

A Demonstração Matemática no Ensino Básico e Secundário

Pedro J. Freitas

Departamento de Matemática e Centro de Estruturas Lineares e Combinatórias
da Universidade de Lisboa

pjfreitas@fc.ul.pt

Encontro ProfMat 2011

1. Introdução

A demonstração matemática continua sendo — mesmo com todo o poder computacional de hoje, e a internet — um meio claro, acessível e disponível a todos de convencer alguém da veracidade de um resultado. Na verdade, permanece como o único meio de estabelecer a veracidade matemática de uma afirmação. Veja-se a este respeito todo um capítulo do livro “Letters to a Young Mathematician”, de Ian Stewart [St] (o capítulo chama-se, curiosamente, “fear of proofs”), em que se apresentam razões para a necessidade de demonstração, mesmo para profissionais que não são matemáticos.

Mesmo nos níveis elementar e médio é proveitoso desenvolver nos alunos o gosto pela argumentação em geral e pela demonstração como elemento central da própria matemática, como aliás vem referido de forma muito clara nos programas. Sem deduções, a matemática pode tornar-se uma simples colecção de resultados interessantes e úteis, mas desconexos, sem uma visão clara de quais são os pontos de partida e quais as conclusões que deles se podem tirar. Por exemplo, ao falar dos critérios de paralelismo de rectas e planos, seria importante frisar que estes não são definições, mas que são condições que garantem paralelismo, uma vez que este esteja bem definido, não sendo descabido nalguns casos apresentar demonstrações. Em breve apresentaremos alguns exemplos.

Esta actividade dedutiva pode aplicar-se na explanação dos resultados matemáticos centrais, como acabámos de referir, mas também à resolução de problemas, que é uma actividade igualmente bastante citada nos programas. Estes problemas exercem a mesma atracção que um puzzle, ou um jogo, em que há regras determinadas e um resultado a atingir, e este elemento de fascínio e desafio pode ser usado para despertar o interesse dos alunos.

Antes de continuar, gostaríamos de esclarecer o que entendemos aqui por “resolução de problemas”, que é uma expressão que pode ter significados distintos em contextos distintos. Aqui, o significado que damos à palavra “problema” é o de uma pergunta feita num enquadramento matemático com uma resposta concreta e que se resolve usando apenas conhecimentos matemáticos necessitando de alguma criatividade na aplicação desses conhecimentos.

Este significado, que aliás vem bem discriminado, por exemplo, no novo programa do ensino básico, é distinto daquele que se refere a questões de

modelação do mundo real, por exemplo. Mais uma vez, em breve serão apresentados alguns exemplos.

2. Tópicos dos programas. Como referimos, os programas do ensino básico e secundário já prevêem a apresentação de demonstrações de alguns resultados. Nesta secção vamos apresentar, a título de exemplo, uma situação de resolução de problemas e duas sugestões de demonstrações que se poderiam fazer, sem grande custo em termos de gasto de tempo, nem de dificuldade exagerada, e que a nosso ver contribuiriam para um melhor entendimento global das matérias.

Exemplo 2.1. Esta actividade é pensada para alunos do primeiro ciclo, e consiste num truque de magia. Pede-se ao aluno que coloque dois dados um em cima do outro e anuncia-se que, olhando apenas de relance para os dados, somos capazes de adivinhar a soma das faces escondidas.

O truque baseia-se numa propriedade simples dos dados: a soma das pintas de faces opostas é sempre sete. Assim, para este truque, basta fazer a diferença entre 14 e a face superior para obter a soma das faces escondidas.

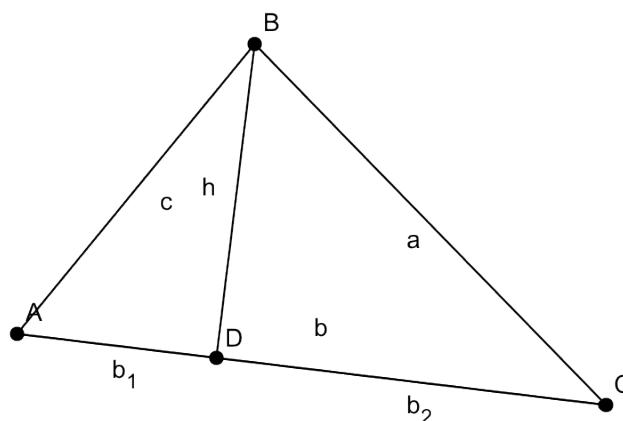
Depois de ter apresentado o truque algumas vezes, pode pedir-se aos alunos que façam conjecturas sobre como o truque é feito, examinando os dados acabando por explicar o funcionamento do truque. Neste caso a demonstração consiste simplesmente em fazer as três somas de faces opostas, $1+6=2+5=3+4=7$, e concluir que a soma das faces horizontais, uma vez empilhados os dados, é 14.

Para além de dar aos alunos uma forma de praticar os conceitos de soma e diferença, este problema apresenta uma situação em que se pode, ao nível mais básico, apresentar já uma demonstração. Além disso, o truque pode levar a outras perguntas, como “Seria possível adivinhar as pintas de cada face escondida, e não só a soma?”, “Seria possível fazer o truque com três dados?”

O uso de truques de magia como problemas é particularmente frutífero, uma vez que depois do truque apresentado, a motivação para resolver o problema (que é descobrir como se faz o truque) é imediata.

Exemplo 2.2. Quando se fala do Teorema de Pitágoras, em geral não se chega a falar da sua versão “pobre”, para triângulos não rectângulos. Esse resultado é a lei dos co-senos, que afirma que, num triângulo ABC com lados de medidas a, b, c temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\angle BAC)$$



A demonstração é muito simples, a partir do teorema de Pitágoras. Suponhamos que o ângulo $\angle BAC$ é agudo, para começar. Baixamos a altura a partir do ponto B e aplicamos o teorema de Pitágoras aos triângulos ABD e BCD:

$$h^2 = c^2 - b_1^2$$

$$h^2 = a^2 - b_2^2 = a^2 - (b - b_1)^2 = a^2 - b^2 + 2bb_1 - b_1^2$$

Igualando os dois membros do lado direito, reorganizando e simplificando, obtemos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bb_1.$$

Como $b_1 = c \cos(\angle BAC)$, temos o resultado.

Naturalmente, se o ângulo $\angle BAC$ for obtuso, o ponto D cairá fora do lado do triângulo, mas a demonstração pode ajustar-se sem grande problema.

Este resultado, além de ser importante por si mesmo, tem uma demonstração que promove a manipulação simultânea de propriedades algébricas e geométricas. Além disso, serve também para resolver problemas de distâncias locais inacessíveis (mencionados no programa) e tem uma notável utilização posterior: serve para justificar as duas fórmulas do produto interno. Se u e v forem vectores com coordenadas (u_1, u_2) e (v_1, v_2) num referencial ortogonal e monométrico, sabemos que

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(u \wedge v) = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Uma maneira simples de estabelecer esta igualdade é usar a lei dos co-senos.

Começamos por observar que num referencial ortogonal e monométrico, se um vector w tiver componentes (w_1, w_2) , então $\|w\|^2 = w_1^2 + w_2^2$.

Assim, recuperando a figura anterior, vamos pôr $u = \overrightarrow{AC}$, $v = \overrightarrow{AB}$ e calcular $\overrightarrow{BC}^2 = \|u - v\|^2$ de dois modos diferentes. Primeiro, usamos a lei dos co-senos:

$$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{ABAC} \cos(u \wedge v).$$

A seguir, como $u - v$ tem coordenadas $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$,

$$\|u - v\|^2 = (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u_1v_1 + u_2v_2).$$

Comparando as duas fórmulas, chegamos à conclusão que

$$\|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(u \wedge v) = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Estas duas demonstrações foram aqui incluídas apenas a título de exemplo, pois este trabalho não pretende apresentar uma lista exaustiva de resultados. A intenção deste exemplo é mostrar o tipo de demonstração de que se fala neste trabalho e de que maneira se entende a ligação aos programas do ensino básico e secundário.

Além da geometria, há outros tópicos destes programas que poderiam igualmente incluir alguns desenvolvimentos dedutivos.

A teoria da factorização dos números naturais, dada no ensino básico, pode prestar-se a demonstrações gerais simples, precedidas de exemplos numéricos motivadores, embora nos pareça que estas são demasiado abstractas para o 2º ciclo. É este o caso das propriedades relativas ao máximo divisor comum e ao mínimo múltiplo comum, ou os critérios de divisibilidade (que fazem aliás apelo ao sistema de numeração de base dez).

Já no ensino secundário, a apresentação da fórmula resolvente do 2º grau pode ser precedida de exercícios de completção de quadrados em contexto numérico, preparando a generalização para o caso literal, que leva rapidamente à demonstração da fórmula.

Também na teoria de continuidade e diferenciabilidade de funções também há lugar para algumas demonstrações — embora nos pareça que a sequência da apresentação do conceito de limite (primeiro informalmente para funções e depois formalmente para sucessões) torna isto um pouco mais difícil. Em tópicos mais avançados deste tema, um bom conjunto de afirmações estabelecidas inicialmente sem demonstração pode abrir caminho a algumas demonstrações, como aliás é mencionado no programa. Para mais sobre este assunto consultem-se por exemplo os materiais de apoio do projecto REANIMAT [Re].

Notamos, finalmente, que é no tópico de probabilidades, do programa do 12º ano, que se insiste mais claramente na apresentação e formalização de demonstrações, embora nos pareça que é um momento um pouco tardio para insistir numa formalização mais rigorosa, havendo temas anteriores onde esta abordagem podia ser mais explorada (como acabámos de referir).

No que diz respeito à resolução de problemas (apresentaremos alguns exemplos a seguir), todos os sites relacionados com olimpíadas da matemática (nacionais e internacionais) têm arquivos estupendos de problemas com soluções — vejam-se por exemplo os sites [OPM] e [OIM]. Há igualmente colecções de livros (em português há por exemplo os de José Paulo Viana, [Vi]), que reúnem problemas muito interessantes, de vários níveis de dificuldade.

3. Conjecturar e demonstrar

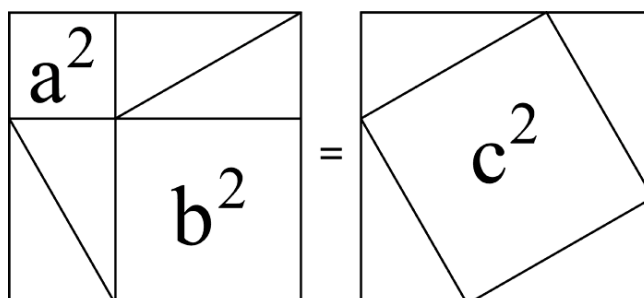
No nosso entender, a apresentação de demonstrações gerais de resultados não invalida nem menospreza a actividade de descoberta, baseada em casos particulares, de regularidades que se vêm a revelar como sendo resultados gerais. Mesmo na investigação matemática este tipo de aproximação é muito frequentemente usado, como tentativa de descobrir o resultado que se procura. No entanto, ninguém deve ficar convencido da veracidade de uma afirmação matemática geral a partir do exame de casos particulares, por muito numerosos que eles sejam, pois essa análise nunca é equivalente a uma demonstração. A este respeito, gostaria de mostrar dois exemplos: o de um caso de uma proposta falhada de descoberta do teorema de Pitágoras e um exemplo de um problema que conjuga os dois métodos.

Exemplo 3.1. Para levar os alunos a descobrir a fórmula do teorema de Pitágoras, uma professora apresentou-lhes triângulos em que os lados tinham comprimentos inteiros, pedindo-lhes para encontrarem uma fórmula que relacionasse esses comprimentos. O problema é que os triângulos que lhes apresentou tinham todos lados com comprimentos múltiplos de (3,4,5) e (5,12,13), o que, naturalmente, deixa de fora casos significativos. É que, para os triplos mencionados, é possível encontrar números (a,b,c) tais que

$$a \times 3 + b \times 4 + c \times 5 = a \times 5 + b \times 12 + c \times 13 = 0,$$

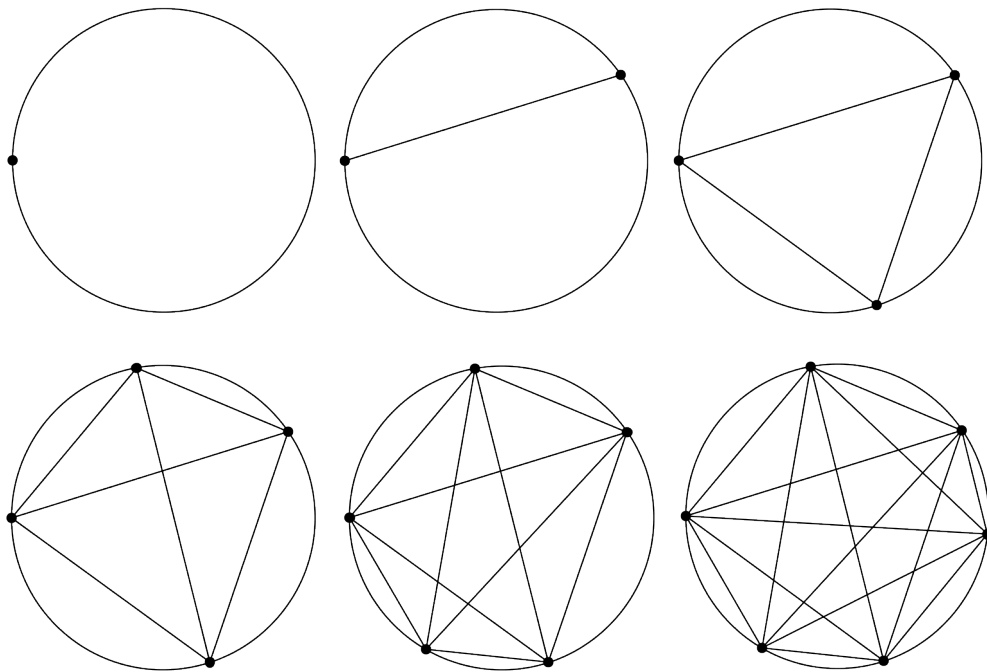
por outras palavras, é possível encontrar uma relação linear satisfeita por ambos os triplos. Sendo esta relação linear, ela é também satisfeita por todos os múltiplos destes triplos, e portanto a relação é verdadeira para todos os triângulos que a professora tinha apresentado. Para encontrar os números em questão, basta resolver o sistema. Uma solução é $a = 4$, $b = 7$ e $c = -8$, o que dá a relação linear $4x + 7y = 8z$, satisfeita por todos os triângulos apresentados, mas, evidentemente, não por todos os triângulos rectângulos — aliás, nem precisamos de sair dos inteiros para encontrar um contra-exemplo, (8,15,17). E o que é notável é que alguns alunos descobriram de facto uma relação linear (com estes coeficientes ou outros múltiplos deles).

Noto que esta escolha limitada de exemplos não invalida que se possa levar os alunos a descobrir a relação certa, mas, insistimos, isto não substitui uma demonstração — demais a mais, havendo tantas por donde escolher, e fazendo esta demonstração parte do programa. A que me foi apresentada quando era aluno foi aquela que envolve o estudo de triângulos semelhantes, que surgem ao traçar uma altura de um triângulo rectângulo. Outra que me é cara é a seguinte, que envolve apenas decomposições de um quadrado.



Para a tornar completamente rigorosa, dentro do esquema habitual de fundamentação, julgo que é apenas necessário fazer os seguintes argumentos. No primeiro caso, depois de decompor o quadrado em dois quadrados e dois retângulos, e os retângulos em triângulos, é preciso justificar que os quatro triângulos obtidos são retângulos e congruentes; no segundo caso, é preciso justificar que os quatro triângulos desenhados são congruentes entre si e congruentes com os da primeira figura (uma aplicação simples do caso LAL) e que a figura obtida ao centro, depois de desenhar os triângulos, é um quadrado (o que se consegue analisando os ângulos dos triângulos).

Exemplo 3.2. Este problema pode encontrar-se em [En, p. 209, ex 31]. Começamos por colocar pontos numa circunferência de modo que não haja intersecção de quaisquer três cordas dirigidas por esses pontos. O problema é simplesmente contar o número de regiões obtidas. Podemos naturalmente começar por experimentar os casos $n=2, 3, 4$ e 5 pontos, obtendo os seguintes resultados: $n=1, 1$ região; $n=2, 2$ regiões; $n=3, 4$ regiões; $n=4, 8$ regiões; $n=5, 16$ regiões.



Porém, para $n=6$, o resultado obtido é 31, em vez de 32 e para $n=7$ o resultado seria 57. Assim, a fórmula que nos parecia certa para esta sucessão, 2^{n-1} , afinal está errada.

Curiosamente, para encontrar a resposta certa, o que é necessário é responder a uma pergunta mais geral, usando o mesmo tipo de estratégia — testar casos, que sugerem uma fórmula, e depois demonstrar essa fórmula. A pergunta a fazer, antes desta, é então: se tivermos c cordas numa circunferência, intersectando-se em p pontos interiores à circunferência, sem intersecções múltiplas, quantas regiões obtemos? Depois de testar alguns casos, chegamos à fórmula $c+p+1$, que se pode demonstrar por indução no número de cordas. É simples de ver que a fórmula é válida se tivermos só uma corda. Suponhamos então que é válida para um certo número c de cordas, com p pontos de intersecção. Ao adicionarmos

mais uma corda, se houver mais p' pontos de intersecção internos, estes determinam $p'+1$ segmentos na corda e cada um destes divide uma região em duas. Assim, o novo número de regiões é

$$(c + p + 1) + (p' + 1) = (c + 1) + (p + p') + 1,$$

que é a soma do número de cordas e pontos internos mais uma unidade, mantendo-se assim a fórmula.

Aplicando ao nosso caso concreto, se tivermos n pontos, e traçarmos todas as cordas determinadas por estes, obtemos $\binom{n}{2}$ cordas (uma por cada par de pontos), com $\binom{n}{4}$ pontos de intersecção (um por cada 4 pontos sobre a circunferência) se $n \geq 4$. Assim, a fórmula que queremos é

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{4} + 1,$$

convencionando que $\binom{n}{k} = 0$ se $n < k$. O resultado é bem diferente de 2^{n-1} , apesar de terem valores coincidentes para $n < 6$.

A este respeito, gostaria de contar um episódio pessoal. Num exame de matemática discreta que eu estava a vigiar, um aluno chamou-me e disse que não sabia como começar a resolver um exercício, que pedia para provar que qualquer quadrado perfeito tinha resto 0 ou 1 na divisão por 3. Eu sugeri-lhe que experimentasse alguns casos e descobrisse a partir daí o que fazer. Ele seguiu o conselho, descobriu um padrão, mas não a demonstrou. Depois de terem saído as notas, ele veio pedir para ver o exame e espantou-se por não ter a cotação toda nessa pergunta. Eu expliquei-lhe que apesar de ele ter verificado que o resultado era verdade para os números de 1 a 10, isso não chegava, era preciso uma demonstração geral. Ele então respondeu-me: “Portanto, era preciso uma espécie de prova dos nove, para confirmar de novo que isto é verdade”.

Este aluno não era portanto capaz de distinguir, depois do seu ensino básico, secundário e de um ano de universidade, a diferença entre uma “certeza” obtida com observação de casos e uma demonstração.

Acerca deste problema, devo referir que os programas do ensino básico e secundário põem em relevo, de forma clara, esta diferença entre uma conjectura e uma afirmação demonstrada. Também a este propósito, citamos também o artigo *The role of open-ended problems in mathematics education*, de Hung-Hsi Wu [Wu]:

[H]aving been encouraged to do experimentation in mathematics, the students must also be told about its limitations: discovery by experiment must not be treated as an end in itself, but rather as a first step towards a complete understanding of a given situation within a broad mathematical framework. One can hardly over-emphasize this point to a beginner.

4. Critérios de escolha

Uma questão importante quando se ensina matemática é exactamente “o que demonstrar”. Ao longo do tempo, esta pergunta teve respostas diversas. Nos tempos em que estava em voga a matemática moderna (“new math” nos Estados Unidos), procurava-se sempre explicar tudo nos quadros mais gerais possível, para depois particularizar. Isto levou algumas situações, a nosso ver, de um nível de abstracção e fundamentação exagerados. A título de exemplos, mencionamos alguns casos: a fluência nas operações elementares em bases diferentes da base dez, no ensino básico, ou o estudo de estruturas algébricas abstractas como corpos ou espaços vectoriais no secundário. Há uma boa análise da evolução das várias correntes do ensino da matemática numa entrevista dada por Elon Lages Lima, que se encontra em [El].

Em todo o caso, a necessidade de bem fundamentar os resultados matemáticos não deixa de ser um assunto particularmente importante, para o qual não há respostas demasiado simples ou rápidas. Para a geometria, por exemplo, sabemos que a axiomática de Euclides é insuficiente e pouco rigorosa, segundo os padrões actuais. Por outro lado, a axiomática de Hilbert exige a demonstração de resultados demasiado técnicos que, para alunos do ensino básico e secundário, parecem ser óbvios. Assim, se por um lado não se pode abandonar uma fundamentação rigorosa, por outro há que adoptar fundamentações que não exijam resultados intermédios demasiado fastidiosos, e que permitam chegar a resultados verdadeiramente interessantes — o livro [Ar] é, a nosso ver, uma apresentação equilibrada. No que diz respeito à aritmética, aconselhamos a leitura de [Ah] e [SFN] (este contendo também algumas actividades lúdicas). Finalmente, podem encontrar-se em [Wu] algumas propostas interessantes de fundamentação de vários tópicos do ensino básico e secundário.

Julgamos então que uma resposta possível à pergunta que fizemos no início da secção passa por dois pontos importantes: a *honestidade científica* e a *honestidade pedagógica*. A primeira poderá aferir a correcção ou a incorrecção de um argumento, a segunda, a adequação desse argumento aos alunos a quem este é proposto. Mais uma vez, vamos ilustrar esta nossa afirmação com alguns exemplos.

Exemplo 4.1. Este exemplo é tirado do artigo já citado *The role of open-ended problems in mathematics education*, que se pode encontrar em [Wu]. Um professor propôs aos seus alunos de ensino básico (3º ciclo) o seguinte problema: uma menina tem um porquinho e quer construir um cercado para o guardar, tendo para isso um rolo de arame com 30 metros. Qual a forma que este deve ter este cercado para que a área seja a maior possível? Em termos abstractos, a pergunta é: qual a forma geométrica que tem maior área, dentre todas as que têm o mesmo perímetro?

O professor desejava apenas, com este exercício, que os seus alunos experimentassem várias formas conhecidas (círculo, quadrado, rectângulos ou triângulos, por exemplo) e que constatassem que a maior era obtida com o círculo. No entanto, esta não era a pergunta, a pergunta pedia de facto a figura com a maior área, entre todas as figuras possíveis. A usar este método, a pergunta exigia efectivamente que se experimentassem infinitas figuras

(imagine-se um aluno mais escrupuloso que quisesse experimentar, por exemplo, todos os triângulos, ou todas as combinações de partes de círculo e rectângulos).

De facto, apenas com a matéria que é dada no programa, é impossível responder adequadamente a esta pergunta. Tal como estava formulada, a pergunta era cientificamente desonesta, pois os alunos não tinham conhecimentos suficientes para responder. No entanto, seria simples corrigir esta situação: bastaria ensinar-lhes, sem demonstração, a desigualdade isoperimétrica, que afirma que se uma figura plana tem área A e perímetro P , então

$$4\pi A \leq P^2,$$

donde se conclui sem grande esforço que a área tem de ser menor ou igual à do círculo: como $A \leq P^2/4\pi$, se a figura for uma circunferência, temos

$$P^2 / 4\pi = 4(\pi r)^2 / 4\pi = \pi r^2,$$

que é a área do círculo. Assim, qualquer outra figura tem área menor ou igual à área do círculo (e o resultado afirma igualmente que este máximo é atingido apenas quando a curva é uma circunferência).

Note-se que a demonstração desta desigualdade não é de modo nenhum adequada a um aluno do 3º ciclo (pode envolver integração, por exemplo), mas não há nenhum mal em apresentar este resultado como verdadeiro, esclarecendo que a demonstração existe, mas que é demasiado difícil para o nível dos alunos. O que nos parece prejudicial é não apresentar um argumento geral quando este existe e os alunos o podem entender.

Outra maneira de tornar esta pergunta acessível aos alunos seria reduzir as formas possíveis do cercado — por exemplo, considerar apenas rectângulos. Nesse caso, poderia propor-se primeiro aos alunos que verificassem que

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

o que se prova ser equivalente a $(a-b)^2 \geq 0$. A partir daqui consegue-se deduzir que o máximo é atingido quando a figura é um quadrado, com um método semelhante ao anterior.

Exemplo 4.2. Uma professora propôs aos alunos a seguinte pergunta: qual é a torre mais inclinada, a torre de Pisa ou a torre Eiffel? A resposta unânime, naturalmente, foi que era a torre de Pisa. A professora então disse que nessa aula se aprenderia a noção de inclinação de uma recta (definida como o ângulo que faz com o semi-eixo positivo dos xx), e que segundo essa definição, se concluíra que a torre de Pisa tinha menor inclinação que a torre Eiffel. Aproveitou para comentar que a matemática por vezes tinha conclusões que iam contra o senso comum.

Este parece-me ter sido um caso de desonestidade pedagógica, uma vez que a inclinação, segundo a definição, depende do posicionamento do semi-eixo

positivo dos xx , que deve marcar a posição de inclinação zero — aliás, a considerar um ponto de referência horizontal, o conceito mais adequado seria o de ângulo de uma recta com um plano. No caso de uma torre ou de uma coluna, faz todo o sentido colocar esse eixo na vertical, obtendo-se assim a resposta habitual, que foi a que os alunos deram. Pondo o eixo na horizontal, de facto chega-se a um resultado que vai contra o senso comum, mas de uma forma artificial e principalmente estéril: não leva a nada de novo, a não ser a que os alunos reforcem a sua opinião de que a matemática não tem muito a ver com o mundo real.

5. Método

Outra pergunta que se poderá fazer é “como demonstrar”. Sabemos que depois do movimento da matemática moderna, surgiram outros, como o construtivismo ou o ensino em contexto, que dão mais protagonismo ao papel e à pessoa do aluno e que, quando adoptados de um modo extremo, têm consequências tão adversas como a anterior abstracção exagerada. Mesmo um dos primeiros fundadores deste tipo de movimentos, John Dewey, acabou por afirmar que era preciso encontrar um equilíbrio razoável entre os dois tipos de aproximação.

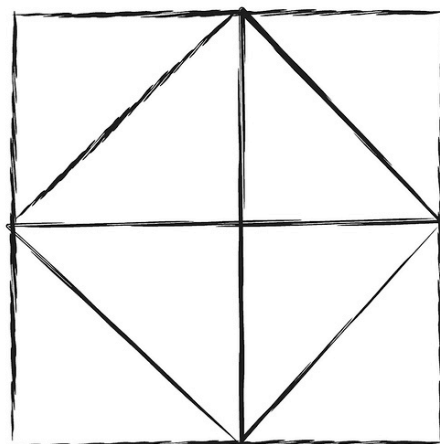
No sentido de ilustrar o que pode ser este equilíbrio, gostaria de lembrar um dos mais antigos e conhecidos exemplos de demonstração, o episódio do *Ménon*, de Platão, em que Sócrates leva um escravo a construir, a partir de um quadrado, outro quadrado com área dupla.

Sócrates começa por desenhar um quadrado com dois pés de lado, e, sem mais explicações, pergunta ao escravo como é que este faria para construir um quadrado com área dupla — isto é, com oito pés quadrados. O escravo começa por afirmar que se deve usar uma linha com quatro pés (o dobro do lado inicial), e construir o novo quadrado sobre essa linha. Sócrates faz a construção, decompondo a seguir o quadrado grande em quatro idênticos ao inicial, após o que argumenta com o escravo que a área é quatro vezes maior, afirmação com a qual o escravo concorda.

Sócrates insiste que o escravo apresente o lado do quadrado de área dupla, e o escravo propõe um lado que é vez e meia o lado inicial, isto é, três pés. Sócrates pede-lhe então que calcule a área, e o escravo responde rapidamente que são nove pés quadrados, e não oito, como era pedido.

Sócrates aqui suspende o diálogo com o escravo, para falar com Ménon sobre os desenvolvimentos até este ponto: o escravo já se deu conta que *não sabe* encontrar o lado do quadrado desejado, quando de início estava confiante que sabia. Esta consciência da ignorância, para Sócrates, é progresso, pois cria no escravo o desejo de saber como fazer a construção, que inicialmente achava que sabia fazer.

Sócrates então volta ao diálogo inicial. Desenha então quatro quadrados iguais ao primeiro, divide cada um ao meio por uma diagonal e começa a fazer perguntas ao escravo sobre as várias áreas.



O escravo, perante as perguntas de Sócrates, concorda que a área de cada quadrado pequeno é dividida ao meio, e que portanto o quadrado central tem como área metade da área do quadrado grande. Esta é de 16 pés quadrados e portanto o quadrado central tem de área oito pés quadrados, e é construído sobre a diagonal do quadrado inicial. O escravo termina por concordar que é sobre esta linha que é preciso construir o quadrado que resolve o problema.

Sócrates afirma, ao longo de todo o processo, que não ensina nada ao escravo (Platão queria reforçar assim o argumento filosófico que toda a pessoa humana já tinha conhecimento de toda a verdade, e que o ensino consistia em relembrá-la). No entanto, a verdade é que Sócrates faz toda a construção que leva à conclusão, e opta por apresentar os passos da demonstração como perguntas (às quais a resposta é “sim” ou “não”), sendo todos estes passos apresentados por ele. Assim, o método aqui apresentado não deixa de ser expositivo, requerendo embora a colaboração do escravo —é de notar que sempre que o escravo é deixado sozinho, as propostas que apresenta não chegam para resolver o problema.

Este parece-nos ser o método de demonstração chamado de *descoberta dirigida*, em que o professor vai apresentando o material necessário para chegar a uma conclusão, sem esperar que o aluno o descubra sozinho, mas esperando o assentimento e a colaboração do aluno a cada passo. Na nossa opinião, este é um método equilibrado e sensato de apresentação de demonstrações, respeitando tanto a importância dos resultados a obter como o papel do aluno na aprendizagem.

6. Conclusões

Terminamos enunciando algumas vantagens da apresentação de demonstrações e da resolução de problemas no desenvolvimento dos alunos e no ensino em geral.

Em primeiro lugar, a demonstração é um património central da matemática. Ela dá um nível de certeza e coerência aos resultados apresentados que não pode ser adquirido de nenhuma outra forma. Além disso, mostra mais claramente as relações entre os conceitos, desfazendo a ideia de que a matemática é apenas um

conjunto desconexo de fórmulas para resolver problemas. Aliás, mesmo nas fórmulas que têm uma aplicação mais próxima da realidade, as considerações estritamente teóricas têm um papel importante — por exemplo, quando se consideram dois modelos diferentes para um problema (como em estatística, por exemplo), há propriedades dos modelos que se podem desenvolver teoricamente e que podem explicar eventuais discrepâncias nos resultados obtidos.

Por outro lado, estes temas prestam-se particularmente a um dialogo entre professores do ensino básico e secundário e professores universitários. Os primeiros têm a experiência da vivência quotidiana com os alunos e conhecem as suas possibilidades e dificuldades, os segundos conhecem mais profundamente a matemática e poderão mais facilmente encontrar estratégias correctas para a apresentação de um certo assunto ou para a resolução de um certo problema.

Este dialogo felizmente já existe, quer informalmente, quer nas acções de formação ou na produção e certificação de manuais, que são lugares particularmente adequados para desenvolver estes diálogos. Além disso, noto que neste momento já existe oferta de várias acções de formação sobre questões de fundamentos, e uma estritamente dedicada à resolução de problemas, chamada “Treinador Olímpico”. Além disso há já duas escolas dedicadas à resolução de problemas, o Aleph, em Lisboa [Al] e o Delfos, em Coimbra [De].

Estes problemas e demonstrações podem, ao contrário do que habitualmente se pensa, dirigir-se a qualquer tipo de aluno. Como exemplo, basta olhar para os problemas de olimpíadas que vão desde os da primeira eliminatória até aos internacionais. A capacidade de compreender uma demonstração ou uma justificação teórica precisa de algum treino, é certo, mas é algo que se pode desenvolver se houver intenção de o fazer e clareza e sensatez nos objectivos a atingir.

Mesmo para os alunos menos interessados, a realização de pequenos problemas pode apresentar-se como jogo ou desafio, desde cedo, no sentido de se desenvolver esse gosto e educar o raciocínio. Por outro lado, para os alunos mais motivados, a resolução de problemas pode ser muito desafiante, ao contrário dos exercícios, que ao serem mais complexos correm o risco de se tornarem simplesmente mais morosos, sem levarem a novos tipos de raciocínio. Um exercício difícil nunca é o mesmo que um problema. A resolução de problemas pode impedir assim que os alunos motivados se desinteressem, tornando-se, efectivamente, excluídos.

Para além da dificuldade natural de pôr os alunos a pensar de uma forma mais abstracta, a rapidez da vida actual pode tornar-se um obstáculo adicional a este tipo de pensamento. Com o uso de computadores, e em particular da internet, as pessoas habituaram-se a ter o que desejam imediatamente à sua frente, e até uma espera de 30 segundos pode ser sentida como excessiva. No entanto, todos sabemos que a compreensão de uma demonstração ou a resolução de um problema são coisas que exigem algum tempo e alguma capacidade de atenção demorada. Ora, se por um lado o ritmo do mundo electrónico pode representar um obstáculo, por outro, o convite a raciocínios mais profundos pode ser um treino para os alunos conseguirem alargar a sua capacidade de atenção e a sua

tolerância à frustração, o que é uma aprendizagem muito importante, não só para a matemática mas para a sua formação como pessoas.

Finalmente, gostaríamos de salientar que este tipo de raciocínio promove a autonomia pessoal e o espírito crítico. Quando um aluno compreende uma demonstração, ou resolve um problema, não depende da confiança que tenha no professor para saber que o resultado é verdadeiro, mas compreende por si próprio porque é que é verdadeiro, o que desenvolve a sua autonomia. Quando um aluno entende que é preciso justificar uma afirmação, e examinar essa justificação, a confirmar se está certa, está a desenvolver o espírito crítico. Este tipo de atitude é crucial na formação de um cidadão, e será talvez um dos maiores contributos que a matemática poderá dar às pessoas, independentemente da profissão que venham a ter no futuro.

Assim, parece-nos que a capacidade de argumentação e raciocínio abstracto é uma das maiores riquezas que a matemática pode oferecer à formação dos alunos, como pessoas e como cidadãos, e que por isso deve merecer, apesar de todas as dificuldades que levanta, uma atenção especial.

Referências

- [Ah] Ron Aharoni, *Aritmética para Pais*, Edições Gradiva, 2008.
- [Al] Escola Aleph: <http://aleph.ptmat.fc.ul.pt/>
- [Ar] Paulo Ventura Araújo, *Curso de Geometria*, Edições Gradiva, 1998.
- [De] Projecto Delfos: <http://www.mat.uc.pt/~delfos/>
- [El] Elon Lages Lima, *Matemática e Ensino*, 1º vol. da colecção “Temas de Matemática” das Edições Gradiva/SPM, 2004.
- [En] Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998.
- [OIM] Olimpíadas Internacionais de Matemática:
<http://www.imo-official.org/>
- [OPM] Olimpíadas Portuguesas de Matemática,
<http://www.spm.pt/olimpiadas/>
- [Pl] Platão, *Ménon*, Edições Colibri, 1992.
- [Re] REANIMAT – Projecto Gulbenkian de Reanimação Científica, cujos documentos se podem encontrar em
<http://www.ptmat.fc.ul.pt/~armac/Reanimat/>
- [SFN] Luís Sequeira, Pedro J Freitas e Suzana Nápoles, *Números e Operações*, Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1º e 2º ciclos do Ensino Básico, DGIDC, 2009.
- [St] Ian Stewart, *Letters to a Young Mathematician*, Basic Books, 2006. Há tradução em português publicada pela Editora Gradiva.
- [Vi] José Paulo Viana, *Desafios*, vols. 1-10, Edições Afrontamento.
- [Wu] Hung-Hsi Wu, página pessoal: <http://math.berkeley.edu/~wu/>