Hexágonos encaixados

O problema proposto pode ser resolvido usando alguma Álgebra Linear Euclidiana, para polígonos arbitrários (convexos ou não) com um número de lados também arbitrário. Neste contexto geral, a sucessão de polígonos encaixados converge sempre para o baricentro comum a todos eles. O limite deve ser visto como um polígono degenerado com todos os vértices iguais. A velocidade de convergência é sempre geométrica, mas tanto mais lenta quanto maior fôr o número de lados dos polígonos.

Representemos um polígono de p lados no plano pela lista $X = (x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_{p-1}) \in \mathbb{R}^{2p}$ dos seus p vértices. O polígono que se obtém de X ligando os sucessivos pontos médios dos seus lados é representado pela lista

$$TX = \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \ldots, \frac{x_{p-1} + x_0}{2} \right) .$$

A correspondência $X \mapsto TX$ define um operador linear $T : \mathbb{R}^{2p} \to \mathbb{R}^{2p}$. O *baricentro* do polígono X é o ponto $b(X) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} x_i$, obtido efectuando a média aritmética dos seus p vértices. Um polígono em $\mathbb{R}^{2p}$ pode ser degenerado por ter um ou vários dos seus vértices coincidentes. Quando todos os seus p vértices forem iguais dir-se-á *um polígono pontual*. Designaremos por $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^{2p}$ o subespaço formado pelos polígonos pontuais,

$$\mathcal{P} = \{\, X \in \mathbb{R}^{2p} \,:\, x_0 = x_1 = \ldots = x_{p-1} \,\} .$$

Este espaço é formado pelos pontos fixos do operador T, i.e., $\mathcal{P} = \{X : TX = X\}$. Seja BX o polígono pontual com todos os seus vértices coincidentes com o baricentro de X, $BX = (b(X), \ldots, b(X))$. A aplicação $X \mapsto BX$ define um segundo operador linear $B : \mathbb{R}^{2p} \to \mathbb{R}^{2p}$, que é uma projecção, no sentido em que $B = B \circ B$. O núcleo desta projecção é o subespaço $\mathcal{Q}$ formado pelos polígonos de baricentro 0, i.e., $\mathcal{Q} = \{X : BX = 0\} = \{X : b(X) = 0\}$. Os subespaços $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são complementos ortogonais relativamente ao produto interno canónico em $\mathbb{R}^{2p}$, definido por

$$X|Y = \sum_{i=0}^{p-1} x_i|y_i \qquad X, Y \in \mathbb{R}^{2p} .$$

O operador B é a projecção ortogonal sobre $\mathcal{P}$ relativamente a este produto interno. A decomposição ortogonal $\mathbb{R}^{2p} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}$ é invariante pelo operador T. Já sabemos que $\mathcal{P}$ é formado por pontos fixos de T. Iremos referir-nos a BX como o *polígono baricentro* de X. É claro que X e TX têm o mesmo polígono baricentro. Mais ainda, $B = T \circ B = B \circ T$. Logo, o subespaço $\mathcal{Q}$ é também invariante por T.

Uma sucessão de polígonos (X_n) diz-se uma $T-$*órbita* quando satisfaz a relação recursiva $X_{n+1} = TX_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. Numa $T-$órbita todos os polígonos X_n têm o mesmo polígono baricentro $BX_n = C$, que diremos o *baricentro da órbita* (X_n). Iremos demonstrar que:

Para toda a $T-$órbita (X_n) em $\mathbb{R}^{2p}$ de baricentro $C \in \mathcal{P}$,

$$\|X_n - C\|^2 \leq \left(1 - \frac{1}{4\,p^2}\right)^n \|X_0 - C\|^2 \,.$$

Em particular $\lim_{n\to\infty} X_n = C$.

Como a sucessão $(X_n - C)$ é uma $T-$órbita de baricentro 0, basta-nos mostrar que para toda a $T-$órbita (X_n) em $\mathcal{Q}$, $\|X_n\|^2 \leq \left(1 - \frac{1}{4\,p^2}\right)^n \|X_0\|^2$. Por sua vez, este facto resultará de mostrar que o operador T restringido, $T|_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, satisfaz a desigualdade $\|T|_{\mathcal{Q}}X\| = \|TX\| \leq \sqrt{1 - \frac{1}{4\,p^2}}\,\|X\|$, para todo $X \in \mathcal{Q}$, o que equivale a dizer que,

$$\|T|_{\mathcal{Q}}\| \leq \sqrt{1 - \frac{1}{4\,p^2}} \quad . \tag{1}$$

Recordamos que a norma de um operador linear $L : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, denotada por $\|L\|$, é a menor constante $k \geq 0$ tal que $\|LX\| \leq k\,\|X\|$ para todo $X \in \mathcal{Q}$. Numa caracterização alternativa

$$\|L\| = \max\left\{ \frac{\|LX\|}{\|X\|} \,:\, X \in \mathcal{Q},\ X \neq 0 \right\} \,.$$

O quociente $\|LX\|/\|X\|$ mede a *expansividade* do operador L na direcção do vector X. O termo "expansividade" deve ser interpretado em sentido lato de modo a incluir a contractividade que ocorre quando o quociente seja menor que 1. Chamaremos *maximizante* à direcção de um vector $X \in \mathcal{Q}$, $X \neq 0$, cuja expansividade $\|LX\|/\|X\|$ seja máxima, i.e., igual a $\|L\|$.

Para medir a norma de T introduzimos um terceiro operador linear $\Delta : \mathbb{R}^{2p} \to \mathbb{R}^{2p}$, definido por

$$\Delta X = \left(\frac{x_0 - x_1}{2}, \frac{x_1 - x_2}{2}, \ldots, \frac{x_{p-1} - x_0}{2} \right) .$$

Δ tem núcleo igual a $\mathcal{P}$. Δ deixa invariante o subespaço $\mathcal{Q}$, porque $B \circ \Delta = \Delta \circ B = 0$. O operador T e o seu "conjugado" Δ satisfazem, qualquer que seja $X \in \mathbb{R}^{2p}$,

1. $X = TX + \Delta X$,
2. $TX \perp \Delta X, \quad \text{i.e.,} \quad (TX|\Delta X) = 0$,
3. $\|X\|^2 = \|TX\|^2 + \|\Delta X\|^2$,
4. $0 < \|\Delta X\|^2 \leq \|X\|^2 \quad \text{se} \quad X \in \mathcal{Q} \text{ e } X \neq 0$,
5. $0 \leq \|TX\|^2 < \|X\|^2 \quad \text{se} \quad X \in \mathcal{Q} \text{ e } X \neq 0$.

A propriedade 1. resulta das definições de T e Δ. A propriedade 3. resulta de 1. e 2. pelo teorema de Pitágoras, ou alternativamente desenvolvendo e simplificando a expressão algébrica $\|X\|^2 = (TX + \Delta X)|(TX + \Delta X)$. Quanto a 2.,

$$\begin{aligned}
(TX|\Delta X) &= \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{p-1} (x_i + x_{i+1}) (x_i - x_{i+1}) \\
&= \frac{1}{4} \left(\sum_{i=0}^{p-1} (x_i)^2 - \sum_{i=0}^{p-1} (x_{i+1})^2 \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\|X\|^2 - \|X\|^2 \right) = 0 .
\end{aligned}$$

A propriedade 3. implica 4., porque o operador $\Delta|_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ é injectivo. O núcleo de $\Delta : \mathbb{R}^{2p} \to \mathbb{R}^{2p}$ é o subespaço $\mathcal{P}$, cuja intersecção com $\mathcal{Q}$ se reduz ao vector nulo. Finalmente 5., é consequência de 3. e 4.. Em particular, o operador $T|_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ é uma contracção. Resulta também de 3. que a direcção de expansividade máxima do operador $T|_{\mathcal{Q}}$ é a direcção de expansividade mínima de $\Delta|_{\mathcal{Q}}$.

Dado um operador linear $L : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, define-se a a sua *expansividade mínima* como

$$\mathrm{m}(L) = \min \left\{ \frac{\|LX\|}{\|X\|} \; : \; X \in \mathcal{Q}, \; X \neq 0 \right\} .$$

É claro que um operador pode ter expansividade mínima nula. Em verdade $\mathrm{m}(L) = 0$ se e só se o operador L não fôr injectivo. Quando o operador L é invertível, a expansividade mínima de L é o inverso da expansividade máxima de L^{-1}. Para justificar este facto consideremos um vector não nulo $X \in \mathcal{Q}$ na direcção de expansividade mínima de L. Escrevendo

$$\frac{\|LX\|}{\|X\|} = \frac{\|LX\|}{\|L^{-1}(LX)\|} = \frac{\|Y\|}{\|L^{-1}Y\|} \,,$$

vemos que $Y = LX$ é um vector maximizante da expansividade de L^{-1}. Logo $\mathrm{m}(L) = \|L^{-1}\|^{-1}$.

Voltando ao contexto específico do nosso problema, porque é injectivo, o operador $\Delta|_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ é invertível, e resulta de 3. que

$$\|T|_{\mathcal{Q}}\|^2 = 1 - \mathrm{m}(\Delta|_{\mathcal{Q}})^2 = 1 - \|(\Delta|_{\mathcal{Q}})^{-1}\|^{-2} \,. \tag{2}$$

Observemos que o inverso de $\Delta|_{\mathcal{Q}}$ é o operador $\Phi = (\Delta|_{\mathcal{Q}})^{-1} : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ definido por

$$\Phi X = 2 \left(\sum_{i=0}^{p-1} x_i \,,\ \sum_{i=1}^{p-1} x_i \,,\ \ldots \,,\ \sum_{i=p-1}^{p-1} x_i \right) = 2 \sum_{i=0}^{p-1} \Theta_i X \,,$$

onde

$$\Theta_i X = (0, \ldots, 0, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{p-1}) \qquad 0 \le i \le p-1 \,.$$

Logo $\|\Phi X\| \le 2 \sum_{i=0}^{p-1} \|\Theta_i X\| \le 2\,p\,\|X\|$, o que mostra que $\|(\Delta|_{\mathcal{Q}})^{-1}\| = \|\Phi\| \le 2\,p$. Usando esta estimativa, a desigualdade (1) segue de (2).