Será possível ouvir a forma de um tambor?

Hugo Tavares
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

9 de maio de 2018

Será possível ouvir a forma de um tambor?

Conseguimos determinar a forma de um tambor através dos sons que este emite?

Ou, pelo contrário, será que há dois tambores diferentes que soam da mesma forma?

Será possível ouvir a forma de um tambor?

Conseguimos determinar a forma de um tambor através dos sons que este emite?

Ou, pelo contrário, será que há dois tambores diferentes que soam da mesma forma?

Mas antes de mais. . . o que significa "soar da mesma forma"?

Facto (a precisar daqui a pouco):
O som de um tambor fica caracterizado por um conjunto de frequências particulares de vibração.

Assim:

"Soar da mesma forma = Emitir as mesmas frequências de vibração"

Facto (a precisar daqui a pouco):
O som de um tambor fica caracterizado por um conjunto de frequências particulares de vibração.

Assim:

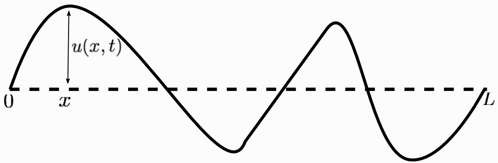
"Soar da mesma forma = Emitir as mesmas frequências de vibração"

Conhecidas as frequências de vibração, será que conseguimos determinar a forma do tambor?

Ou, pelo contrário, será que dois tambores diferentes podem ter as mesmas frequências de vibração?

Podemos ouvir ~~a forma~~ o tamanho de uma corda?

Equação das Ondas

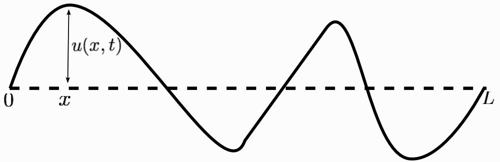


$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad x \in [0, L],\ t \geq 0$$

onde $c = \dfrac{T}{\rho}$ (T é a tensão da corda, e ρ a densidade de massa).

Podemos ouvir ~~a forma~~ o tamanho de uma corda?

Equação das Ondas



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad x \in [0,L],\ t \geq 0$$

onde $c = \dfrac{T}{\rho}$ (T é a tensão da corda, e ρ a densidade de massa).

A corda está fixa nos extremos:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad \forall t \geq 0$$

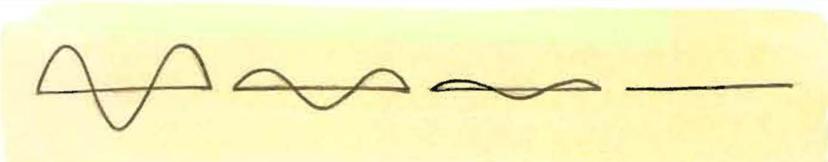
Conhecemos a posição e velocidade inicial:

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$$

Vamos começar por procurar soluções especiais do problema: soluções que mantenham a forma.

Soluções estacionárias:

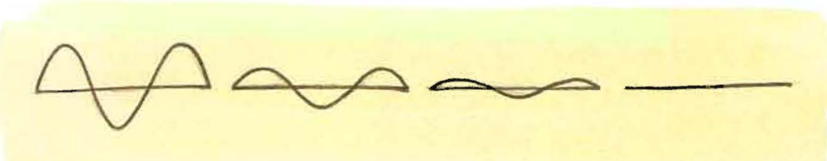
$$u(x,t) = f(x)g(t), \qquad x \in [0,L],\ t \geq 0$$



Vamos começar por procurar soluções especiais do problema: soluções que mantenham a forma.

Soluções estacionárias:

$$u(x,t) = f(x)g(t), \qquad x \in [0,L],\ t \geq 0$$



Como a corda está fixa nos extremos: $f(0) = f(L) = 0$.

Substituindo

$$u(x,t) = f(x)g(t) \quad \text{na equação das ondas} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),$$

vem:

$$f(x)g''(t) = c^2 f''(x)g(t)$$

Então:

$$\frac{g''(t)}{c^2 g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)}$$

Substituindo

$$u(x,t) = f(x)g(t) \ \text{ na equação das ondas } \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),$$

vem:

$$f(x)g''(t) = c^2 f''(x)g(t)$$

Então:

$$\frac{g''(t)}{c^2 g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} \ = \text{constante}$$

Substituindo

$$u(x,t) = f(x)g(t) \ \text{ na equação das ondas } \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),$$

vem:

$$f(x)g''(t) = c^2 f''(x)g(t)$$

Então:

$$\frac{g''(t)}{c^2 g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} \ = \text{constante}(= -\lambda)$$

Substituindo

$$u(x,t) = f(x)g(t) \ \text{ na equação das ondas } \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),$$

vem:

$$f(x)g''(t) = c^2 f''(x)g(t)$$

Então:

$$\frac{g''(t)}{c^2 g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} \ = \text{constante}(= -\lambda)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(x) = -\lambda f(x), \\ g''(t) = -\lambda c^2 g(t). \end{cases}$$

Demos origem a dois problemas:

$$\boxed{\begin{array}{l} \begin{cases} f''(x) + \lambda f(x) = 0 \quad x \in [0, L] \\ f(0) = f(L) = 0. \end{cases} \\ \text{e} \\ g''(t) + \lambda c^2 g(t) = 0, \quad t \geq 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{cases} f''(x) + \lambda f(x) = 0 & x \in [0, L] \\ f(0) = f(L) = 0. \end{cases}}$$

Mostra-se que $\lambda > 0$ e que a solução geral da primeira equação é:

$$f(x) = A \sin(\sqrt{\lambda} x) + B \cos(\sqrt{\lambda} x),$$

para certos $A, B \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} f''(x) + \lambda f(x) = 0 \quad x \in [0, L] \\ f(0) = f(L) = 0. \end{cases}$$

Mostra-se que $\lambda > 0$ e que a solução geral da primeira equação é:

$$f(x) = A \sin(\sqrt{\lambda} x) + B \cos(\sqrt{\lambda} x),$$

para certos $A, B \in \mathbb{R}$.

Por outro lado,

$$f(0) = B = 0; \quad f(L) = A \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0$$

$$\boxed{\begin{cases} f''(x) + \lambda f(x) = 0 \quad x \in [0, L] \\ f(0) = f(L) = 0. \end{cases}}$$

Mostra-se que $\lambda > 0$ e que a solução geral da primeira equação é:

$$f(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x),$$

para certos $A, B \in \mathbb{R}$.

Por outro lado,

$$f(0) = B = 0; \quad f(L) = A\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

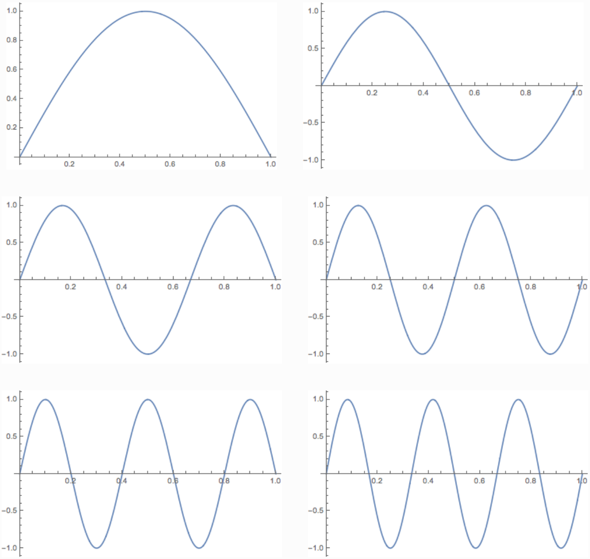
Então

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \qquad \text{para certo } n \in \mathbb{N}$$

Portanto encontrámos as soluções:

$$\boxed{f(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}x), \qquad \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad A \in \mathbb{R}}$$

$$f(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}x), \qquad \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad A \in \mathbb{R}$$



Quanto à segunda equação

$$\boxed{g''(t) + \lambda c^2 g(t) = 0, \quad t \geq 0}$$

temos

$$g(t) = a \sin(\sqrt{\lambda} ct) + b \cos(\sqrt{\lambda} ct).$$

Conclusão: $u(x,t) = f(x)g(t)$ conduz a

$$u(x,t) = \sin(\sqrt{\lambda}x)(C\sin(\sqrt{\lambda}ct) + D\cos(\sqrt{\lambda}ct)), \quad C, D \in \mathbb{R}$$

que tem *frequência de vibração* $(1/P)$

$$\frac{\sqrt{\lambda}c}{2\pi} = \frac{nc}{2L}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos uma solução:

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(C_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + D_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right).$$

Prova-se que a solução geral da equação das ondas é da forma

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x,t)$$

Conclusão: as frequências emitidas por uma corda formam uma sucessão $(\lambda_n)_n = \left(\frac{nc}{2L}\right)_n$:

$$\frac{c}{2L}, \frac{2c}{2L}, \frac{3c}{2L}, \ldots, \frac{nc}{2L}, \ldots$$

Conclusão: as frequências emitidas por uma corda formam uma sucessão $(\lambda_n)_n = \left(\frac{nc}{2L}\right)_n$:

$$\frac{c}{2L}, \frac{2c}{2L}, \frac{3c}{2L}, \ldots, \frac{nc}{2L}, \ldots$$

Questão: Será que podemos ouvir o tamanho de uma corda?
Ou seja: Será que, dada uma corda (c fixo), o conhecimento de todas as suas frequências determina o seu comprimento?

Conclusão: as frequências emitidas por uma corda formam uma sucessão $(\lambda_n)_n = \left(\frac{nc}{2L}\right)_n$:

$$\frac{c}{2L}, \frac{2c}{2L}, \frac{3c}{2L}, \ldots, \frac{nc}{2L}, \ldots$$

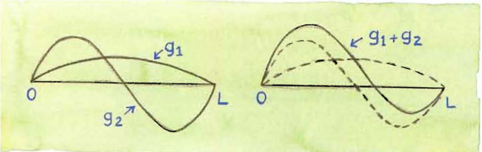
Questão: Será que podemos ouvir o tamanho de uma corda?
Ou seja: Será que, dada uma corda (c fixo), o conhecimento de todas as suas frequências determina o seu comprimento?

Resposta: Sim. Duas cordas com comprimentos diferentes emitem frequências diferentes.

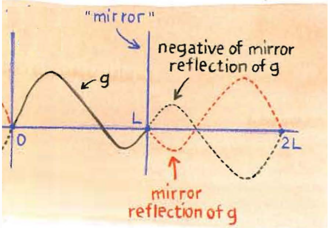
Propriedades importantes acerca de soluções estacionárias.

$$\begin{cases} f''(x) + \lambda f(x) = 0 & x \in [0, L] \\ f(0) = f(L) = 0. \end{cases}$$

- **Linearidade**: Uma combinação linear de soluções ainda é uma solução



- **Princípio de reflexão**: Posso prolongá-las de forma ímpar ao intervalo $[0, 2L]$ de forma regular.



Podemos ouvir a forma de um tambor?

Equação das Ondas num domínio plano: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$u(x,y,t) -$ deslocamento vertical do ponto (x,y) no instante t

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,t) = c^2 \Delta u(x,y,t), \qquad (x,y) \in \Omega,\ t > 0$$

Tambor fixo no bordo:

$$u(x,y,t) = 0, \qquad \forall (x,y) \in \partial\Omega, t > 0.$$

Posição e Velocidade Inicial:

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \psi(x,y), \qquad \forall (x,y) \in \Omega.$$

Como determinar as frequências emitidas por um tambor Ω?

Separação de variáveis:

$$u(x, y, t) = f(x, y)g(t)$$

Tambor fixo no bordo:

$$f(x, y) = 0 \text{ para } (x, y) \in \partial\Omega.$$

Substituindo por outro lado a forma na equação, obtemos

$$f(x, y)g''(t) = c^2 g(t)\Delta f(x, y)$$

e portanto existe $\lambda > 0$ tal que

$$\frac{g''(t)}{c^2 g(t)} = \frac{\Delta f(x, y)}{f(x, y)} = -\lambda,$$

Como determinar as frequências emitidas por um tambor Ω?

Separação de variáveis:

$$u(x, y, t) = f(x, y)g(t)$$

Tambor fixo no bordo:

$$f(x, y) = 0 \text{ para } (x, y) \in \partial\Omega.$$

Substituindo por outro lado a forma na equação, obtemos

$$f(x, y)g''(t) = c^2 g(t)\Delta f(x, y)$$

e portanto existe $\lambda > 0$ tal que

$$\frac{g''(t)}{c^2 g(t)} = \frac{\Delta f(x, y)}{f(x, y)} = -\lambda,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\Delta f(x, y) = \lambda f(x, y), \\ g''(t) = -\lambda c^2 g(t). \end{cases}$$

Somos conduzidos à resolução de dois problemas distintos:

1. O problema

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta f(x,y) = \lambda f(x,y) & (x,y) \in \Omega \\ f(x,y) = 0 & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}}$$

determina os valores de λ admissíveis (vamos chamá-los de **valores próprios**).

2. Estes determinam as frequências emitidas pelo tambor, já que a solução do segundo problema

$$\boxed{g''(t) + \lambda c^2 g(t) = 0, \quad t \geq 0}$$

é

$$g(t) = a\cos(\sqrt{\lambda}ct) + b\sin(\sqrt{\lambda}ct)$$

Frequências:

$$\frac{\sqrt{\lambda}c}{2\pi}.$$

Teorema

O problema

$$-\Delta f = \lambda f \text{ em } \Omega; \qquad f|_{\partial\Omega} = 0$$

admite solução não nula para uma sucessão de valores

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

Estes valores designam-se por valores próprios de $-\Delta$ em Ω (com condições de fronteira de Dirichlet).

Recordemos que os valores próprios determinam as frequências emitidas por um tambor:

$$\text{Freq.} = \frac{\sqrt{\lambda}c}{2\pi}.$$

Logo, a pergunta "Podemos ouvir a forma de um tambor?" traduz-se da seguinte forma:
Suponhamos que dispomos de um analisador de ~~frequências~~ valores próprios perfeito. Será que conseguimos deduzir a forma de um tambor?

Dito de outra forma:
Sejam Ω_1, Ω_2 dois domínios planos e considerem-se os problemas

$$\left\{ \begin{array}{c} -\Delta f = \lambda f \text{ em } \Omega_1 \\ f|_{\partial\Omega_1} = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{c} -\Delta g = \mu g \text{ em } \Omega_2; \\ g|_{\partial\Omega_2} = 0 \end{array} \right.$$

Suponhamos que os problemas admitem os mesmos valores próprios.
(caso em que se chamarão *iso-espectrais*).
Será que Ω_1 e Ω_2 são isométricos?

Um pouco de história

- Sir Arthur Schuster (1882)

  To find out the different tunes sent out by a vibrating system is a problem which may or may not be solvable in certain special cases, but it would baffle the most skillful mathematician to solve the inverse problem and to find out the shape of a bell by means of the sounds which it is capable of sending out. And this is the problem which ultimately spectroscopy hopes to solve in the case of light. In the meantime we must welcome with delight even the smallest step in the desired direction.

Um pouco de história

- Sir Arthur Schuster (1882)

  To find out the different tunes sent out by a vibrating system is a problem which may or may not be solvable in certain special cases, but it would baffle the most skillful mathematician to solve the inverse problem and to find out the shape of a bell by means of the sounds which it is capable of sending out. And this is the problem which ultimately spectroscopy hopes to solve in the case of light. In the meantime we must welcome with delight even the smallest step in the desired direction.

- Mark Kac, Can one hear the shape of a drum?, The American Math. Monthly 1966.

Um pouco de história

É possível ouvir a forma de um tambor?

Indícios para a resposta Sim

- H. Weyl (1911) - Podemos ouvir a área de um tambor.
  (2 tambores de áreas diferentes emitem frequências diferentes)
- Podemos ouvir o perímetro de um tambor (A. Pleijel 1954), e até o número de buracos que este contém (Kac, 66).

Um pouco de história

É possível ouvir a forma de um tambor?

Indícios para a resposta Sim

- H. Weyl (1911) - Podemos ouvir a área de um tambor.
  (2 tambores de áreas diferentes emitem frequências diferentes)
- Podemos ouvir o perímetro de um tambor (A. Pleijel 1954), e até o número de buracos que este contém (Kac, 66).

Indícios para a resposta Não

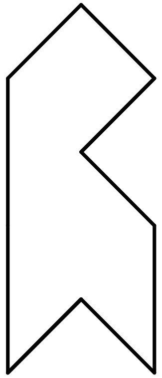
- Urakawa (1982): Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ com $n \geq 4$, não podemos ouvir a forma de um "tambor".

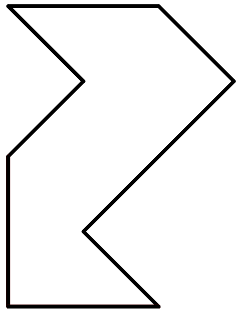
É possível ouvir a forma de um tambor?

Resposta Final: Não!

- C. Gordon, D. Webb. and S. Wolpert, Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds, *Inventiones Mathematicae* (1992)

Os seguintes domínios são iso-espectrais (os tambores emitem as mesmas frequências):





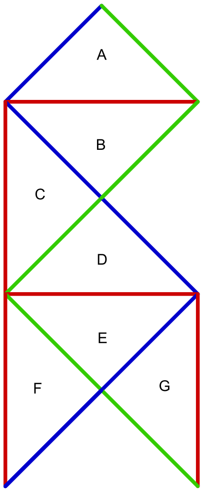
Seja λ um valor próprio do primeiro problema, e $f \not\equiv 0$:

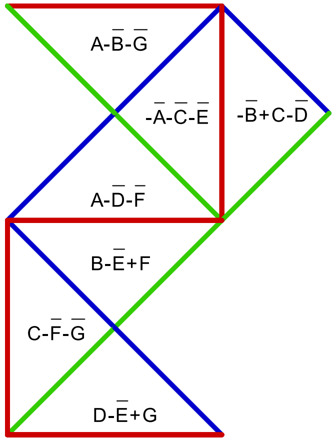
$$\begin{cases} -\Delta f = \lambda f \text{ em } \Omega_1 \\ f = 0 \text{ em } \partial\Omega_1 \end{cases}$$

$\mapsto$

Construímos $g \not\equiv 0$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta g = \lambda g \text{ em } \Omega_2 \\ g = 0 \text{ em } \partial\Omega_2 \end{cases}$$


A
B
C
D
E
F
G


$A-\overline{B}-\overline{G}$
$-\overline{A}-\overline{C}-\overline{E}$
$-\overline{B}+C-\overline{D}$
$A-\overline{D}-\overline{F}$
$B-\overline{E}+F$
$C-\overline{F}-\overline{G}$
$D-\overline{E}+G$

$$-\Delta f = \lambda f \tag{1}$$

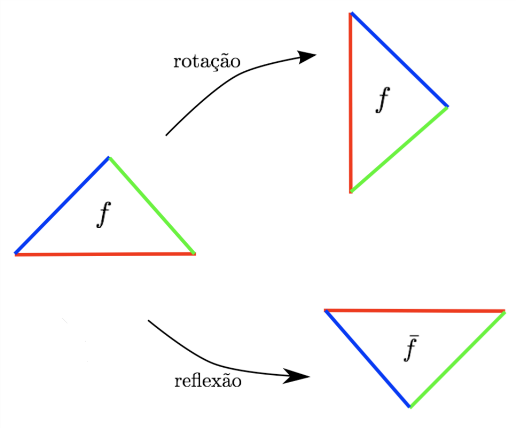
Propriedades.

- u, v solução de (1) $\Rightarrow u + v,\ -u$ solução de (1)
- A equação (1) é invariante por isometria, i.e., se u resolve (1) em Ω e $\vec{\tau}$ é uma translação, rotação ou reflexão, então

$$u \circ \vec{\tau} \text{ resolve (1) em } \vec{\tau}^{-1}(\Omega).$$

Notações / Propriedades

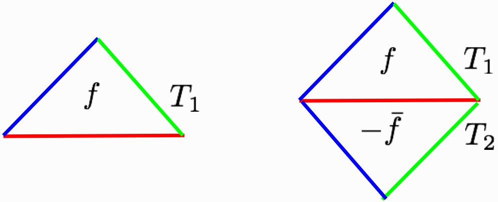
Os conjuntos representados correspondem ao domínio de uma função (i.e., a um tambor).



Notações / Propriedades

Os conjuntos representados correspondem ao domínio de uma função (i.e., a um tambor).

Princípio de Reflexão:



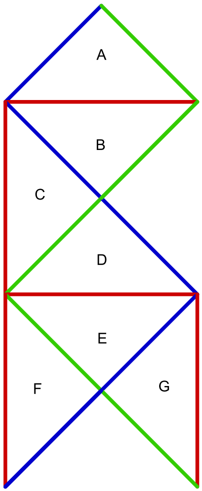
$$\begin{cases} -\Delta f = \lambda f \text{ em } T_1 \\ f = 0 \text{ na base} \end{cases}$$

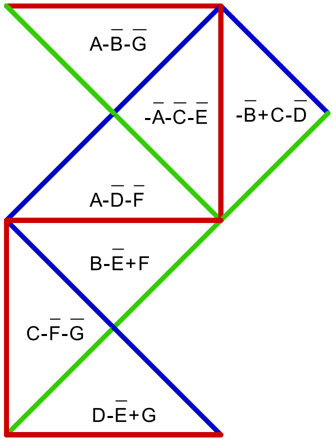
Então o prolongamento:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f \text{ em } T_1 \\ -\bar{f} \text{ em } T_2 \end{cases}$$

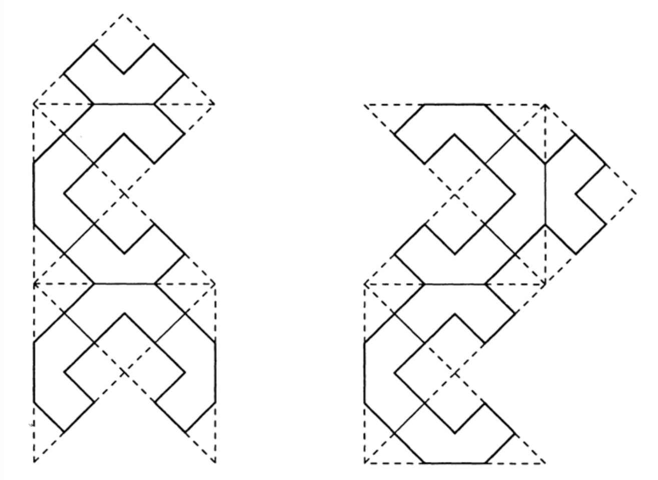
verifica

$$-\Delta \tilde{f} = \lambda \tilde{f} \text{ no losango.}$$


A
B
C
D
E
F
G


$A-\bar{B}-\bar{G}$
$-\bar{A}-\bar{C}-\bar{E}$
$-\bar{B}+C-\bar{D}$
$A-\bar{D}-\bar{F}$
$B-\bar{E}+F$
$C-\bar{F}-\bar{G}$
$D-\bar{E}+G$

Como construir, a partir daqui, outros pares de tambores iso-espectrais?



Referências

- M. Kac, *Can One Hear the Shape of a Drum?*, The American Math. Monthly (1966)
- S. J. Chapman, *Drums that sound the same*, The American Math. Monthly (1995)
- C. Gordon, D. Webb, *You Can't Hear the Shape of a Drum*, American Scientist (1996)
- Jorge Buescu, *Da Falsificação de Euros aos Pequenos Mundos* (livro Gradiva 2003)
- Wikipedia, *Hearing the shape of a drum*