Solução de um Jogo Solitário

P. Duarte

Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais
1649-003 Lisboa, Portugal
e-mail: *pduarte@ptmat.lmc.fc.ul.pt*

1 Introdução

Neste artigo descreve-se a solução completa de um jogo solitário de peões descrito em [S] por Benjamin L. Schwartz. No seu artigo " A Solitaire Pebble Game" Benjamin Schwartz diz que tomou conhecimento do jogo através de Martin Gardner, que por sua vez atribui a sua formulação original a M. Kontsevich. Tanto quanto pude aprender de [S], é uma questão em aberto a caracterização da classe de todos os *padrões iniciais soluveis* deste jogo solitário. Traduzindo Benjamin, e assumindo que o tabuleiro é infinito: "Uma quantidade de peões é colocada no tabuleiro segundo um padrão inicial. Há apenas uma regra para jogar: um novo peão é colocado numa casa imediatamente à direita de outro peão existente, que por sua vez se move uma casa para cima. Ambas as casas à direita e em cima do peão existente devem estar vazias para a jogada ser legal. Considere um padrão inicial arbitrário. O objectivo do jogo é deixar vagas todas as casas ocupadas no padrão original.

Comecemos com algumas definições formais. Considere $T = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ como o modelo de um *tabuleiro de xadrez infinito*. Os elementos $(i,j) \in T$ serão chamados de *casas*. A *ordem* de uma casa $(i,j) \in T$ será o inteiro $i+j \in \mathbb{Z}$. Um conjunto finito não vazio $A \subseteq T$ será aqui chamado um *padrão*. Ele representa um conjunto de casas ocupadas pelos peões. Uma casa $(i,j) \in T$ será dita *livre* num padrão A se $(i,j) \in A$ mas $(i+1,j) \notin A$ e $(i,j+1) \notin A$. Note que todas as casas de ordem máxima num padrão A estão sempre livres em A. As casas livres de um padrão são aquelas onde o peão pode ser jogado, de acordo com a *regra do jogo*: *Se* (i,j) *é uma casa livre de* A *então é uma jogada legal pôr um novo peão na casa vazia* $(i+1,j)$ *e mover o peão de* (i,j) *para* $(i,j+1)$. Um *jogo* é uma sequência finita de padrões $A_0, A_1, \ldots, A_n$

tal que para cada $k = 1, 2, \dots, n$ o padrão A_k é obtido de A_{k-1} através de uma jodada simples de acordo com a regra do jogo. Por outras palavras,

$$A_k = A_{k-1} \cup \{ \, (i_k + 1, j_k), \; (i_k, j_k + 1) \, \} \setminus \{ \, (i_k, j_k) \, \} \; ,$$

onde (i_k, j_k) é uma casa livre do padrão A_{k-1} Dizemos que um jogo é *ganho* se o padrão final A_n for disjunto do inicial A_0 . Um padrão A é dito *solúvel* se for possivel ganhar um jogo começando A , i.e. , se existir um jogo $A_0, A_1, \dots, A_n$ começando em $A_0 = A$ e terminando no padrão $A_n = B$ disjunto de A . O padrão final $A_n = B$ será dito a *solução* de A . Denotaremos por $\mathcal{S}\mathrm{ol}(A)$ o conjunto, possivelmente vazio, de todas as soluções do padrão A .

A figura seguinte mostra um exemplo de um jogo ganho, que também pode ser representado pela sequência de jogadas efectuadas $(J_{2\,3}, J_{2\,4}, J_{3\,4}, J_{3\,4}, J_{2\,2}, J_{2\,3})$.

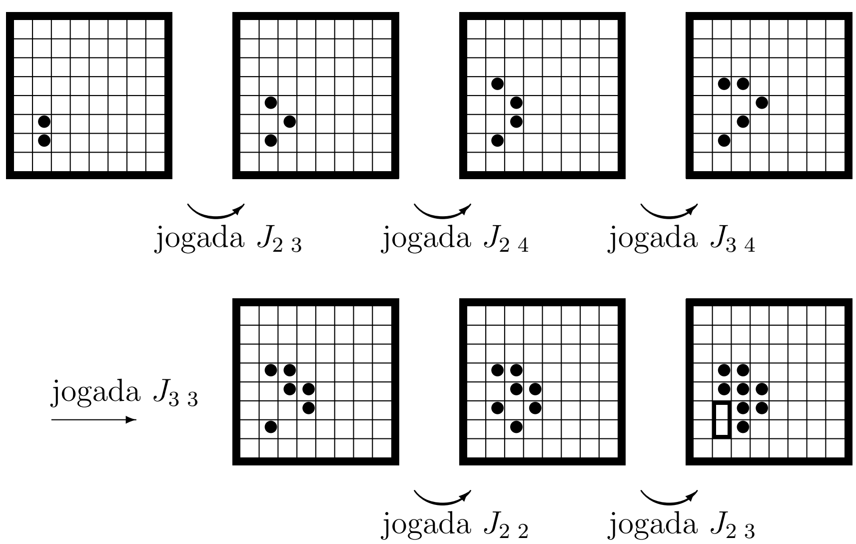

Fig. 1 Um jogo ganho.

Partindo do mesmo padrão inicial com dois peões, nas casas $(2, 2)$ e $(2, 3)$, experimente realizar num tabuleiro de xadrez os seguintes jogos alternativos:

$$(J_{2\,3}, J_{2\,2}, J_{3\,3}, J_{3\,4}, J_{2\,4}, J_{2\,3})$$

$$(J_{2\,3}, J_{2\,4}, J_{2\,2}, J_{3\,4}, J_{3\,3}, J_{2\,3})$$

$$(J_{2\,3}, J_{3\,3}, J_{2\,2}, J_{3\,4}, J_{2\,4}, J_{2\,3})$$

Dois factos ressaiem: Primeiro, estes quatro jogos fazem uso das mesmas jogadas, embora por ordens diversas. Em segundo lugar, todos eles conduzem ao mesmo padrão solução. Na realidade iremos provar que neste jogo solitário a ordem das jogadas, desde que legais, é arbitrária.

Em [S], Benjamin Schwartz descreve um método elegante para mostrar a insolubilidade de certos padrões iniciais. A ideia consiste em considerar a seguinte função de avaliação $\nu : T \to \mathbb{R}$, $\nu(i,j) = \frac{1}{2^{i+j}}$, no tabuleiro infinito $T = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. B. Schwartz chama valor de um padrão A à soma dos valores de todas as casas ocupadas por A, i.e. , $\nu(A) = \sum_{(i,j)\in A} \nu(i,j)$. Ao longo de um jogo o valor do padrão inicial é preservado. Quer isto dizer que $\nu(A) = \nu(B)$ sempre que, jogando, seja possivel tranformar o padrão A em B. Vamos aqui dizer que ν é uma *medida invariante pelo jogo*. Na realidade há muitas outras medidas invariantes pelo jogo. Sendo $\mu : T \to \mathbb{R}$ uma função cujos coeficientes $\mu(i,j) = \mu_{i\,j}$ satisfaçam a seguinte relação recursiva

$$\mu_{i\,j} = \mu_{i+1\,j} + \mu_{i\,j+1} \qquad (i,j) \in T\,, \tag{1}$$

a função avaliação $\mu(A) = \sum_{(i,j)\in A} \mu(i,j)$ será uma medida invariante pelo jogo. Conhecidos os coeficientes $\mu_{n\,0}$, um para cada inteiro $n \in \mathbb{N}$, a relação recursiva (1) permite calcular todos os restantes coeficientes, determinando assim uma medida invariante pelo jogo. No entanto a medida de Schwartz tem propriedade especial. Trata-se de uma medida finita, querendo isto dizer que o tabuleiro T tem valor total finito: $\nu(T) = \sum_{(i\,j)\in T} \frac{1}{2^{i+j}} = 4$. Usando este facto, B. Schwartz argumenta que nenhum padrão com valor $\nu(A) \geq 2$ pode ser solúvel, pois a sê-lo, o padrão A juntamente com a sua solução B teriam um valor total maior ou igual a 4. Portanto o conjunto finito $A \cup B$ teria de cobrir todo o tabuleiro infinito T. Impossivel!

Neste artigo damos um procedimento simples para encontrar jogos minimais ganhos. Quando aplicado o algoritmo a um padrão inicial A, ele corre eternamente se A não for solúvel, ou então pára ao fim de um número finito de passos (que depende apenas do 'tamanho' de A) se A for solúvel. Neste caso a configuração final do procedimento dar-nos-á um padrão solução e uma estratégia ganhadora para A, ambos minimais em certo sentido natural. É fácil decidir ao fim de um número finito de passos (comparavel ao 'tamanho' de A) se o procedimento irá parar ou correr indefinidamente. Estes resultados e algoritmos são obtidos através da algebrização do jogo. As jogadas serão vistas como translações, descritas por vectores, num espaço vectorial adequado em que os padrões são representados por pontos. Alguns conhecimentos mínimos de Álgebra Linear são necessários para trabalhar esta ideia.

2 A acção de um jogo

Introduzimos agora um contexto algébrico natural para o jogo solitário em causa. Denotaremos por $\mathbb{R}^T$ o espaço linear de todas as funções $f:T\to\mathbb{R}$, e por $\mathbb{R}^{(T)}$ o subespaço formado pelas funções que se anulam fora de algum subconjunto finito de T. Denotaremos também por $\mathbb{R}_+^{(T)}$ e $\mathbb{N}^{(T)}$ os subconjuntos de $\mathbb{R}^{(T)}$ formados pelas funções $f\in\mathbb{R}^{(T)}$ tais que $f(i,j)=f_{i\,j}\geq 0$ ou $f(i,j)=f_{i\,j}\in\mathbb{N}$ para todas as casas $(i,j)\in T$. Os elementos em $\mathbb{N}^{(T)}$ serão chamados *configurações*. Por exemplo a função característica $\chi_A:T\to\{0,1\}$ de um padrão A é uma configuração. Seja $\{\delta_{i\,j}\}_{(i,j)\in T}$ a base canónica de $\mathbb{R}^{(T)}$.

$$\delta_{i\,j}(r,s)=\begin{cases}1 & \text{se } (r,s)=(i,j)\\ 0 & \text{se } (r,s)\neq(i,j)\end{cases}$$

Estas funções são também configurações. A função $J_{i\,j}:T\to\mathbb{Z}$

$$J_{i\,j}=\delta_{i+1\;j}+\delta_{i\;j+1}-\delta_{i\,j} \tag{2}$$

será aqui chamada uma *jogada*. Denotaremos por $\mathcal{J}=\{J_{i\,j}\,:\,(i,j)\in T\}$ o conjunto de todas as jogadas. Note que uma jogada não é uma configuração uma vez que toma o valor negativo -1. Com esta notação, se (i,j) é uma casa livre em A então quando, de acordo com a regra do jogo, movemos o peão situado na casa (i,j), obtemos um novo padrão A' tal que $\chi_{A'}=\chi_A+J_{i\,j}$. Logo, uma sequência finita de padrões $A_0,A_1,\ldots,A_n$ é um jogo se e sómente se $\chi_{A_i}-\chi_{A_{i-1}}\in\mathcal{J}$ para cada $i=1,2\ldots,n$. Se $A_0=A$ e $A_n=B$ são respectivamente os padrões inicial e final de um jogo $A_0,A_1,\ldots,A_n$ então existe uma configuração $c\in\mathbb{N}^{(T)}$, chamada a *acção* do jogo, tal que

$$\chi_B-\chi_A=\sum_{(i,j)\in T}c_{i\;j}\,J_{i\;j}\,, \tag{3}$$

onde $c_{i\;j}$ representa o número de vezes que a jogada $J_{i\;j}$ é usada durante o jogo. O número $n=\sum_{(i,j)\in T}c_{i\;j}$ é chamado o *comprimento* do jogo. Ele representa o número total de jogadas efectuadas. Re-escrevendo a combinação linear $\sum_{(i,j)\in T}c_{i\;j}\,J_{i\;j}$ na base canónica $\delta_{i\;j}$,

$$\sum_{(i,j)\in T}c_{i\;j}\,J_{i\;j}=\sum_{(i,j)\in T}\left(c_{i-1\;j}+c_{i\;j-1}-c_{i\;j}\right)\,\delta_{i\;j}$$

encontramos as seguintes relações recursivas para os coeficientes da acção:

$$c_{i\;j}=c_{i-1\;j}+c_{i\;j-1}+a_{i\;j}-b_{i\;j}\,,\qquad (i,j)\in T\,, \tag{4}$$

onde $a_{i\,j} = \chi_A(i,j)$ e $b_{i\,j} = \chi_B(i,j)$. Este sistema de equações é equivalente à única equação funcional (3).

Lema 1 *O conjunto de jogadas $\mathcal{J}$ é linearmente independente.* [1]

Prova. Cada combinação linear de jogadas $J_{i\,j}$ pode ser re-escrita como

$$0 = \sum_{(i,j)\in T} c_{i\,j}\, J_{i\,j} = \sum_{(i,j)\in T} (c_{i-1\,j} + c_{i\,j-1} - c_{i\,j})\ \delta_{i\,j}$$

logo para cada $(i,j) \in T$ obtemos a equação $c_{i-1\,j} + c_{i\,j-1} - c_{i\,j} = 0$ e argumentando por indução na ordem das casas inferimos que $c_{i\,j} = 0$ para todo o $(i,j) \in T$. $\square$

Cada jogo $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$ determina uma configuração $c \in \mathbb{N}^{(T)}$, a acção do jogo, tal que $\chi_B - \chi_A = \sum_{(i,j)\in T} c_{i\,j}\, J_{i\,j}$. Da independência linear acima resulta a unicidade de representação da função $\chi_B - \chi_A$ como combinação linear das jogadas $J_{i\,j}$. Por outras palavras, os coeficientes $c_{i\,j}$ dependem de A e de B mas não do jogo particular que possamos escolher para transformar A em B.

Proposição 1 *Neste jogo solitário, a ordem das jogadas, desde que legais, é arbitrária. O número de vezes que cada jogada $J_{i\,j}$ é efectuada é o mesmo em dois jogos que comecem num certo padrão A e terminem no mesmo pardão B.*

A próxima proposição é fulcral no resto do artigo.

[1] Na realidade pode-se provar um pouco mais: Para cada medida invariante pelo jogo (c.f. secção 1), define-se o integral de uma função $f \in \mathbb{R}^{(T)}$ relativamente a μ como sendo $\int_T f\, d\nu = \sum_{(i,j)\in T} f_{i\,j}\, \mu_{i\,j}$. Se um padrão A for jogável num padrão B então $\int_T \chi_A\, d\mu = \mu(A) = \mu(B) = \int_T \chi_B\, d\mu$. Logo $\int_T \chi_B - \chi_A\, d\mu = 0$. Cada jogada $J_{i\,j}$ satisfaz também $\int_T J_{i\,j}\, d\,\mu = 0$. O conjunto $\mathcal{J}$ é precisamente uma base do espaço de todas as funções $f \in \mathbb{R}^{(T)}$ tais que $\int_T f\, d\mu = 0$ para toda a medida invariante pelo jogo. Isto mostra que dados padrões A e B, se tem $\mu(A) = \mu(B)$ para toda a medida invariante pelo jogo, se e somente se existe $c \in \mathbb{R}^{(T)}$ tal que $\chi_B - \chi_A = \sum_{(i,j)\in T} c_{i\,j}\, J_{i\,j}$. Há um método simples de verificar se esta condição é satisfeita. Suponha que as casas em $A \cup B$ têm todas as coordenadas entre 0 e n. Então, a existir $c \in \mathbb{R}^{(T)}$ tal que $\chi_B - \chi_A = \sum_{(i,j)\in T} c_{i\,j}\, J_{i\,j}$, o seu suporte terá de estar contido no rectângulo $\{0,1,\ldots,n\} \times \{0,1,\ldots,n\}$. Pondo $c_{i\,j} = 0$ sempre que $i < 0$ ou $j < 0$, podemos usar a equação (4) para determinar recursivamente todos os restantes coeficientes $c_{i\,j}$ e assim verificar se o seu suporte está ou não contido no rectângulo referido.

Proposição 2 *Sejam* A *e* B *padrões tais que* $\chi_B - \chi_A = \sum_{(i,j)\in T} c_{i\,j}\, J_{i\,j}$ *para algum* $c \in \mathbb{R}^{(T)}$ *com* $c_{i\,j} \geq 0$ *para todo* $(i,j) \in T$ *. Então*

1. c *é uma configuração, i.e.* c *tem coeficientes em* $\mathbb{N}$ *.*

2. *Existe um jogo* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *de comprimento* $n = \sum_{(i,j)\in T} c_{i\,j}$ *começando em* $A_0 = A$ *e terminando em* $A_n = B$ *.*

Prova. Usando as equações recursivas (4) podemos ver por indução que para todo $(i,j) \in T$, $c_{i\,j} \in \mathbb{Z}$, e como $c_{i\,j} \geq 0$, isto prova o item 1. Provamos 2 por indução no comprimento $n = \sum_{(i,j)\in T} c_{i\,j}$. Se $n = 0$ então $c = 0$, $A = B$ e não há nada a provar. Assumamos agora que sabemos transformar, jogando, um padrão noutro, sempre que a diferença das suas funções características seja uma configuração de comprimento $n-1$. Tomemos dois padrões A e B tais que $\sum_{(i,j)\in T} c_{i\,j}\, J_{i\,j} = \chi_B - \chi_A$, para alguma configuração $c \in \mathbb{N}^{(T)}$ de comprimento n. Seja $A_0 = \{(i,j) \in A \,:\, c_{i\,j} \geq 1\}$. Este subconjunto de A é não vazio uma vez que todos os elementos com ordem mínima em $\{(i,j) \in T \,:\, c_{i\,j} \geq 1\}$ estão em A_0. Escolha uma casa livre $(i,j) \in A_0$ no padrão A_0. Vamos ver que a casa (i,j) também é livre em A. Assuma, por absurdo, que $(i+1,j) \in A$. Como $(i+1,j) \notin A_0$ segue que $c_{i+1\,j} = 0$, e podemos deduzir a seguinte contradicção

$$0 = c_{i+1\,j} = c_{i\,j} + c_{i+1\,j-1} + a_{i+1\,j} - b_{i+1\,j} \geq c_{i\,j} + 1 - b_{i+1\,j} \geq c_{i\,j} \geq 1\,.$$

Analogamente, se suposermos que $(i,j+1) \in A$, como $(i,j+1) \notin A_0$ temos $c_{i\,j+1} = 0$. Daqui resulta uma contradicção semelhante

$$0 = c_{i\,j+1} = c_{i\,j} + c_{i-1\,j+1} + a_{i\,j+1} - b_{i\,j+1} \geq c_{i\,j} + 1 - b_{i\,j+1} \geq c_{i\,j} \geq 1\,.$$

Logo (i,j) é uma casa livre em A e podemos usar a jogada $J_{i\,j}$ para transformar A em outro padrão A' tal que $\chi_{A'} - \chi_A = J_{i\,j}$. Apliquemos a hipótese de indução aos padrões A' e B. Temos $\chi_B - \chi_{A'} = \sum_{(k,l)\in T} c'_{k\,l}\, f_{k\,l}$ com $c'_{k\,l} = c_{k\,l} \in \mathbb{N}$ se $(k,l) \neq (i,j)$ e $c'_{i\,j} = c_{i\,j} - 1 \in \mathbb{N}$. Logo c' é uma configuração de comprimento $n-1$ e sabemos como transformar A' em B pela regra do jogo. Isto prova que existe um jogo de comprimento n, $A_0, A_1, \ldots, A_n$, começando em $A_0 = A$ passando por $A_1 = A'$, e terminando em $A_n = B$. $\square$

Dados A, B e c nas condições acima, podemos usar a proposição 2 para reconstruir um jogo que transforme A em B com acção c.

Algoritmo de Reconstrução do Jogo
Parâmetros: padrão inicial A; acção c;
Variáveis locais: padrão P; acção w; jogo Jogo;
$P = A$;
Jogo $= \{A\}$;
$w = c$;
while$(w \neq 0)\{$
  Escolha (i,j) livre em P tal que $w(i,j) \geq 1$;
  Jogue $J_{i\,j}$ e actualize P;
  Acrescente P no fim da lista Jogo;
  Actualize w na casa (i,j): $w(i,j) = w(i,j) - 1$;
$\}$
return Jogo;

Este algoritmo funciona porque a cada passo vale a relação

$$\chi_B - \chi_P = \sum_{(i,j)\in T} w_{i\,j}\, J_{i\,j} \quad \text{com } w_{i\,j} \geq 0 \,,$$

que nos permite aplicar de novo a proposição 2 para concluir que é possivel jogar P em B, e portanto, supondo $w \neq 0$, que existe uma casa (i,j) livre em P tal que $w(i,j) \geq 1$.

Corolário 3 *Dados padrões A e B existe um jogo transformando A em B sse:*

(1) existe existe $c \in \mathbb{R}^{(T)}$ tal que $\chi_B - \chi_A = \sum_{(i,j)\in T} c_{i\,j}\, J_{i\,j}$,

(2) $c_{i\,j} \geq 0$ para todo $(i,j) \in T$.

Pela nota de rodapé referênciada no lemma 1, a condição (1) acima é computacionalmente decidivel com um custo proporcional ao 'tamanho' de $A \cup B$. Logo, dados dois padrões A e B pode-se sempre decidir *se é possivel*, e *como*, transformar A em B.

3 A Máquina das Soluções

Uma aplicação $\tau : T \to T$ da forma $\tau(i,j) = (i+r, j+s)$ será aqui chamada de *translação.* Este jogo é invariante por translações no sentido seguinte: se $J \in \mathcal{J}$ for uma jogada então também a sua translação o será, i.e. , $J \circ \tau \in \mathcal{J}$. Para qualquer jogo $A_0, A_1, \ldots, A_n$ a sequência de padrões translatados, $\tau^{-1}(A_0), \tau^{-1}(A_1), \ldots, \tau^{-1}(A_n)$, é ainda um jogo. Se A for um padrão solúvel então o padrão translatado $\tau^{-1}(A)$ será também solúvel.

Assim podemos admitir, efectuando translações se necessário, que os padrões iniciais a considerar estão contidos em $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subseteq T$.

A seguinte definição recursiva deve ser encarada como um mecanismo de busca de soluções. Tomemos um padrão inicial $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e consideremos, como acima,

$$a_{i\,j} = \chi_A(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad (i,j) \in A \\ 0 & \text{se} \quad (i,j) \notin A \end{cases} .$$

Definamos recursivamente a função $c : T \to \mathbb{N}$: $c_{i\,j} := 0$ sempre que $i < 0$ ou $j < 0$,

$$c_{i\,j} := \begin{cases} c_{i-1\,j} + c_{i\,j-1} + 1 & \text{se } a_{i\,j} = 1 \\ c_{i-1\,j} + c_{i\,j-1} - 1 & \text{se } a_{i\,j} = 0 \text{ e } c_{i-1\,j} + c_{i\,j-1} \geq 1 \\ 0 & \text{se } a_{i\,j} = 0 = c_{i-1\,j} + c_{i\,j-1} \end{cases} , \tag{5}$$

à custa da qual podemos definir

$$b_{i\,j} := \begin{cases} 0 & \text{se } a_{i\,j} = 1 \text{ ou } c_{i-1\,j} + c_{i\,j-1} = 0 \\ 1 & \text{se } a_{i\,j} = 0 \text{ e } c_{i-1\,j} + c_{i\,j-1} \geq 1 \end{cases} . \tag{6}$$

A função $b : T \to \{0,1\}$ assim obtida é a função característica de um conjunto B, obviamente disjunto de A:

$$B = \{\, (i,j) \in T \;:\; a_{i\,j} = 0 \text{ e } c_{i-1\,j} + c_{i\,j-1} \geq 1 \,\} .$$

Facilmente se verifica que

Proposição 4 *Os coeficientes* $a_{i\,j}$, $b_{i\,j}$ *e* $c_{i\,j}$ *satisfazem a relação recursiva (4). Em particular vale a relação (3) entre as funções características de* A *e* B .

Relembramos que uma função $c : T \to \mathbb{N}$ é uma configuração se tiver suporte finito, isto é, se anular fora de um conjunto finito de casas. Temos então o seguinte critério:

Proposição 5 *Se uma das seguintes condições equivalentes for satisfeita: (1)* c *é uma configuração; (2)* B *é finito; então* A *é solúvel, o padrão* B *é uma solução* $B \in \mathcal{S}ol(A)$ *e existe um jogo ganho começando em* A *com acção* c *.*

Prova. Pela proposição anterior $\chi_B - \chi_A = \sum_{(i,j)\in T} c_{i\,j}\, J_{i\,j}$. Observe por (5) se tem sempre $c_{i\,j} \geq 0$. Logo pela proposição 2 existe um jogo transformando A em B . Como B é disjunto de A , o padrão B é uma solução de A . □

Podemos ver a definição recursiva de $c : T \to \mathbb{N}$ como um *procedimento computacional* que termina quando a partir de uma certa ordem c se anula completamente. Para algum padrão inicial *input* A o procedimento tanto pode correr eternamente (se A não for solúvel) como parar ao fim de alguns passos retornando como *output* a acção de um jogo ganho começando no padrão A . Neste último caso, de acordo com a proposição 2, a acção c contem toda a informação para a reconstrução de:

(i) uma estratégia ganhadora, e

(ii) um padrão solução para A .

Este procedimento é *completo* no sentido que apenas deixa de encontrar uma solução se o padrão inicial for insolúvel.

Proposição 6 *Seja* c^* *a acção de um jogo ganho começando em* A *e* $c : T \to \mathbb{N}$ *e* $b : T \to \{0, 1\}$ *as aplicações definidas recursivamente em (5) e (6) para o padrão inicial* A *. Então* $c \leq c^*$ *. Em particular* c *é uma configuração.*

Prova. Provemos que $c \leq c^*$. A prova seguirá por indução na ordem das casas. Para $i + j < 0$ claramente $c_{i\,j} = 0 \leq c^*_{i\,j}$. Suponhamos (hipótese de indução) que para todas as casas (i, j) de ordem $i + j \leq n - 1$ se tem $c_{i\,j} \leq c^*_{i\,j}$ e considere uma casa (i, j) de ordem n . Por hipótese de indução tem-se $c_{i-1\,j} + c_{i\,j-1} \leq c^*_{i-1\,j} + c^*_{i\,j-1}$.
Consideremos os seguintes três casos:
1º caso: $(i, j) \in A$. Neste caso, como c^* é a acção de um jogo ganho tem-se $c^*_{i-1\,j} + c^*_{i\,j-1} + 1 = c^*_{i\,j}$. Logo

$$c_{i\,j} = c_{i-1\,j} + c_{i\,j-1} + 1 \leq c^*_{i-1\,j} + c^*_{i\,j-1} + 1 = c^*_{i\,j}\,.$$

2º caso: $(i, j) \notin A$ e $b_{i\,j} = 0$. Neste caso $c_{i-1\,j} + c_{i\,j-1} = 0$ e $c_{i\,j} = 0 \leq c^*_{i\,j}$.
3º caso: $b_{i\,j} = 1$. Neste caso

$$c_{i\,j} = c_{i-1\,j} + c_{i\,j-1} - 1 \leq c^*_{i-1\,j} + c^*_{i\,j-1} - 1 \leq c^*_{i\,j}\,.$$

Logo, em todos os casos temos $c_{i\,j} \leq c^*_{i\,j}$, o que completa a prova por indução. $\square$

Para padrões soluveis A definimos a seguinte ordem em $\mathcal{S}\mathrm{ol}(A)$: Dadas duas soluções B e B' em $\mathcal{S}\mathrm{ol}(A)$ considerem-se as suas respectivas acções $c \in \mathbb{N}^{(T)}$ e $c' \in \mathbb{N}^{(T)}$ definidas pelas relações $\chi_B = \chi_A + \sum_{(i,j)\in T} c_{i\,j}\, J_{i\,j}$ e $\chi_{B'} = \chi_A + \sum_{(i,j)\in T} c'_{i\,j}\, J_{i\,j}$. A correspondência $c \mapsto B$ é injectiva porque $\mathcal{J}$ é linearmente independente. Diremos que $B \leq B'$ se e só se $c \leq c'$. Esta é uma relação de ordem parcial em $\mathcal{S}\mathrm{ol}(A)$. Com esta terminologia a proposição acima afirma que a solução retornada pelo procedimento é um *mínimo absoluto* em $\mathcal{S}\mathrm{ol}(A)$.

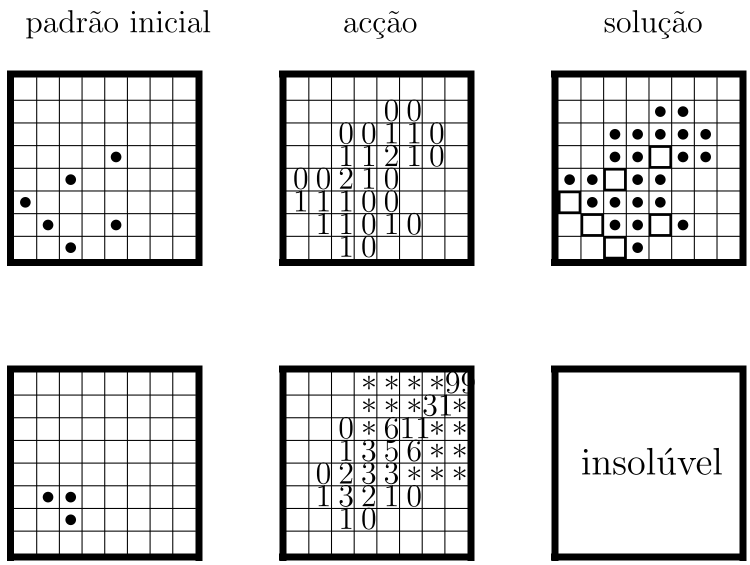

Fig. 2 Dois exemplos.

Na figura acima, nos tabuleiros com as acções (coluna do meio), as casas $(i,j) \in T$ não preenchidas correspondem a valores $c_{i\,j} = b_{i\,j} = 0$. O símbolo $*$ representa algum valor diferente de zero não especificado.

4 A Condição de Paragem

Finalmente, para evitar cálculos desnecessários, é possivel prever em que casos o procedimento irá parar e quão grande será a respectiva configuração acção. A proposição seguinte mostra como alcançar este objectivo.

Proposição 7 *Seja* $A \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *um padrão com ordem máxima* n *, e* $c\colon T\to\mathbb{N}$ *a função definida recursivamente em (5). Então* c *é uma configuração* sse

$$c_{i\,j}+c_{i-1\,j+1}\le 2 \quad e \quad c_{i\,j}+c_{i+1\,j-1}\le 2 \qquad para\ cada\ \ (i,j)\in A\ . \tag{7}$$

A condição acima será referida como condição de paragem*. Caso ela seja satisfeita a solução mínima está contida no sub tabuleiro quadrado* $\{0,1,\ldots,n+2\}\times\{0,1,\ldots,n+2\}$.

Prova. Seja $A\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ um padrão com ordem máxima n para o qual seja satisfeita a condição de paragem (7). Provaremos por indução na ordem das casas que

1. $c_{i\,j}+c_{i+1\,j-1}\le 2$;
2. $c_{i\,j}\le 1$ sempre que $i+j\ge n+1$;
3. $c_{i\,j}=0$ se $i\ge n+2$ ou $j\ge n+2$.

Para $i+j<0$ temos $c_{i\,j}+c_{i+1\,j-1}=0\le 2$. Suponhamos que a condição 1 seja válida sempre que $i+j=n-1$. Então se $i+j=n$ consideremos dois casos: Se uma das casas (i,j) ou $(i+1,j-1)$ estiver em A então a condição 1 é válida pela condição de paragem. Se não, isto é se nenhuma das duas casas estiver em A, então

$$\begin{aligned} c_{i\,j}+c_{i+1\,j-1} &\le (c_{i-1\,j}+c_{i\,j-1}-b_{i\,j})+(c_{i\,j}+c_{i+1\,j-2}-b_{i+1\,j-1}) \\ &\le (2-1)+(2-1)=2\ . \end{aligned}$$

Provámos que a condição 1 é válida sempre. Se $i+j\ge n+1$, como $a_{i\,j}=0$,

$$c_{i\,j}=c_{i-1\,j}+c_{i\,j-1}+a_{i\,j}-b_{i\,j}\le 2+0-1=1\ .$$

Isto prova 2. Finalmente, para provar 3 fixemos $i\ge n+2$ e provemos por indução em j que $c_{i\,j}=0$. Se $j<0$ isto é óbvio. Suponhamos agora que $c_{i\,j-1}=0$ com $j\ge 0$. Tem-se então $i+j\ge n+2$ e por isso $a_{i\,j}=0$. Também se tem $(i-1)+j\ge n+1$ e por 2 segue que $c_{i-1\,j}\le 1$. Logo

$$\begin{aligned} 0\le\ c_{i\,j} &= c_{i-1\,j}+c_{i\,j-1}+a_{i\,j}-b_{i\,j} \\ &\le 1+0+0-1=0\ . \end{aligned}$$

Um argumento simétrico mostra que $c_{i\,j}=0$ sempre que $j\ge n+2$.

Logo o padrão solução $B=\{(i,j)\in T\,:\,c_{i\,j}=c_{i-1\,j}+c_{i\,j-1}-1\}$ está contido em $C=\{(i,j)\in T\,:\,c_{i-1\,j}+c_{i\,j-1}\ge 1\}\subseteq\{0,1,\ldots,n+2\}\times\{0,1,\ldots,n+2\}$.

Vejamos agora que falhando a condição de paragem (7) c não fica uma configuração. Suponhamos que para alguma casa $(i,j) \in T$ $c_{i\,j} \geq 3$. Então

$$\begin{aligned} c_{i+1\,j+1} &\geq c_{i\,j+1} + c_{i+1\,j} - 1 \\ &\geq (c_{i-1\,j+1} + c_{i\,j} - 1) + (c_{i\,j} + c_{i+1\,j-1} - 1) - 1 \\ &\geq (0+3-1) + (3+0-1) - 1 = 3\,. \end{aligned}$$

Raciocinando por indução temos $c_{i+m\,j+m} \geq 3$ para todo $m \geq 0$. Logo neste caso c não é uma configuração. Suponhamos agora que para alguma casa $(i,j) \in T$ $c_{i\,j} + c_{i+1\,j-1} \geq 3$. Vamos ver que também neste caso c tem um suporte infinito. Pelo caso anterior podemos supôr que tanto $c_{i\,j}$ como $c_{i+1\,j-1}$ são menores ou iguais a 2. Assim, numa destas duas casas $c = 2$ enquanto na outra $c \geq 1$. Suponhamos que $c_{i\,j} = 2$ e $c_{i+1\,j-1} \geq 1$. Então

$$\begin{aligned} c_{i+1\,j+1} &\geq c_{i\,j+1} + c_{i+1\,j} - 1 \\ &\geq (c_{i-1\,j+1} + c_{i\,j} - 1) + (c_{i\,j} + c_{i+1\,j-1} - 1) - 1 \\ &\geq (0+2-1) + (2+1-1) - 1 = 2\,, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_{i+2\,j} &\geq c_{i+1\,j} + c_{i+2\,j-1} - 1 \\ &\geq (c_{i\,j} + c_{i+1\,j-1} - 1) + (c_{i+1\,j-1} + c_{i+2\,j-2} - 1) - 1 \\ &\geq (2+1-1) + (1+0-1) - 1 = 1\,. \end{aligned}$$

Por indução temos $c_{i+m\,j+m} \geq 2$ and $c_{i+m+1\,j+m-1} \geq 1$ para cada $m \geq 0$ o que implica que c não seja uma configuração. $\Box$

No segundo exemplo da Fig. 2 temos $c_{2\,2} = 3$ o que pelas proposições 5, 6 e 7 implica que este padrão com três peões seja insolúvel.

Agradecimentos. Aprendi este jogo através de Jorge-Nuno Silva que mais tarde me deu a referência [S]. Depois de várias conversas esclarecedoras fui por ele intimado a escrever este artigo. Esta é uma tradução para português de uma versão escrita em inglês há uns seis anos.

References

[S] B. L. Schwartz, *A solitaire pebble game*, Journal of Recreational Mathematics, vol 26, **3**, (1994).