Caminhos Fractais

1 Normas em $\mathbb{R}^n$

Seja V um espaço vectorial sobre o corpo dos reais. Chama-se **norma** do espaço V a uma função $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ que satisfaça, quaisquer que sejam $x, y \in V$,

1. $\|x\| \geq 0$,
2. $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
4. $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$.

A aplicação $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$$

é chamada a **norma Euclideana** de $\mathbb{R}^n$.

Definimos agora duas outras aplicações $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

Exercício 1. *Mostre que* $\|\cdot\|_1$ *e* $\|\cdot\|_\infty$ *são normas em* $\mathbb{R}^n$.

Dada uma norma $\|\cdot\|$ num espaço vectorial V define-se a **bola aberta** de centro em $a \in V$ e raio $r > 0$ como

$$B(a, r) := \{x \in V : \|x - a\| < r\}.$$

Exercício 2. *Descreva geometricamente as bolas abertas relativas às normas* $\|\cdot\|_1$ *e* $\|\cdot\|_\infty$ *em* $\mathbb{R}^n$*,* $n = 2, 3$.

Duas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ num espaço vectorial V dizem-se **equivalentes** se existir uma constante $0 < C < \infty$ tal que

$$C^{-1}\, \|x\| \leq \|x\|' \leq C\, \|x\|, \qquad \forall\, x \in V.$$

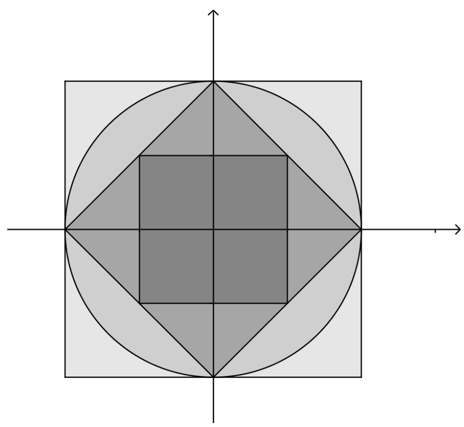
Os conceitos topológicos de convergência, aberto, fechado, interior, fronteira, ponto de acumulação, etc, são todos definíveis à custa da norma. Por exemplo, dizemos que uma sucessão $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x em V se $\lim_{n\to+\infty}\|x_n - x\| = 0$. Um conjunto $A \subset V$ diz-se aberto se para cada ponto $x \in A$ existir $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset A$. Normas equivalentes determinam a mesma topologia, isto é os mesmos conceitos topológicos.

Em $\mathbb{R}^n$, e mais geralmente em qualquer espaço vectorial de dimensão finita, prova-se que todas as normas são equivalentes.

Exercício 3. *Mostre que para todo* $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty.$$

Conclúa que as normas $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ *e* $\|x\|_\infty$ *são equivalentes entre si.*



2 Conjuntos de medida nula

Chama-se rectângulo aberto em $\mathbb{R}^n$ a um produto de n intervalos abertos

$$R =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times\cdots\times]a_n, b_n[.$$

Chama-se volume n-dimensional do rectângulo R ao número

$$\mathrm{Vol}_n(R) := \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j).$$

Exercício 4. *Mostre que a bola aberta relativa à norma* $\|\cdot\|_\infty$

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - a\|_\infty < r\}$$

é um rectângulo com volume $\mathrm{Vol}_n(B(a,r)) = 2^n r^n$.

Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem **medida de Lebesgue nula** se puder ser coberto por famílias finitas ou numeráveis de rectângulos abertos com volume n-dimensional total arbitrariamente pequeno, i.e., se para cada $\varepsilon > 0$ existir uma família numerável de rectângulos abertos $\{R_j : j \geq 0\}$ tal que $A \subseteq \cup_{j=0}^{\infty} R_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(R_j) < \varepsilon$.

Dizemos que uma certa propriedade é **válida para quase todo o** $x \in \mathbb{R}$ quando o conjunto dos pontos onde essa propriedade falha tiver medida de Lebesgue nula.

3 Caminhos rectificáveis

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uicám caminho contínuo. Chama-se decomposição do intervalo $[a, b]$ a uma sequência $D = (t_0, t_1, \ldots, t_m)$ tal que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$. Definimos então

$$L(f, D) := \sum_{j=1}^{m} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\|.$$

O caminho contínuo f diz-se **rectificável** se

$$L(f) := \sup_D L(f, D) < +\infty$$

onde o supremo é tomado sobre todas as decomposições do intervalo $[a, b]$.

Proposição 1. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é um caminho de classe C^1 então f é rectificável e*

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| \, dt.$$

Demonstração. Por um lado

$$\begin{aligned} L(f, D) &= \sum_{j=1}^{m} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{m} \|\int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(s) \, ds\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(s)\| \, ds = \int_a^b \|f'(s)\| \, ds \end{aligned}$$

pelo que tomando o supremo obtemos $L(f) \leq \int_a^b \|f'(s)\| \, ds$. Em particular o caminho f é rectificável.

Fixemos $\varepsilon > 0$. Por continuidade uniforme das componentes f_i' da função derivada f' no intervalo $[a, b]$ existe $\delta > 0$ tal que

$$s, s' \in [a, b], \ |s - s'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_i'(s) - f_i'(s')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}\,(b - a)} =: \varepsilon'.$$

Seja $D = (t_0, t_1, \ldots, t_m)$ uma decomposição do intervalo $[a, b]$ tal que $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ para todo $j = 1, \ldots, m$, e consideremos os vectores velocidade

$$v_j := \frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \qquad (1 \leq j \leq m).$$

Escrevendo $v_j = (v_{j,1}, \ldots, v_{j,n})$ temos $v_{j,i} = f_i'(s_i^*)$ para algum $s_i^* \in [t_{j-1}, t_j]$, pelo que $|v_{j,i} - f_i'(s)| < \varepsilon'$, qualquer que seja $s \in [t_{j-1}, t_j]$. Logo $\|v_j - f'(s)\| < \sqrt{n\,(\varepsilon')^2} = \frac{\varepsilon}{b-a}$, qualquer que seja $s \in [t_{j-1}, t_j]$, o que implica que

$$\begin{aligned}\int_a^b \|f'(s)\|\,ds &= \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(s)\|\,ds \leq \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\frac{\varepsilon}{b-a} + \|v_j\|\right) ds \\ &= \varepsilon + \sum_{j=1}^m \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \leq \varepsilon + L(f).\end{aligned}$$

Finalmente, como ε é arbitrário segue que $\int_a^b \|f'(s)\|\,ds \leq L(f)$. □

Proposição 2 (Teorema do Valor Médio)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ um caminho de classe C^1 tal que $\|f'(t)\| \leq M$, $\forall\, t \in [a,b]$. Então quaisquer que sejam $t, t' \in [a,b]$,*

$$\|f(t) - f(t')\| \leq M\,|t - t'|.$$

Demonstração. Supondo $a \leq t' < t \leq b$,

$$\|f(t) - f(t')\| = \|\int_{t'}^t f'(s)\,ds\| \leq \int_{t'}^t \|f'(s)\|\,ds \leq M\,|t - t'|.$$

□

Proposição 3. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é um caminho de classe C^1 com $n \geq 2$ então o conjunto imagem $f([a,b]))$, i.e. a curva parametrizada por f, tem medida de Lebesgue nula.*

Demonstração. Como $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 o máximo $L = \max_{a \leq t \leq b} \|f'(t)\|$ está bem definido . Fixemos um inteiro $N \in \mathbb{N}$ grande e consideremos a decomposição $D = (t_0, t_1, \ldots, t_N)$, definida por $t_j := a + \frac{j}{N}\,(b-a)$ para $0 \leq j \leq N$. Seja $\{B_j : 0 \leq j \leq N\}$ a família de bolas abertas

$$B_j := B\left(f(t_j),\, \frac{3\,L\,(b-a)}{2\,N}\right)$$

relativas à norma $\|\cdot\|_\infty$. Pela Proposição 2 o caminho f é uma função Lispchitziana com constante de Lipschitz L, i.e., $\forall\, t, t' \in [a,b]$,

$$\|f(t) - f(t')\|_\infty \leq \|f(t) - f(t')\|_2 \leq L\,|t - t'|.$$

Isto implica que $f([t_{j-1}, t_j]) \subseteq B_j$, para todo o j. De facto qualquer que seja $s \in [t_{j-1}, t_j]$,

$$\|f(t_j) - f(s)\|_\infty \leq L\,|t_j - s| \leq \frac{L\,(b-a)}{N} < \frac{3\,L\,(b-a)}{2\,N}$$

pelo que $f(s) \in B_j$. Logo $f([a,b]) \subseteq \cup_{j=1}^N B_j$. Pelo Exercício 4 temos

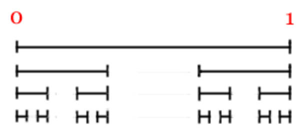
$$\sum_{j=1}^N \mathrm{Vol}_n(B_j) \leq N\,\left(3L\frac{b-a}{N}\right)^n = \frac{(3L(b-a))^n}{N^{n-1}}.$$

Como $n \geq 2$, a expressão à direita tende a 0 quando $N \to +\infty$, o que mostra que $f([a,b])$ tem medida de Lebesgue nula. □

4 O Conjunto de Cantor

Seja $I_0 := [0,1]$. Removendo o terço do meio deste intervalo obtemos o conjunto fechado $I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ que é união de dois intervalos de comprimento $\frac{1}{3}$. Os intervalos $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$ são as componentes conexas de I_1. Se a cada um destes dois intervalos removermos o terço do meio obtemos uma união de 4 intervalos $I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Repetindo este processo, de remoção do terço do meio a cada componente conexa do passo anterior, obtemos no n-ésimo passo um conjunto fechado I_n que é uma união de 2^n intervalos de comprimento $\frac{1}{3^n}$:

$$I_n = [0, \frac{1}{3^n}] \cup [\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}] \cup \ldots \cup [\frac{3^n - 1}{3^n}, 1].$$



Os conjuntos I_n formam uma sequência monótona decrescente

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$$

e chama-se **conjunto de Cantor trenário** à intersecção desta sequência de conjuntos fechados

$$C := \cap_{n \geq 0} I_n.$$

Uma componente conexa de $\mathbb{R} \setminus C$ diz-se um **gap** de C.

Exercício 5. *Mostre que C é compacto (fechado e limitado), não vazio, e tem medida de Lebesgue nula.*

Todo o número real $x \in [0,1]$, pode ser escrito na base 3 como uma sequência de dígitos no conjunto $\{0,1,2\}$, i.e., $x = 0 \cdot a_1 a_2 a_3 \cdots$, onde $a_j \in \{0,1,2\}$ para todo o j, o que significa que $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$.

Exercício 6. *Mostre que* $C = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \, : \, a_j \in \{0,2\}, \, \forall \, j \geq 1 \right\}$. *Além disso cada ponto $x \in C$ representa-se de modo único como soma duma série $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$ com $a_j \in \{0,2\}$ para todo $j \geq 1$.*

5 A Função de Cantor

No espaço $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ das sequências $\{a_j\}_{j \geq 1}$ com $a_j \in \{0,1,2\}$ $\forall \, j \geq 1$ define-se a seguinte ordem, chamada de **ordem lexicográfica**. Dadas sequências $\underline{a} = \{a_j\}_{j \geq 1}$ e $\underline{b} = \{b_j\}_{j \geq 1}$, dizemos que $\underline{a} \leq \underline{b}$ se $a_j = b_j$ $\forall \, j \geq 1$ ou então $a_j = b_j$ $\forall \, 1 \leq j \leq k-1$ mas $a_k < b_k$.

Exercício 7. *Mostre que esta relação no espaço* $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ *é uma relação de ordem parcial. Por outras palavras esta relação é*

1. $\underline{a} \leq \underline{a}$ *(reflexiva),*
2. $\underline{a} \leq \underline{b}$ *e* $\underline{b} \leq \underline{a}$ *implica* $\underline{a} = \underline{b}$ *(antissimétrica),*
3. $\underline{a} \leq \underline{b}$ *e* $\underline{b} \leq \underline{c}$ *implica* $\underline{a} \leq \underline{c}$ *(transitiva).*

Além disso é uma ordem total, no sentido em que $\underline{a} \leq \underline{b}$ *ou* $\underline{b} \leq \underline{a}$, $\forall\, \underline{a}, \underline{b} \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$.

Define-se $F : C \to [0,1]$,

$$F\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}\right) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j/2}{2^j}.$$

Proposição 4. *A função* $F : C \to [0,1]$ *satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) F *é monótona crescente,*

(b) $F(0) = 0$ *e* $F(1) = 1$*,*

(c) $F(a) = F(b)$ *para cada gap limitado* $]a,b[$ *de* C*,*

(d) $|F(x) - F(y)| \leq 2\,|x-y|^{\alpha}$, $\forall\, x, y \in C$, *onde* $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.63093\ldots$.

Demonstração. Consideremos as aplicações $h_3 : \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}} \to [0,1]$, $h_3(\underline{a}) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$ e $h_2 : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to [0,1]$, $h_2(\underline{a}) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j}$. Ambas são sobrejectivas e monótonas crescentes embora não injectivas (porquê?). Pelo Exercício 6, a restrição de h_3 ao subespaço das sequências com dígitos em $\{0,2\}$, $h_3 : \{0,2\}^{\mathbb{N}} \to C$ é uma aplicação bijectiva. A aplicação F pode escrever-se como a composição de três aplicações monótonas crescentes, $F = h_2 \circ g \circ h_3^{-1}$ onde $g\{a_j\}_{j\geq 1} := \{a_j/2\}_{j\geq 1}$. Logo F é monótona crescente.

Para o item (b) temos

$$F(0) = F\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{0}{3^j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{0}{2^j} = 0$$

e também

$$F(1) = F\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{3^j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1.$$

Toda a componente conexa do conjunto I_n é um intervalo da forma

$$J = [0.a_1 a_2 \,\ldots\, a_n,\, 0.a_1 a_2 \,\ldots\, a_n\, 2\,2\,2 \,\ldots].$$

O terço do meio do intervalo J é o gap

$$G =]\underbrace{0.a_1 a_2 \,\ldots\, a_n\, 0\,2\,2\,2 \,\ldots}_{=a},\, \underbrace{0.a_1 a_2 \,\ldots\, a_n\, 2\,0\,0\,0 \,\ldots}_{=b}[.$$

Logo

$$F(a) = F\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{3^j} + \sum_{j=n+2}^{\infty} \frac{2}{3^j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j/2}{2^j} + \sum_{j=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^j}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j/2}{2^j} + \frac{1}{2^{n+1}} = F\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{3^j} + \frac{2}{3^{n+1}}\right) = F(b)$$

o que estabelece (c).

Dados $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$ e $y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{3^j}$ em C, seja k o menor inteiro tal que $a_j = b_j$ para todo $1 \leq j \leq k-1$, mas $a_k \neq b_k$. Então

$$|x - y| \geq \frac{2}{3^k} - \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^j} = \frac{1}{3^k}.$$

Por outro lado

$$\alpha = \frac{\log 2}{\log 3} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2 = 3^{\alpha}.$$

Logo

$$|F(x) - F(y)| \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{|a_j/2 - b_j/2|}{2^j} \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{2}{2^k} = \frac{2}{3^{k\,\alpha}} \leq 2\,|x-y|^{\alpha}.$$

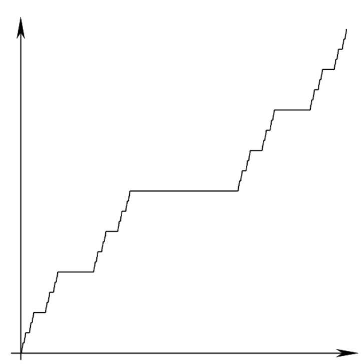
□

Uma função $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ diz-se **Hölder contínua** com expoente de Hölder $\alpha \in]0,1[$ se existir uma constante $C < \infty$ tal que

$$|F(x) - F(y)| \leq C\,|x-y|^{\alpha}, \quad \forall\, x, y \in [0,1].$$

Pela alínea (c) da Proposição anterior a função F admite uma extensão (única) ao intervalo $[0,1]$ que é constante em cada gap do conjunto de Cantor C. Esta extensão, que continuaremos a designar por F, diz-se a **função de Cantor**,

A figura seguinte mostra o gráfico da função de Cantor.



Exercício 8. *A função de Cantor é Hölder contínua com expoente de Hölder* $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Exercício 9. *A função de Cantor é diferenciável com derivada nula, i.e.,* $F'(x) = 0$, *em quase todo o ponto* $x \in [0,1]$. *Em particular, para todo* $x \in [0,1]$,

$$F(x) - F(0) > \int_0^x F'(t)\, dt.$$

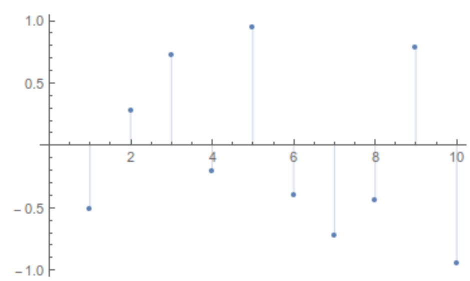
Exercício 10. *Mostre que o gráfico da função de Cantor, parametrizado pelo caminho* $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $f(x) := (x, F(x))$, *é rectificável com comprimento* $L(f) = 2$. *Veja que para este exemplo não é válida a fórmula*

$$L(f) = \int_0^1 \|f'(t)\|\, dt.$$

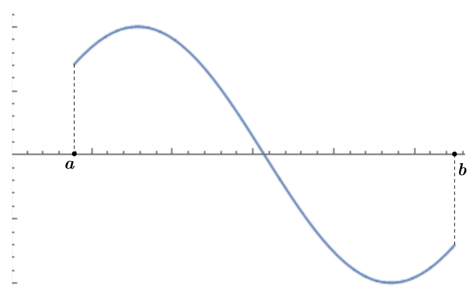
Sugestão: *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *considere a linha poligonal associada à decomposição* $D = (t_0, t_1, \ldots, t_{2^{n+1}-1})$ *determinada pelas* 2^{n+1} *extremidades das componentes conexas do conjunto* I_n *e observe que os lados não horizontais desta linha poligonal têm todos o mesmo comprimento.*

6 O Espaço das Funções Contínuas

Um ponto em $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pode ser pensado como uma função $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ onde o valor $f(i) = x_i$ representa a i-ésima coordenada do vector x. Deste modo podemos representar gráficamente o ponto x como o gráfico da função f.



Analogamente uma função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pode ser vista como um ponto ou um vector no espaço vectorial $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ de todas as funções contínuas com valores em $\mathbb{R}$ definidas no intervalo $[a,b]$.



Este espaço tem dimensão infinita.

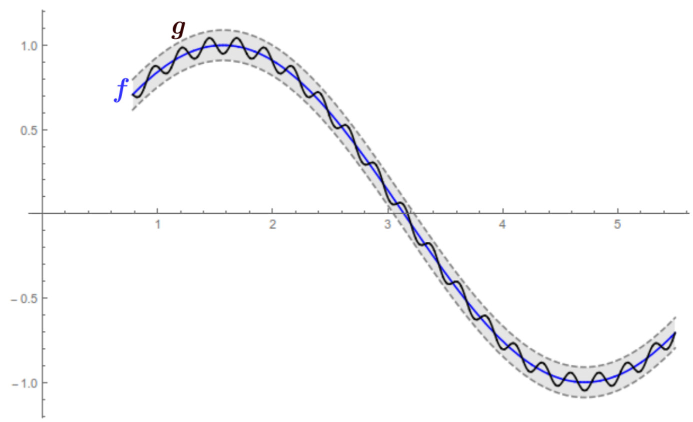
Exercício 11. *As funções $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, são linearmente independentes.*
Sugestão: *Se não fossem existiram polinómios com infinitos zeros.*

Para cada $x \in [a, b]$ o valor $f(x)$ é uma coordenada do vector $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, que assim tem infinitas coordenadas. No espaço vectorial $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ podemos considerar a norma $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Exercício 12. *Verifique que $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço normado.*

Dados vectores $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ a norma da diferença $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$ diz-se a distância uniforme entre as funções f e g. Duas funções f e g estão ε-próximas, i.e., $d(f, g) < \varepsilon$ se e somente se $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ for all $x \in [a, b]$, ou seja se os gráficos de f e g estão ε-próximos um do outro, no sentido em que todo o ponto do gráfico de g está ε-próximo do ponto do gráfico de f com a mesma abcissa.



Associada a esta noção de distância temos um conceito de convergência.

Dada uma sucessão de funções $f_n \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, dizemos que f_n converge uniformemente para uma função $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ se $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Temos também uma noção de sucessão de Cauchy. Uma sucessão $f_n \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ diz-se de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$ existir $p \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ quaisquer que sejam $n, m \geq p$.

Teorema 1. *O espaço normado $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ é completo, no sentido em que todas as sucessões de Cauchy deste espaço são convergentes.*

Demonstração. Dado $x \in [a, b]$, como $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$, segue que $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$ é uma sucessão de Cauchy numérica. Como $\mathbb{R}$ é completo, esta sucessão converge e podemos definir $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Vamos agora mostar que f é uma função contínua.

Dados $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in [a,b]$, fixemos uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon/3$ $\forall\, n, m \geq p$. Por outro lado como f_p é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $|f_p(x) - f_p(x_0)| < \varepsilon/3$ sempre que $|x - x_0| < \delta$. Se $x \in [a,b]$ satisfizer $|x - x_0| < \delta$ e $n \geq p$ então

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x_0)| &\leq |f_n(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - f_p(x_0)| + |f_p(x_0) - f_n(x_0)| \\ &\leq 2\,\|f_n - f_p\|_\infty + |f_p(x) - f_p(x_0)| < 2(\varepsilon/3) + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

e tomando o limite quando $n \to +\infty$ obtemos

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Este argumento prova que f é contínua em x_0. Como x_0 é arbitrário, f fica contínua no intervalo $[a,b]$. Com um argumento análogo temos

$$m \geq p \;\Rightarrow\; \|f - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$$

ou seja $\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_\infty = 0$. Logo o espaço $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ é completo. $\square$

Numa espaço normado $(V, \|\cdot\|)$ dizemos que uma série $\sum_{n=0}^\infty v_n$ de vectores $v_n \in V$ é *absolutamente convergente* se a série de termos não negativos $\sum_{n=0}^\infty \|v_n\|$ for convergente.

Exercício 13. *Mostre que num espaço normado completo $(V, \|\cdot\|)$ toda a série absolutamente convergente converge.*

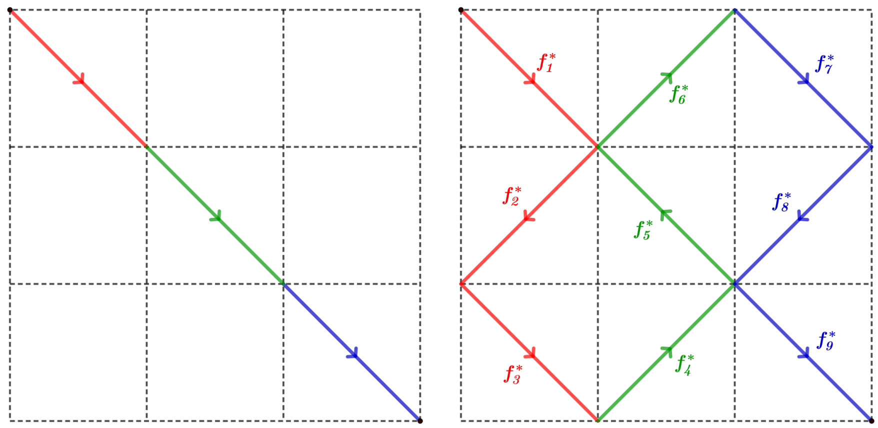
Exercício 14 (Critério de Weierstrass)**.** *Dadas funções $f_n \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, se existir uma série numérica convergente $\sum_{n=0}^\infty a_n$ tal que $\|f_n\|_\infty \leq a_n$ mostre que a série $\sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ converge qualquer que seja $x \in [a,b]$, e a função soma $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ é contínua. Além disso $\lim_{n\to+\infty} \|f - \sum_{j=0}^n f_j\|_\infty = 0$.*

Exercício 15. *Defina e mostre que é completo o espaço normado $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ das curvas parametrizadas contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ onde $n \in \mathbb{N}$.*

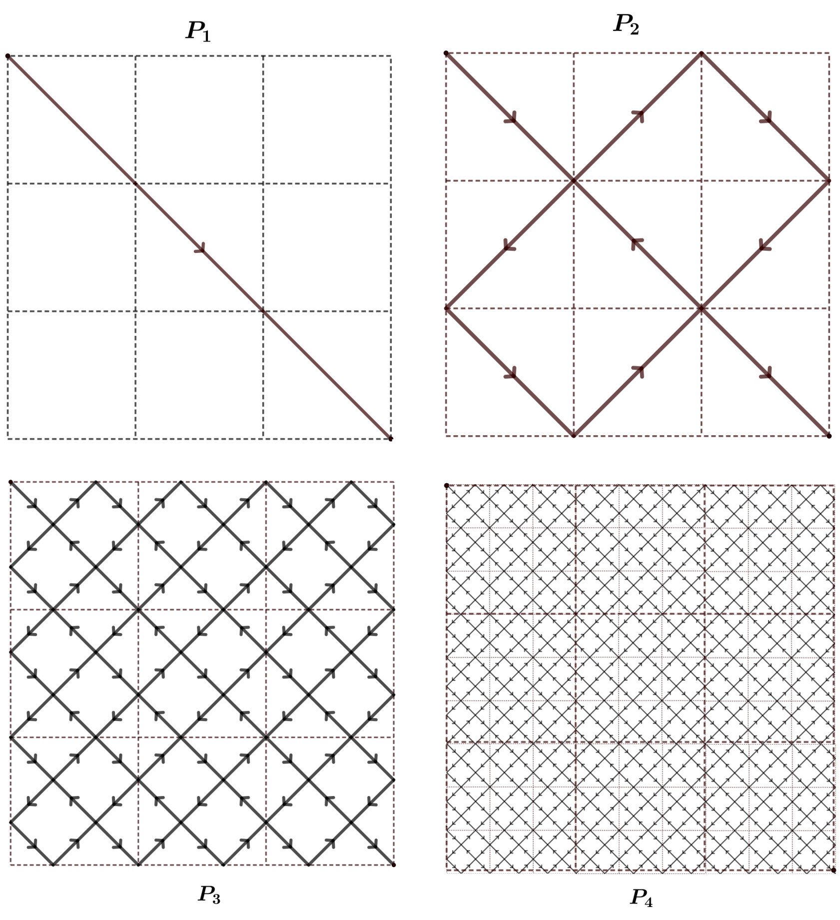
7 A Curva de Peano

A Curva de Peano é uma curva contínua que preenche um quadrado e que é definida como o limite duma sucessão de linhas poligonais $\{P_n\}$, onde P_{n+1} é obtida a partir de P_n substituíndo cada lado de P_n por uma linha poligonal com nove lados e o triplo do comprimento, mas com as mesmas extremidades do lado de P_n.

A primeira a curva P_1 é a diagonal S dum quadrado Q. Para definir P_2 consideramos a partição de Q em nove quadrados iguais, obtida pela divisão de cada lado de Q em três partes iguais. A curva P_2 é uma linha poligonal S^* que começa e termina nos extremos de S mas que no seu trajecto percorre uma diagonal de cada um dos nove sub-quadrados da partição de Q. A figura seguinte ilustra a linha poligonal S^*.



Em geral a linha poligonal P_n é obtida de P_{n-1} substituindo cada lado S de P_{n-1} pela linha poligonal S^* acima descrita. A figura seguinte mostra as primeiras quatro linhas poligonais de Peano P_1, P_2, P_3 e P_4:



Sejam S um segmento de recta e $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ uma parametrização afim de S. Supondo que S tem comprimento $\sqrt{2}\,\ell$, designemos por Q um quadrado de lado ℓ com diagonal S. Seja $S^* = [q_0, q_1, \ldots, q_9]$ a linha poligonal S^* acima descrita formada pelas nove diagonais dos sub-quadrados de Q, começando em $q_0 = f(a)$ e terminando em $q_9 = f(b)$. A curva S^* é parametrizada pela função contínua $f^* : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ cuja restrição a cada intervalo $[a + \frac{(i-1)(b-a)}{9}, a + \frac{i(b-a)}{9}]$ $(1 \leq i \leq 9)$ é dada por

$$f^*(t) := q_{i-1} + \frac{9\,t - (i-1)(b-a)}{b-a}\,(q_i - q_{i-1})$$

Exercício 16. *A função f^* satisfaz:*

(a) $\|f - f^*\|_\infty \leq \ell$;

(b) $L(f^*) = 3\,L(f)$;

(c) $f(a) = f^*(a)$ *e* $f(b) = f^*(b)$;

(d) $\operatorname{dist}((x,y), f^*([a,b])) \leq \ell/3,\ \forall\,(x,y) \in Q$.

Mais geralmente, dada a parametrização contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ duma linha poligonal $P = [q_0, q_1, \ldots, q_m]$, para alguma decomposição $D = (t_0, t_1, \ldots, t_m)$ do intervalo $[a,b]$ temos

$$f(t) = q_{i-1} + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\,(q_i - q_{i-1}) \ \text{ sempre que } \ t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Definimos então a curva contínua $f^+ : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, por

$$f^+(t) = (f|_{[t_{i-1},t_i]})^*(t) \ \text{ sempre que } \ t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Finalmente definimos recursivamente a sucessão de curvas de Peano $\{f_n\}_{n\geq 0}$:

- $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $f_0(t) := (t, 1-t)$;
- $f_n = (f_{n-1})^+,\ \forall\, n \geq 0$.

Proposição 5. *A sucessão de Peano $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ converge para uma curva contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ que satisfaz:*

(a) $f([0,1]) = [0,1]^2$;

(b) $f|_{[t,t']}$ *não é rectificável, i.e.,* $L(f|_{[t,t']}) = +\infty,\ \forall\, 0 \leq t < t' \leq 1$;

(c) $f([t,t])$ *contém um quadrado com área positiva,* $\forall\, 0 \leq t < t' \leq 1$;

Proof. Comecemos por observar que $P_n = f_n([0,1])$ e cada segmento desta linha poligonal é a diagonal dum quadrado com lado $1/3^n$. Pelo Exercício 16, $\|f_0 - f_1\|_\infty \leq 1$. Sendo $D = (t_0, t_1, \ldots, t_N)$ a decomposição de $[0,1]$ em $N = 9^n$ sub-intervalos onde f_n é afim, pelo mesmo exercício $\|f_n|_{[t_{i-1},t_i]} - (f_n|_{[t_{i-1},t_i]})^*\|_\infty \leq 3^{-n}$. Logo

$$\|f_n - f_{n+1}\|_\infty = \|f_n - f_n^+\|_\infty \leq 3^{-n}.$$

Dados $n \geq m$, como

$$\begin{aligned}\|f_m - f_n\|_\infty = \|\sum_{j=m}^{n-1} f_j - f_{j+1}\|_\infty \leq \sum_{j=m}^{n-1} \|f_j - f_{j+1}\|_\infty \leq \sum_{j=m}^{n-1} 3^{-j} \\ \leq \frac{1}{3^m}\,\frac{1}{1-3^{-1}} = \frac{1}{2\cdot 3^{m-1}} \longrightarrow 0 \ \text{ quando } \ m \to \infty\end{aligned}$$

a sucessão de Peano é uma sucessão de Cauchy no espaço completo $\big(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^2), \|\cdot\|_\infty\big)$. Logo existe uma curva contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$.

Todos os vértices da linha poligonal P_n são também vértices da linha poligonal P_{n+1}. Os vértices de P_n são os pontos $f_n(\frac{j}{9^n})$, com $j = 0, 1, \ldots, 9^n$. Do Exercício 16 alínea (c) segue que $f_n(\frac{j}{9^n}) = f_{n+1}(\frac{j}{9^n})$, $\forall\, 0 \leq j \leq 9^n$. Por indução, $f_n(\frac{j}{9^n}) = f_m(\frac{j}{9^n})$, $\forall\, 0 \leq j \leq 9^n$, para todo $m \geq n$. Tomando o limite quando $m \to +\infty$ obtemos $f(\frac{j}{9^n}) = f_n(\frac{j}{9^n})$, $\forall\, 0 \leq j \leq 9^n$.

Todo o ponto $(x,y) \in [0,1]^2$ pertence a um sub-quadrado de lado 3^{-n} cuja diagonal é um dos lados da linha poligonal P_n. Pela observação acima e a alínea (d) do Exercício 16, temos para algum inteiro $0 \leq j_n \leq 9^n$

$$\operatorname{dist}((x,y), f(j_n/9^n)) = \operatorname{dist}((x,y), f_n(j_n/9^n)) < \frac{1}{3^{n+1}}.$$

Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass a sucessão $t_n = j_n/3^n \in [0,1]$ admite um ponto de acumulação $t_* \in [0,1]$. Como para todo o inteiro n,

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}((x,y), f(t_*)) &\leq \operatorname{dist}((x,y), f(j_n/3^n)) + \|f(j_n/3^n) - f(t_*)\| \\ &\leq \frac{1}{3^{n+1}} + \|f(j_n/3^n) - f(t_*)\|\end{aligned}$$

e por continuidade de f o majorante desta desigualdade pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, concluimos que $(x,y) = f(t_*)$ e portanto que $f([0,1]) = [0,1]^2$. Fica assim demonstrada a alínea (a).

Dados $0 \leq t < t' \leq 1$ podemos tomar $n, j \in \mathbb{N}$ tais que $t < \frac{j-1}{9^n} < \frac{j}{9^n} < t'$.

Como $L(f_n|_{[\frac{j-1}{9^n}, \frac{j}{9^n}]}) = \frac{\sqrt{2}}{3^n}$ segue do Exercício 16 alínea (b) que $L(f_{3n}|_{[\frac{j-1}{9^n}, \frac{j}{9^n}]}) = \sqrt{2}\, 3^n$. Logo fazendo $n \to \infty$ obtemos $L(f|_{[t,t']}) = \infty$, o que prova (b).

Analogamente $f([\frac{j-1}{9^n}, \frac{j}{9^n}])$ contem um quadrado de lado 3^{-n}, o que implica (c). $\square$