>$ e $<y>$ são espaços-raiz, e $H = <h>$.

$\mathfrak{sl}(3, F)$

♣ **Exemplo**. Para $\mathfrak{sl}(3, F) = \{X \in M(3, F) : \operatorname{tr} X = 0\}$,

$$H = <\operatorname{diag}(1, -1, 0), \operatorname{diag}(0, 1, -1)> = \mathfrak{sl}(3, F) \cap \operatorname{diag}(3, F).$$

Para $1 \leq i \leq 3$, notemos $\pi_i : \operatorname{diag}(3, F) \to F$, com

$$\pi_i(\operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3)) = a_i.$$

Para cada par (i, j), com $1 \leq i \neq j \leq 3$, temos que

$$L_{ij} = FE_{ij} = <E_{ij}>$$

é um espaço-raiz, associado à raiz $\alpha_{ij} = \pi_i - \pi_j$.

Propriedades dos espaços-raiz

Sejam α, β raízes de L em relação à subálgebra H. Temos as seguintes propriedades.

- L_α tem dimensão 1.
- $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.
- Se $\alpha \neq \pm\beta$, $\kappa(L_\alpha, L_\beta) \equiv 0$.
- Se $\alpha \in \Phi$, $-\alpha \in \Phi$.
- Para $x_\alpha \in L_\alpha$, existe $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, tal que, pondo $h_\alpha := [x_\alpha, y_\alpha] \in H$, temos

$$<x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha> \cong \mathfrak{sl}(2, F).$$

- Os elementos h_α estão bem definidos, não dependem da escolha de x_α.
- $\alpha(h_\beta) \in \mathbb{Z}$.

Um produto interno

Temos que κ, a forma de Killing de L, pode ser restrita a H, continuando não degenerada. Isto dá um isomorfismo $H \to H^*$, o que permite igualmente transportar κ para H^*.

A forma, quando restrita a $\mathbb{Q}\Phi \subseteq H^*$ continua não degenerada, e, mais ainda, definida positiva. Como F tem característica 0, temos que, a menos de isomorfismo, $\mathbb{Q} \subseteq F$. Considere-se então o espaço vectorial *real*

$$E := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\Phi \subseteq H^*$$

Temos que $\kappa|_{\mathbb{Q}\Phi}$ e prolongada a E é um *produto interno*, e portanto pode ser usado para definir comprimentos das raízes, e ângulos entre elas.

Temos que

$$\alpha(h_\beta) = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}.$$

Definição

Consideremos agora $\Phi \subseteq E$, espaço vectorial real com produto interno (espaço euclideano), dado por (α, β).
Para $\alpha \in \Phi$, notemos σ_α a reflexão em relação ao hiperplano perpendicular a α.
Temos as seguintes propriedades definidoras de Φ:

1. Φ é finito, gera E, e $0 \notin \Phi$.
2. Se $\alpha \in \Phi$, os únicos múltiplos de α que estão em Φ são $\pm\alpha$.
3. Se $\alpha \in \Phi$, $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$.
4. Se $\alpha, \beta \in \Phi$, $<\alpha, \beta> := \dfrac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}$.

Todo o conjunto Φ, contido num espaço euclideano E satisfazendo estas quatro condições chama-se um **sistema de raízes**.
Temos que todo o conjunto de raízes de uma álgebra de Lie semisimples satisfaz estas condições. Surpreendentemente, *qualquer conjunto satisfazendo estas quatro condições é sistema de raízes de alguma álgebra de Lie semisimples*.

Propriedades

Sejam $\alpha, \beta \in \Phi$, e θ o ângulo entre elas. Temos $(\alpha, \beta) = ||\alpha||.||\beta||.\cos\theta$, e portanto

$$<\alpha, \beta> = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = 2\frac{||\alpha||}{||\beta||}\cos\theta.$$

Da propriedade definidora 4, temos que o seguinte número tem que ser inteiro:

$$<\alpha, \beta><\beta, \alpha> = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 4\cos^2\theta.$$

Daqui saem as duas primeiras propriedades dos sistemas de raízes:

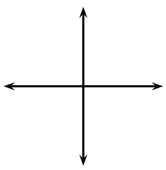
- O ângulo entre duas raízes $\alpha \neq \pm\beta$ só pode ser $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$ ou $5\pi/6$.
- Este ângulo determina o quociente $||\alpha||/||\beta||$ se $\theta \neq \pi/2$.
- Se Φ_1 é um sistema de raízes em E_1, e Φ_2 é um sistema de raízes em E_2, então $\Phi_1 \times \Phi_2$ é um sistema de raízes em $E_1 \times E_2$.

Ângulos e quocientes de normas

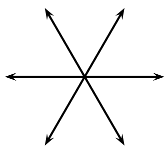
ângulo	quociente das normas
$\pi/2$	indeterminado
$\pi/3$ ou $2\pi/3$	1
$\pi/4$ ou $3\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/6$ ou $5\pi/6$	$\sqrt{3}$

Terminamos mostrando os sistemas de raízes em dimensão 2.

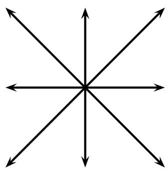
Em dimensão 2



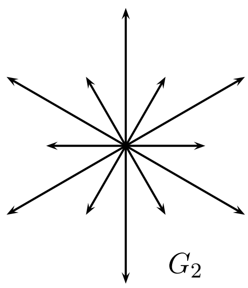
$A_1 \times A_1$



A_2



B_2



G_2

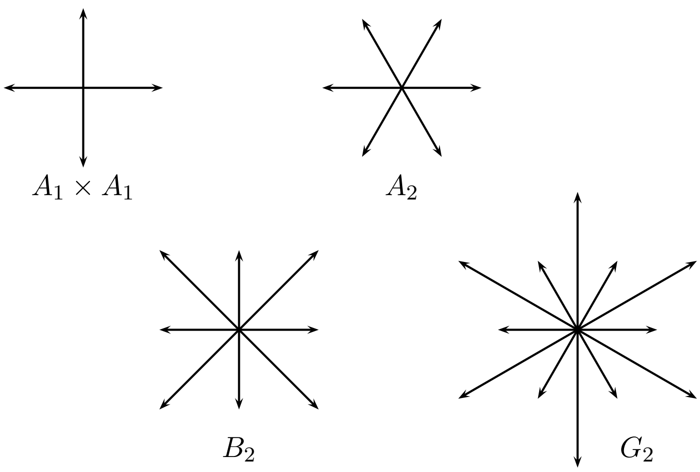
Relembrando. . .

Chamamos um *sistema de raízes* a qualquer subconjunto $\Phi \subseteq E$, espaço euclideano, satisfazendo as seguintes propriedades.

1. Φ é finito, gera E, e $0 \notin \Phi$.
2. Se $\alpha \in \Phi$, os únicos múltiplos de α que estão em Φ são $\pm\alpha$.
3. Se $\alpha \in \Phi$, $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$, em que σ_α é a reflexão relativa ao hiperplano perpendicular a α, que designaremos por P_α.
4. Se $\alpha, \beta \in \Phi$, $<\alpha, \beta> := \dfrac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}$.

- Temos $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - <\alpha, \beta>\beta$.
- Quando tomamos uma álgebra de Lie semisimples L e uma subálgebra de Cartan H, a acção adjunta de H em L dá origem a um sistema de raízes que satisfaz estas quatro propriedades.
- Veremos que a recíproca também é verdadeira: qualquer sistema de raízes provém de uma álgebra de Lie semisimples.

Exemplos em dimensão 2



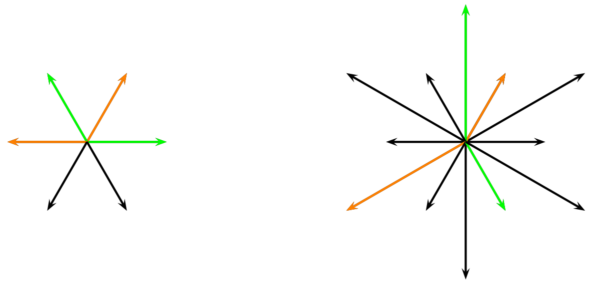
Estes são todos os exemplos possíveis em dimensão 2. A partir de agora vamos tomar A_2 e G_2 para exemplificar os vários conceitos que vamos definir.

Raízes fundamentais

Definição. *Seja Φ um sistema de raízes. Dizemos que $\Delta \subseteq \Phi$ é um* sistema de raízes fundamentais *(SRF), ou também* irredutíveis *ou* simples *se for uma base de E e os coeficientes dos elementos de Φ nessa base forem todos ou não negativos ou não positivos.*

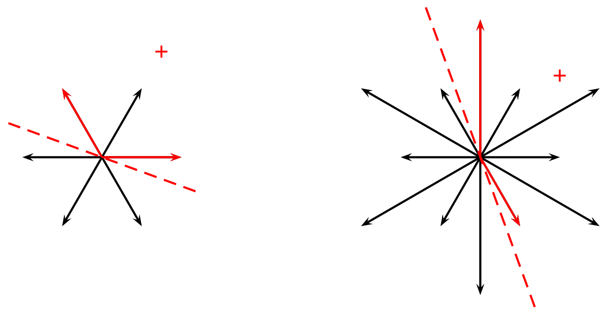
Proposição *Existe sempre um SRF em qualquer sistema de raízes. O ângulo entre duas raízes do SRF é sempre recto ou obtuso.*

♣ Exemplo. Sistemas de raízes fundamentais em A_2 e G_2:



Encontrando raízes fundamentais

Para encontrar sistemas de raízes fundamentais, podemos seguir o seguinte algoritmo.



- Toma-se um hiperplano que não contenha nenhuma raiz.
- Declaram-se *positivas* as raízes que estão dum dos lados do hiperplano, e *negativas* as restantes. Denotamos as raízes positivas e negativas por Φ^+ e Φ^-, respectivamente. Temos $\Phi^- = -\Phi^+$.
- Tomam-se, dentro das raízes positivas, as *indecomponíveis*, isto é, as que não podem ser escritas como soma de duas raízes positivas.

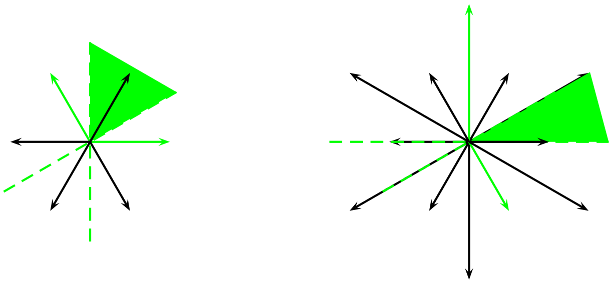
Câmaras de Weyl

Hermann Weyl

Definição. *Seja* $\Delta \subseteq \Phi$ *um sistema de raízes fundamentais. Chamamos* câmara de Weyl associada a Δ *ao conjunto*

$$\{\beta \in \Phi : (\beta, \alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta\}.$$

♣ **Exemplo**. Em A_2 e G_2, temos

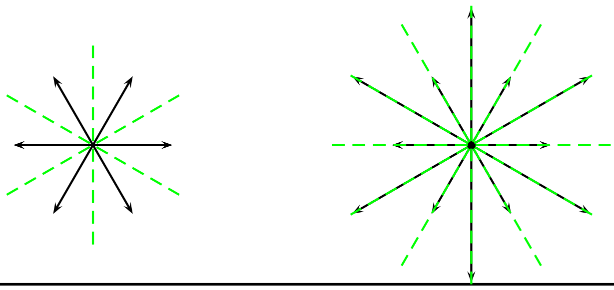


Há uma bijecção entre as câmaras de Weyl e os SRF's.

Propriedades das câmaras de Weyl

- As câmaras de Weyl podem também ser obtidas como as *componentes conexas de* E*, depois de se retirarem os hiperplanos* P_α *perpendiculares às raízes*.
- Aos elementos que estão no interior de alguma câmara de Weyl — isto é, fora de todos os hiperplanos P_α — chamamos *elementos regulares*.

♣ **Exemplo**. Em A_2 e G_2, temos



O Grupo de Weyl

Definição *Seja Φ um sistema de raízes, σ_α a reflexão en relação ao plano perpendicular a $\alpha \in \Phi$. Definimos o* grupo de Weyl de Φ *como o subgrupo de $\mathrm{GL}(V)$ gerado pelos elementos σ_α.*

♣ **Exemplos.** Estes são os grupos de Weyl para as famílias clássicas.

- A_n: $\mathcal{S}_n$.
- B_n e C_n: $\mathbb{Z}_2^n \rtimes \mathcal{S}_n$.
- D_n: $\mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes \mathcal{S}_n$.

Proposição *O grupo de Weyl de um sistema de raízes é finito, e é isomorfo a um subgrupo de $\mathcal{S}_n$, em que $n = |\Phi|$. Além disso, os elementos do grupo de Weyl são isometrias, isto é, preservam o produto interno.*

Proposição *O grupo de Weyl de Φ actua duma forma simplesmente transitiva no conjunto dos SRF's de Φ. O mesmo se passa no conjunto das câmaras de Weyl; aliás, as acções correspondem uma à outra.*

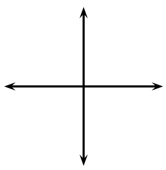
Classificação das Álgebras Simples

Irredutibilidade

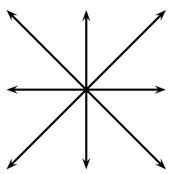
Voltamos agora ao quadro das álgebras de Lie semisimples sobre corpos algebricamente fechados de característica zero. Seja L uma álgebra de Lie semisimples, H uma subálgebra de Cartan, Φ o sistema de raízes de L em relação a H, $\Delta \subseteq \Phi$ um SRF, $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\mathcal{W}$ o seu grupo de Weyl.

Definição *Dizemos que Φ (ou Δ) é* irredutível *se não puder ser decomposto como união de dois subconjuntos ortogonais, isto é, se for impossível ter $\Phi = \Phi_1 \bigcup \Phi_2$, com $(\alpha, \beta) = 0$ se $\alpha \in \Phi_1$ e $\beta \in \Phi_2$.*

♣ **Exemplo**. $A_1 \times A_1$ é redutível, e B_2 é irredutível.



$A_1 \times A_1$



B_2

Simplicidade

Mantemos toda a notação — L, H, Φ, Δ, $\mathcal{W}$.

Proposição *As seguintes afirmações são equivalentes.*

- L *é simples.*
- Φ *é irredutível.*
- Δ *é irredutível.*

Mais, se $L = I_1 \oplus \ldots \oplus I_t$ *for a decomposição de* L *como soma de ideais simples, temos que* $\Phi = \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_t$*, em que é possível identificar* Φ_k *naturalmente com o sistema de raízes de* I_k*, para cada* k*.*

Como vemos, há uma relação muito estreita entre L e o seu sistema de raízes.

Matrizes de Cartan

Mantemos toda a notação — L, H, Φ, Δ, $\mathcal{W}$.
Vamos agora supor que Φ é indecomponível, isto é, que L é simples.
Chamamos *matriz de Cartan* de Φ (em relação a Δ) à matriz

$$\left[<\alpha_i, \alpha_j> = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} : 1 \leq i, j \leq n \right].$$

Temos as seguintes propriedades.

- Os elementos da diagonal principal são 2.
- Para outro SRF de Φ a matriz de Cartan é a mesma, ou obtém-se de esta por meio de conjugação por uma matriz de permutação. Isto porque os elementos de $\mathcal{W}$ são isometrias e actuam transitivamente no conjunto dos SRF's.
- Os inteiros $<\alpha_i, \alpha_j>$ chamam-se *inteiros de Cartan*.

Diagramas de Dynkin

Evgenii Dynkin

Sejam então $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta$. Vimos que $<\alpha_i, \alpha_j><\alpha_j, \alpha_i> = 4\cos^2\theta$, em que $\theta = \measuredangle(\alpha_i, \alpha_j)$.
Sabemos que este número tem que ser um inteiro, logo, como $\measuredangle(\alpha_i, \alpha_j) \geq \pi/2$, temos as seguintes possibilidades.

$\measuredangle(\alpha_i, \alpha_j)$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$
$\|\|\alpha_i\|\|/\|\|\alpha_j\|\|$	$\times$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$<\alpha_i, \alpha_j><\alpha_j, \alpha_i>$	0	1	2	3

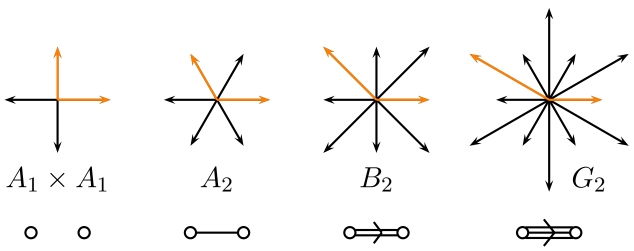
Definimos então o *diagrama de Dynkin de* Δ (ou de Φ, ou de L) como o multigrafo orientado seguinte.

- Temos um vértice por cada elemento de Δ.
- Entre dois vértices α_i e α_j, temos $<\alpha_i, \alpha_j><\alpha_j, \alpha_i>$ arestas.
- Se α_i e α_j tiverem comprimentos diferentes, põe-se uma seta apontando para o vértice correspondendo à de menor comprimento.

Exemplos

$\measuredangle(\alpha_i, \alpha_j)$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$
$\|\|\alpha_i\|\|/\|\|\alpha_j\|\|$	$\times$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$<\alpha_i, \alpha_j><\alpha_j, \alpha_i>$	0	1	2	3

♣ **Exemplos**. Para os sistemas de raízes de dimensão 2, temos:



Conexidade e simplicidade

$\measuredangle(\alpha_i, \alpha_j)$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$
$\lVert\alpha_i\rVert/\lVert\alpha_j\rVert$	$\times$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$<\alpha_i, \alpha_j><\alpha_j, \alpha_i>$	0	1	2	3

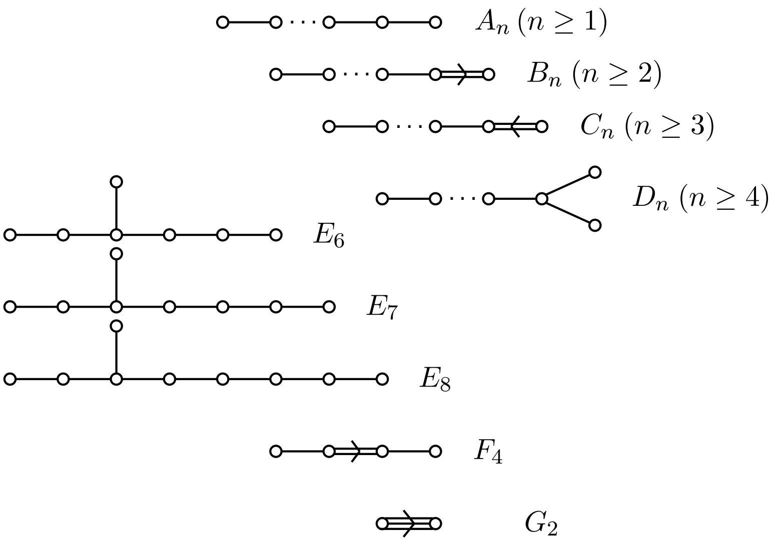
Proposição *As seguintes afirmações são equivalentes.*

- L *é simples.*
- Φ *é irredutível.*
- Δ *é irredutível.*
- *O diagrama de Dynkin de* Δ *(ou* Φ*, ou* L*) é conexo.*

Caracterizando então os diagramas de Dynkin conexos, obtemos uma classificação das álgebras simples.

Classificação

Teorema. *Os únicos diagramas de Dynkin conexos que existem são os seguintes.*



Álgebras simples

O teorema anterior prova assim que as famílias clássicas são formadas por álgebras simples, quando o corpo é algebricamente fechado de característica 0. Lembramos que conjuntos são estes.

- $A_n = \mathfrak{sl}(n+1, F)$ são as matrizes de traço 0.
- As matrizes que satisfazem $XJ + JX = 0$, nos seguintes casos:
  - Para $B_n = \mathfrak{o}(2n+1, F)$, $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{bmatrix}$.
  - Para $C_n = \mathfrak{sp}(2n, F)$, $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$.
  - Para $D_n = \mathfrak{o}(2n, F)$, $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$.

Para além destas há então mais 5 álgebras simples, que são notadas E_6, E_7, E_8, F_4 e G_2.

59 / 79

Unicidade (i)

No processo de obter o diagrama de Dynkin de uma álgebra de Lie L fizemos duas escolhas. Primeiro, escolhemos uma subálgebra de Cartan H, depois, em Φ escolhemos um SRF Δ. Ora, qualquer outra escolha nos levaria ao mesmo diagrama de Dynkin, devido aos seguintes resultados.

Teorema. *Seja L uma álgebra de Lie semisimples sobre um corpo algebricamente fechado de caracterísitca 0. Então quaisquer duas subálgebras de Cartan H e H' são conjugadas: existe um automorfismo de L, f, tal que $H = f(H')$.*

Teorema. *O grupo de Weyl actua duma forma simplesmente transitiva no conjunto dos SRF's de Φ.*

Assim, o sistema de raízes de uma álgebra de Lie semisimples está bem definido.

60 / 79

Unicidade (ii)

E pode um sistema de raízes provir de duas álgebras de Lie não isomorfas?

Também não, pois existe um algoritmo (determinista) que permite construir a álgebra de Lie a partir dum diagrama de Dynkin, retrocedendo cada passo.

Assim se podem construir, por exemplo, as 5 álgebras simples que não estão nas 4 famílias clássicas.

Assim, há uma correspondência bijectiva entre álgebras simples não isomorfas e os diagramas de Dynkin apresentados.

Representações de Dimensão Finita de Álgebras Semisimples

Relembrando. . .

Vamos agora estudar as representações de dimensão finita de álgebras semisimples. Começamos por fixar uma subálgebra de Cartan H e estudar a sua acção em L. Sabemos que L se decomopõe em espaços próprios para toda a subálgebra simultaneamente, indexados pelas raízes, que fazem o papel dos valores próprios generalizados:

$$L_\alpha := \{x \in L : \forall h \in H (\operatorname{ad} h)(x) = \alpha(h)x\}.$$

Temos que:

- L_α tem dimensão 1 e $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.
- Para $x_\alpha \in L_\alpha$, existe $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, tal que, pondo $h_\alpha := [x_\alpha, y_\alpha] \in H$, temos

$$<x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha> \cong \mathfrak{sl}(2, F).$$

- Os elementos h_α estão bem definidos (não dependem da escolha de x_α) e $\alpha(h_\beta) \in \mathbb{Z}$.

Teorema de Weyl

Sabemos também que $L = I_1 \oplus \ldots \oplus I_k$, ideais simples. Isto é dizer que a representação adjunta é completamente decomponível. Na verdade, isto é um caso particular de um teorema mais geral.

Teorema de Weyl. *Qualquer representação duma álgebra de Lie semisimples é completamente decomponível*.

Seja então $\phi : L \to \mathfrak{gl}V$ uma representação irredutível. Sabemos também, pela conservação da decomposição de Jordan-Chevalley ($x = s + n$, com s ad-diagonalizável e n ad-nilpotente), que $\phi(H)$ é formado por elementos *simultaneamente diagonalizáveis*.

Portanto, podemos falar dos *pesos de H* em V, que estão associados também a subespaços de V de dimensão 1, que são módulos-H irredutíveis.

64 / 79

Reticulado dos pesos

Seja então $\lambda \in H^*$ um peso de H em V, isto é, o seguinte espaço tem dimensão maior que 0:

$$V_\lambda = \{v \in V : \forall h \in H \quad h.v = \lambda(h)v\}$$

Proposição. *Temos que, se $\alpha \in \Phi$, $\lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$.*

Isto já se passava com as raízes, que eram os pesos da representação adjunta.

Tomemos então o conjunto

$$\Lambda_W = \{\lambda \in H^* : \forall\, \alpha \in \Phi \quad \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}\},$$

a que chamaremos o *reticulado dos pesos*.

65 / 79

Reticulado das raízes

Reticulado dos pesos:

$$\Lambda_W = \{\lambda \in H^* : \forall\, \alpha \in \Phi \quad \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}\}.$$

Pelo que já vimos $\Phi \subseteq \Lambda_W$, e portanto

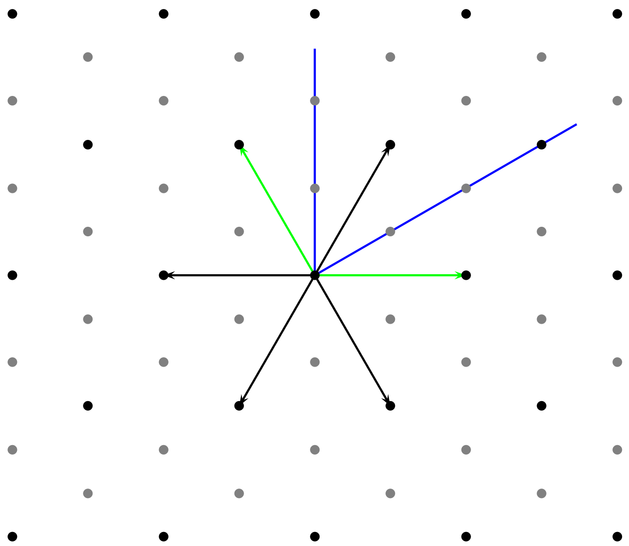
$$\mathbb{Z}\Phi \subseteq \Lambda_W.$$

Chamamos a $\Lambda_R := \mathbb{Z}\Phi$ o *reticulado das raízes*. Temos que Λ_W/Λ_R é finito.

Vejamos estes dois reticulados no sistema de raízes de $\mathfrak{sl}(3, F) = A_2$.

Exemplo: $A_2 = \mathfrak{sl}(3, F)$

Reticulados das raízes (a preto) e dos pesos (a cinzento) de A_3

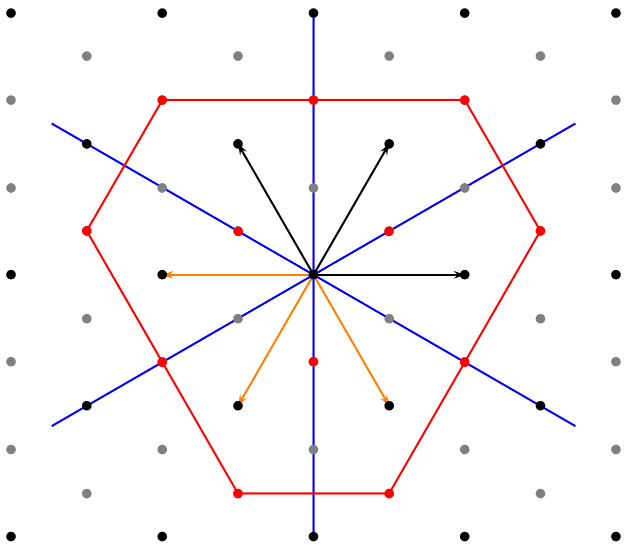


Pesos mais altos

Teorema. *Seja $\lambda \in \Lambda_W$ um elemento do reticulado dos pesos, que esteja dentro da câmara de Weyl fechada.*

- *Então existe uma representação irredutível de L, $\phi : L \to \mathfrak{gl}V$, de dimensão finita, que admite esse peso como* peso mais alto, *para a acção de H, isto é, todos os outros pesos se obtêm somando a λ raízes negativas (ou subtraíndo positivas).*
- *Os pesos que aparecem em V são os elementos de Λ_W contidos no poliedro limitado por $\{\sigma_\alpha(\lambda) : \alpha \in \Phi\}$ e que se podem obter como foi dito acima.*
- *Os pesos que aparecem em V formam um conjunto invariante pelo grupo de Weyl.*
- *Se $x \in L_\alpha \subseteq L$, e $v \in V_\mu$, com $\mu \in \Lambda_W$ um peso que aparece em V, então $\phi(x)(v) \in V_{\mu+\alpha}$.*

Mais uma vez em $A_2 = \mathfrak{sl}(3, F)$



Teorema PBW

Seja L uma álgebra de Lie qualquer. Vamos agora construir uma álgebra associativa que contenha L, a menos de isomorfismo, em que $[x, y] = xy - yx$.

Esta álgebra, chamada *álgebra envolvente universal*, é um quociente da álgebra tensorial de L:

$$U(L) := (\oplus_{n\in\mathbb{N}} \otimes^n V)/<x \otimes y - y \otimes x - [x, y]>.$$

O resultado mais importante sobre esta álgebra é o teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, que apresentamos a seguir.

Teorema PBW. *Seja $\{x_1, \ldots, x_r\}$ uma base de L. Então o conjunto dos monómios $\{x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r}\}$ é uma base de $U(L)$.*

Este teorema diz que a álgebra envolvente universal, neste aspecto, se comporta como a álgebra simética.

Consequências para as álgebras semisimples

O teorema PBW é um passo importante nas demonstrações de existência relativas às álgebras semisimples.

Por exemplo, usa-se para provar que é possível encontrar uma álgebra de Lie semisimples com um dado sistema de raízes (que é única a menos de isomorfismo).

É também usado na demonstração do teorema de Ado, que vamos ver a seguir.

Teoremas de Levi e Ado

Teorema de Levi. *Seja L uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então existe um complemento para o seu radical,*

$$L = \operatorname{Rad} L \oplus M,$$

chamada uma álgebra de Levi*. Todas as álgebras que satisfazem esta condição são conjugadas.*

Teorema de Ado. *Toda a álgebra de Lie de dimensão finita admite uma representação fiel de dimensão finita.*

Álgebras de Lie e Grupos de Lie

Definição e exemplos

Definição *Um conjunto G com uma operação diz-se um* grupo de Lie *se $(G, .)$ for um grupo e uma variedade C^∞, em que as operações*

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (g,h) & \mapsto & g.h \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{array}$$

sejam C^∞.

♣ **Exemplos**. Seja $J_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$. Os seguintes conjuntos são grupos de Lie.

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) = \{X \in M(n, \mathbb{C}) : \det X = 1\},$$

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C}) = \{X \in M(n, \mathbb{C}) : X^t J_{2n} X = J_{2n}\},$$

$$\mathrm{SO}(n, \mathbb{C}) = \{X \in M(n, \mathbb{C}) : X^t I_n X = I_n,\ \det X = 1\}.$$

Em qualquer dos casos, *os grupos são variedades definidas por equações*.

O espaço tangente

Dizemos que $f : G \to G'$, entre dois grupos de Lie, é um *homomorfismo de grupos de Lie* se for um homomorfismo de grupos suave.

Como $f(e) = (e')$, temos que $Df : TG_e \to TG'_{e'}$.

Ora, para variedades definidas por equações do tipo $\phi(x) = c$, o espaço tangente na identidade é definido por $D\phi_e(X) = 0$, se esta derivada for sobrejectiva.
Assim, *as álgebras clássicas aparecem como os espaços tangentes a estes grupos de Lie*, pois, para uma matriz K fixa,

$$D(\det)_{I_n}(X) = \mathrm{tr}(X),$$

$$D(ZKZ)_{I_n}(X) = KX + XK.$$

Se, na definição das álgebras $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$ escolhemos outras matrizes simétricas, que não a identidade, foi para termos matrizes diagonais — que vêm a formar a subálgebra de Cartan.

Diferenciando morfismos

Vamos agora à procura da estrutura dos espaços tangentes na identidade preservada pela derivada de qualquer homomorfismo de grupos de Lie.

Notamos por c_g a conjugação por um elemento $g \in G$, $c_g(h) = ghg^{-1}$.

Vamos notar $\mathrm{Ad}_g := D(c_g)_e$. Temos $\mathrm{Ad}_g : T_eG \to T_eG$.

Tomamos agora a derivada de $g \to \mathrm{Ad}_g$, na identidade, chamamos-lhe ad. Temos que, para $X, Y \in T_eG$,

$$\mathrm{ad}(X) \in T_I(\mathrm{Aut}(T_eG)) = \mathrm{End}(T_eG),$$

portanto $\mathrm{ad}(X)(Y) \in T_eG$. Podemos então encarar ad como uma aplicação bilinear anti-simétrica, que vem a satisfazer a igualdade de Jacobi.

A estrutura de álgebra de Lie

- $\mathrm{Ad}_g := D(c_g)_e$.
- ad é a derivada de $g \to \mathrm{Ad}_g$, na identidade.
- Para $X, Y \in T_eG$, $\mathrm{ad}(X)(Y)$ é bilinear, anti-simétrica e satisfaz a igualdade de Jacobi.

Assim, pondo

$$[X,Y] := \mathrm{ad}(X)(Y),$$

obtemos uma operação que se prova ser invariante pelas derivadas de morfismos de grupos de Lie, e que confere a T_eG uma estrutura de álgebra de Lie.

78 / 79

Representações de grupos de Lie

A relação entre representações de álgebras de Lie semisimples e grupos de Lie é a seguinte.

Teorema. *Há uma correspondência bijectiva entre os grupos de Lie G que têm uma certa álgebra de Lie semi-simples L e os reticulados Λ com*

$$\Lambda_R \subseteq \Lambda \subseteq \Lambda_W.$$

O grupo correspondente a Λ_W é o único que é simplesmente conexo.

Mais, uma representação irredutível de L, de peso mais alto λ, dá origem a uma representação irredutível de G se e só se $\lambda \in \Lambda$. Em particular, se G é simplesmente conexo, todas as representações de L dão origem a representações de G.

79 / 79