Métodos Iterativos

1 O Método de Newton Raphson

Muitos problemas matemáticos reduzem-se à resolução duma equação. Expressões como 'equacionar o problema' fazem hoje parte do léxico comum, sendo também aplicadas a problemas não matemáticos. É um facto da vida que mesmo equações associadas a problemas matematicamente bem formulados não podem em geral ser resolvidas explicitamente.

Por exemplo a equação de quinto grau

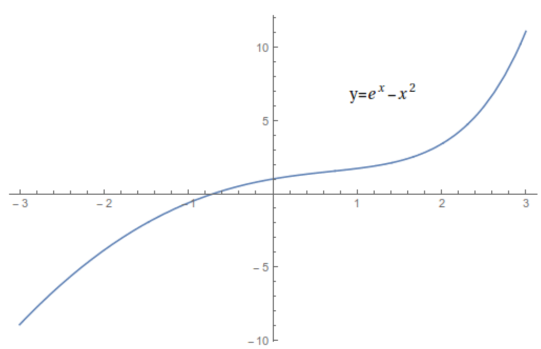
$$x^5 - 3\,x + 1 = 0$$

não pode ser resolvida por radicais. Este facto segue da Teoria de Galois, desenvolvida pelo matemático francês Évariste Galois (1811-1832).

Como segundo exemplo, o matemático francês Josef Liouville (1809-1882) demonstrou que as soluções ($x \in \mathbb{R}$) da equação transcendente

$$e^x = x^\alpha$$

não podem ser expressas em termos de funções elementares do parâmetro α. Chama-se *função elementar* a uma função $f(x)$ duma variável real $x \in \mathbb{R}$ que possa ser obtida como uma composição envolvendo um número finito de operações aritméticas ($+$, $-$, $\times$, $\div$) efectuadas sobre funções da seguinte lista: a função exponencial e^x, a função logarítmo $\log x$, as funções trignométricas $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ e suas inversas $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$.



Os métodos iterativos que vamos agora aflorar permitem não apenas garantir a existência de solução duma equação como também aproximar essas soluções numericamente.

O mais clássico desses métodos é o chamado *Método de Raphson-Newton* desenvolvido pelos matemáticos ingleses Isaac Newton (1642-1726) e Josef Raphson (1648-1715).

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, e consideremos a equação

$$f(x) = 0 \qquad (x \in D) .$$

Um ponto $x_* \in D$ tal que $f(x_*) = 0$ diz-se uma *raíz exacta* desta equação. Chama-se *raíz aproximada* a qualquer ponto $x_0 \in D$ que esteja próximo de uma raíz exacta x_* da equação. A distância $|x_0 - x_*|$ diz-se o *erro de aproximação*. O método de Raphson-Newton serve para encontrar raízes aproximadas da equação $f(x) = 0$ com erros arbitráriamente pequenos.

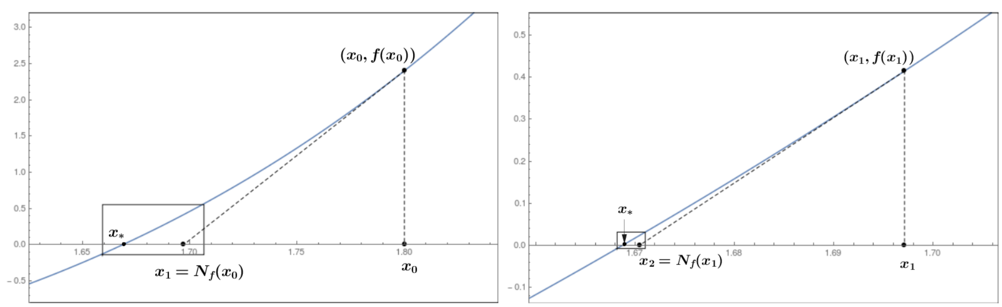
Seja $x_* \in D_f$ uma raíz exacta de $f(x) = 0$, e $x_0 \approx x_*$ uma raíz aproximada. A função afim que melhor aproxima $f(x)$ numa vizinhança de x_0 é o seu polinómio de Taylor de ordem 1,

$$F_{x_0}(x) := f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0).$$

Resolvendo a equação 'aproximada' $F_{x_0}(x) = 0$ no lugar da equação exacta $f(x) = 0$, obtemos

$$F_{x_0}(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} =: N_f(x_0)$$

A raíz desta equação afim $x_1 = N_f(x_0)$ corresponde à intersecção da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ com o eixo das abcissas. Em geral o erro da raíz aproximada x_1 é muito menor do que o erro da aproximação inicial x_0, pelo menos desde que $F_{x_0}(x) \approx f(x)$ seja uma boa aproximação.



A partir do palpite inicial x_0 define-se recursivamente a seguinte sucessão de raízes aproximadas $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = N_f(x_n) \ , \tag{1}$$

onde $N_f(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. A convergência das aproximações $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para a raíz exacta x_* ocorre desde que $f'(x_*) \neq 0$ e o erro da aproximação inicial x_0 seja suficientemente pequeno. Em geral, os erros $|x_n - x_*|$ convergem muito rapidamente para zero.

2 Espaços Métricos

Chama-se *espaço métrico* a um par (X, d) onde X é um conjunto e $d : X \times X \to \mathbb{R}$ uma função, dita a distância ou métrica de X, tal que $\forall\, x, y, z \in X$,

(a) $d(x,y) \geq 0$;

(b) $d(x,y) = d(y,x)$;

(c) $d(x,z) \leq d(x,y) + f(y,z)$;

(d) $d(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y$.

Exemplo 1. *Dado um espaço normado* $(V, \|\cdot\|)$ *e um subconjunto* $X \subset V$*, definindo* $d : X \times X \to \mathbb{R}$*,* $d(x,y) := \|x - y\|$*, o par* (X,d) *é um espaço métrico.*

Exemplo 2. *Dado um conjunto finito* X*, definindo* $d : X \times X \to \mathbb{R}$*,*

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & se \quad x \neq y \\ 0 & se \quad x = y \end{cases}$$

o par (X,d) *é um espaço métrico.*

Num espaço métrico podemos definir vários conceitos topológicos, como o de convergência duma sucessão, o de subconjunto aberto ou o de subconjunto fechado.

Dada uma sucessão $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de X, dizemos que $\{x_n\}$ *converge* para um ponto $a \in X$ e escrevemos $x_n \to a$ se $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, a) = 0$.

Proposição 1 (Unicidade do limite)**.** *Se uma sucessão* $\{x_n\}$ *convergir para* a *e para* b *em* (X,d) *então* $a = b$*.*

Demonstração. Pela desigualdade triangular, item (c) na definição de espaço métrico, temos

$$d(a,b) \leq d(a,x_n) + d(x_n,b) = d(x_n,a) + d(x_n,b).$$

Como $x_n \to a$ e $x_n \to b$, passando ao limite quando $n \to \infty$, obtemos que $d(a,b) = 0$. Finalmente pelo item (d) na definição de espaço métrico inferimos que $a = b$. □

Quando a sucessão $\{x_n\}$ converge para $a \in X$, porque o limite é único, escrevemos

$$a = \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

Um subconjunto $A \subset X$ diz-se aberto em X se para todo $a \in X$ existir $\delta > 0$ tal que a bola $B(a,\delta) := \{x \in X : d(x,a) < \delta\}$ esteja contida em A.

Um subconjunto $A \subset X$ diz-se fechado em X se $A^c := X \setminus A$ for aberto em A.

Exercício 1. *Sejam* (X,d) *um espaço métrico e* $A \subset X$*. Mostre que são equivalentes:*

1. *A é fechado;*

2. *Se para todo* $\delta > 0$*,* $A \cap B(a,\delta) \neq \emptyset$ *então* $a \in A$*;*

3. *Para toda a sucessão* $\{x_n\}$ *de* X*, se* $x_n \to a$ *em* (X,d) *então* $a \in A$*.*

Uma sucessão $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de X, diz-se de *Cauchy* se para todo $\delta > 0$ existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq p \quad \Rightarrow \quad d(x_n, x_m) < \delta.$$

Um espaço métrico (X, d) diz-se *completo* se toda a sucessão de Cauchy $\{x_n\}$ for covergente no espaço (X, d).

Proposição 2. *Sejam $(V, \|\cdot\|)$ um espaço normado completo e $X \subset V$. Então (X, d) é completo se e somente se X for um subconjunto fechado de V.*

Demonstração. Suponhamos que X é um subconjunto fechado do espaço normado $(V, \|\cdot\|)$ e seja $\{x_n\}$ uma sucessão de Cauchy do espaço métrico (X, d). Então $\{x_n\}$ ém é também uma sucessão de Cauchy de $(V, \|\cdot\|)$. Como este espaço normado é completo, a sucessão $\{x_n\}$ converge em V, i.e, existe $a \in V$ tal que $\|x_n - a\| \to 0$. Finalmente, porque X é fechado, concluímos que $a \in X$. Logo $d(x_n, a) = \|x_n - a\| \to 0$, ou seja $x_n \to a$ em (X, d). Isto mostra que o espaço (X, d) é completo.

A implicação recíproca fica como exercício. □

3 Teorema do Ponto Fixo de Banach

Dados um conjunto X e uma aplicação $f : X \to X$, um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = x$ diz-se um *ponto fixo* de f. A equação $f(x) = x$, cujas raízes são os pontos fixos de f diz-se uma equação de ponto fixo.

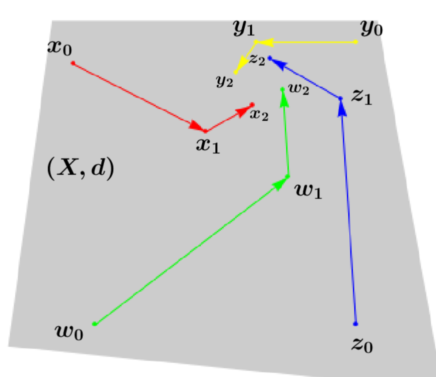
Vamos agora estudar um teorema de ponto fixo abstracto que garante a existência, a unicidade e a aproximabilidade das raízes duma equação de ponto fixo. Este resultado, além de justificar o método de Raphson-Newton tem aplicações inesperadas em contextos bastante gerais.

Uma aplicação $f : X \to X$ diz-se *Lipschitz contínua* se existir $0 < K < \infty$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq K\, d(x, y), \qquad \forall\, x, y \in X.$$

O número K diz-se a *constante de Lipschitz* de f.

Se $0 \leq K < 1$ dizemos que a aplicação f é uma *contracção Lipschitz*.



A Figura acima representa um domínio trapezoidal X que fica invariante por uma aplicação afim $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. A invariância significa que $f(X) \subset X$. A aplicação afim f é contractiva. Além disso os pontos na figura são tais que $f(x_i) = x_{i+1}$, $f(y_i) = y_{i+1}$, $f(z_i) = z_{i+1}$ e $f(w_i) = w_{i+1}$, para $i = 0, 1$.

Dada uma aplicação $f : X \to X$ e um inteiro $n \in \mathbb{N}$ definimos recursivamente as aplicações iteradas $f^n : X \to X$

$$f^1 = f \qquad \text{e} \qquad f^n = f \circ f^{n-1} \quad \forall n \geq 2.$$

Dado $x_0 \in X$, a sucessão $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se a *órbita do ponto* x_0, enquanto os termos $x_n = f^n(x_0)$ desta sucessão se dizem os *iterados* de x_0. Os iterados de x_0 satisfazem a relação recursiva

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad \forall\, n \geq 1.$$

Teorema 1. *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \to X$ uma contracção Lipschitz com constante de Lipschitz $0 < K < 1$. Então f tem um único ponto fixo $x_* = f(x_*)$. Esse ponto fixo $x_* \in X$ satisfaz $\forall\, x_0 \in X$, $n \in \mathbb{N}$,*

$$d(f^n(x_0), x_*) \leq \frac{K^n}{1-K}\, d(x_0, f(x_0)).$$

Em particular, $\forall\, x_0 \in X$, a sucessão dos iterados $f^n(x_0)$ converge para o ponto fixo x_*.

Demonstração. Sejam $x = f(x)$ e $y = f(y)$ dois pontos fixos de f. Então

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq K\, d(x, y)$$

pelo que $(1 - K)\, d(x, y) \leq 0$. Pela condição (a) na definição de espaço métrico temos $(1-K)\, d(x, y) = 0$. Logo, como $1-K > 0$, pela lei do anulamento do produto, $d(x, y) = 0$. Finalmente o item (d) na definição de espaço métrico implica que $x = y$. Logo f tem quando muito um ponto fixo.

Para mostrar a existência dum ponto fixo fixemos $x_0 \in X$ e consideremos a sucessão $x_n = f^n(x_0)$ dos iterados de x_0. Vejamos que esta sucessão $\{x_n\}$ é de Cauchy. Fixados inteiros $n > m$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{j=m}^{n-1} d(x_j, x_{j+1}) = \sum_{j=m}^{n-1} d(f^j(x_0), f^j(f(x_0))) \\ &\leq \sum_{j=m}^{n-1} K^j\, d(x_0, f(x_0)) \leq \sum_{j=m}^{\infty} K^j\, d(x_0, f(x_0)) = \frac{K^m}{1-K}\, d(x_0, f(x_0)). \end{aligned}$$

Logo, como a progressão gemétrica K^m converge para 0, a sucessão $\{x_n\}$ é de Cauchy. Finalmente, porque (X, d) é completo, existe $x_* \in X$ tal que $x_n \to x_*$.

Vejamos que x_* é um ponto fixo. Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(x_*, f(x_*)) &\leq d(x_*, x_n) + d(x_n, f(x_*)) = d(x_*, x_n) + d(f(x_{n-1}), f(x_*)) \\ &\leq d(x_n, x_*) + K\, d(x_{n-1}, x_*) \to 0. \end{aligned}$$

Passando ao limite obtemos $d(x_*, f(x_*)) = 0$, o que implica $x_* = f(x_*)$. Por unicidade do ponto fixo, as sucessões dos iterados de todos os pontos $x_0 \in X$ convergem para o mesmo ponto fixo x_*.

Vimos acima que para $n > m$,

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{K^m}{1-K}\, d(x_0, f(x_0)).$$

Logo, fixando m e fazendo n tender para ∞, obtemos no limite

$$d(x_*, f^m(x_0)) = d(x_*, x_m) \leq \frac{K^m}{1-K}\, d(x_0, f(x_0)),$$

qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Exercício 2. *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série convergente de termos não negativos. Mostre que toda a sucessão* $\{x_n\}$ *num espaço métrico* (X, d) *que satisfaça* $d(x_n, x_{n-1}) \leq a_n$, $\forall\, n \geq 1$, *é de Cauchy.*

Exercício 3. *Seja* $\ell^\infty(\mathbb{N}) := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \colon \exists\, M < \infty$ *tal que* $|x_n| \leq M,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,\}$ *e defina* $\|\cdot\|_\infty \colon \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$,

$$\|\{x_n\}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Mostre que $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ *é um espaço normado completo.*

Exercício 4. *Seja* $\ell^1(\mathbb{N}) := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \colon \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\,\}$ *e defina* $\|\cdot\|_1 \colon \ell^1(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$,

$$\|\{x_n\}\|_1 := \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Mostre que $\left(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1\right)$ *é um espaço normado completo.*

Exercício 5. *Dada* $f : X \to X$ *Lipschitz contínua com constante de Lipschitz* K, *mostre que a aplicação iterada* $f^n : X \to X$ *é também Lipschitz contínua com constante de Lipschitz* K^n.

Exercício 6. *Seja* (X, d) *um espaço métrico completo e suponha que existe um inteiro* $n \geq 1$ *tal que* $f^n : X \to X$ *seja uma contracção Lipschitz. Mostre* f *tem um único ponto fixo* x_* *e que todas as órbitas* $f^n(x_0)$ *convergem para* x_*.

Exercício 7. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$. *Mostre que esta aplicação tem um único ponto fixo* $x_* = f(x_*)$ *e que* $f^n(x_0)$ *converge para* x_*, *qualquer que seja* $x_0 \in \mathbb{R}$.
Sugestão: *Veja que* f^2 *é uma contracção.*

4 Normas de Matrizes

Seja $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais de dimensão $n \times m$, que é um espaço vectorial real de dimensão finita $= n\,m$. Dada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$, definimos

$$\|A\| := \sup_{x\in\mathbb{R}^m, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max\{\|A\,x\| \colon x \in \mathbb{R}^m,\ \|x\| = 1\}.$$

O máximo à direita é também um supremo e a igualdade resulta de se ter

$$\frac{\|A\,x\|}{\|x\|} = \|A\,(x/\|x\|)\| \quad \text{com} \quad \|x/\|x\|\| = 1.$$

A existência desse máximo segue do Teorema de Weierstrass (Princípio do Máximo) sobre máximos de funções contínuas em conjuntos compactos, aplicado à função contínua $f(x) := \|x\|$ na esfera $\{x \in \mathbb{R}^m \colon \|x\| = 1\}$.

Exercício 8. *Mostre que* $(\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ *é um espaço normado completo.*
Sugestão: *Para a completude identifique* $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n\,m}$*, munido da seguinte norma Euclideana: dada* $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$*,*

$$\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2},$$

provando depois a equivalência das duas normas $\|\cdot\|$ *e* $\|\cdot\|_2$*.*

Exercício 9. *Mostre que se* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$*,* $B \in \mathrm{Mat}_{m\times p}(\mathbb{R})$ *e* $x \in \mathbb{R}^m \equiv \mathrm{Mat}_{m\times 1}(\mathbb{R})$

(1) $\|A\,x\| \leq \|A\|\,\|x\|$*,*

(2) $\|A\,B\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

5 Teorema do Valor Médio

Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^m$ diz-se *convexo* se quaisquer que sejam $x, y \in D$,

$$[x, y] := \{x + t\,(y - x) \colon 0 \leq t \leq 1\} \subset D.$$

Proposição 3. *Sejam* $D \subset \mathbb{R}^m$ *um domínio aberto e convexo. Dada uma aplicação* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *de classe* C^1 *tal que* $\|Jf(x)\| \leq K$*, para todo* $x \in D$*, temos* $\forall\, x, y \in B$*,*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\,\|x - y\|.$$

Demonstração. Dados $x, y \in D$ seja $\gamma : [0, 1] \to D$ a curva $\gamma(t) := x + t\,(y - x)$.

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = (f\circ\gamma)'(1) - (f\circ\gamma)'(0) \\ &= \int_0^1 (f\circ\gamma)'(t)\,dt = \int_0^1 Jf(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 Jf(\gamma(t))\cdot(y - x)\,dt \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\|f(y)-f(x)\| &= \|\int_0^1 Jf(\gamma(t))\cdot(y-x)\,dt\| \\ &\leq \int_0^1 \|Jf(\gamma(t))\cdot(y-x)\|\,dt \\ &\leq \int_0^1 \|Jf(\gamma(t))\|\,\|y-x\|\,dt \leq K\,\|x-y\|.\end{aligned}$$

□

6 Justificação do Método de Raphson-Newton

6.1 Uma equação a uma variável

Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, definindo $N_f(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, temos

$$f(x) = 0 \text{ e } f'(x) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_f(x) = x.$$

Um ponto $x_* \in D$ tal que $f(x_*) = 0$ e $f'(x_*) \neq 0$ diz-se uma *raíz simples* da equação $f(x) = 0$. Derivando $N_f(x)$ temos

$$N_f'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)\,f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)\,f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Logo sempre que $x_* \in D$ seja uma raíz simples da equação $f(x) = 0$ temos $N_f(x_*) = 0$, o que implica que $N_f'(x) \approx 0$ perto da raíz $x = x_*$.

Proposição 4. *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^2, $r > 0$ e $0 < k < 1$ tais que:*

(a) A equação $f(x) = 0$ tem uma raíz simples $x = x_* \in D$;

(b) $I := [x_* - r, x_* + r] \subset D$;

(c) $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$;

(d) $|N_f'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$.

Então $\forall\, x_0 \in I$, $x_n = N_f^n(x_0)$ converge para x_* com

$$|x_n - x_*| \leq \frac{k^n}{1-k}\,|x_0 - N_f(x_0)| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange, dados $x, y \in I$ existe c entre x e y tal que

$$|N_f(x) - N_f(y)| = |N_f'(c)|\,|x-y| \leq k\,|x-y|.$$

Logo $N_f : I \to \mathbb{R}$ é uma contracção Lipschitz.

Por outro lado, dado $x \in I$ temos $|x - x_*| \le r$. Logo,

$$\begin{aligned} |N_f(x) - x_*| &= |N_f(x) - N_f(x_*)| \le k\,|x - x_*| \\ &< |x - x_*| \le r, \end{aligned}$$

o que mostra que $N_f(x) \in I$. Vemos assim que $N_f(I) \subseteq I$, ou seja que $N_f : I \to I$ é uma contracção Lipschitz no espaço métrico (I, d) onde $d(x, y) = |x - y|$.

Como I é fechado e $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ é um espaço normado completo, segue que o subespaço métrico (I, d) é completo. As conclusões desta Proposição seguem então do Teorema do Ponto Fixo de Banach. $\square$

Exercício 10. *Mostre que dada $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$de classe C^2 e $0 < k < 1$ existe $r > 0$ tal que as hipóteses (a)-(d), e portanto também as conclusões, da proposição anterior sejam satisfeitas.*

Exercício 11. *Dada $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, $r > 0$ e $L < \infty$ tais que:*

(a) a equação $f(x) = 0$ tem uma raíz simples $x = x_* \in D$;

(b) $I := [x_* - r, x_* + r] \subset D$;

(c) $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$;

(d) $\frac{1}{2}\,|N_f''(x)| \le L$ para todo $x \in I$;

(e) $|x_0 - x_*| < L^{-1}$,

mostre que $\forall\, x_0 \in I$, a sucessão dos iterados $x_n = N_f^n(x_0)$ satisfaz

(1) $|x_{n+1} - x_*| \le L\,|x_n - x_*|^2, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$,

(2) $|x_{n+1} - x_*| \le L^{-1}\,(L\,|x_0 - x_*|)^{2^n}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$,

(3) x_n converge para x_* (a convergência diz-se quadrática).

Sugestão: *Para ver (1) use o seguinte desenvolvimento de Taylor com resto de Lagrange*

$$\begin{aligned} N_f(x) &= N_f(x_*) + \overbrace{N_f'(x_*)}^{=0}\,(x - x_*) + \frac{1}{2}\,N_f''(c)\,(x - x_*)^2 \\ &= x_* + \frac{1}{2}\,N_f''(c)\,(x - x_*)^2, \end{aligned}$$

com c entre x e x_*.

6.2 Sistemas de n equações a n variáveis

Dadas funções $f_1, \ldots, f_n : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2, o seguinte sistema de n equações nas n variáveis $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \qquad \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in D$$

pode ser resumido numa única equação vectorial

$$f(x) = 0 \qquad x \in D,$$

onde $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação com componentes $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Um ponto $x_* \in D$ diz-se uma *raíz* desta equação se $f(x_*) = 0$, e diz-se uma *raíz simples* se além disso $\det Jf(x_*) \neq 0$.

Suponha agora que $x \in D$ é um ponto perto duma raíz simples x_*. Como f é diferenciável em x temos

$$\lim_{u \to x} \frac{f(u) - [f(x) + Jf(x)\,(u - x)]}{\|u - x\|} = 0,$$

limite que se pode também traduzir através da relação

$$f(u) = f(x) + Jf(x)\,(u - x) + o(\|u - x\|) \qquad (u \to x)$$

Resolvendo em ordem a u a equação aproximada

$$f(x) + Jf(x)\,(u - x) = 0$$

obtemos

$$u = x - [Jf(x)]^{-1} f(x) =: N_f(x).$$

Exercício 12. *Nas condições acima, mostre que:*

(a) $f(x*) = 0$ *e* $\det[Jf(x_*)] \neq 0 \;\Leftrightarrow\; N_f(x_*) = x_*$.

(b) $f(x*) = 0$ *e* $\det[Jf(x_*)] \neq 0 \;\Rightarrow\; JN_f(x_*) = 0$.

(c) $x \approx x_*$, x_* *raíz simples* $\;\Rightarrow\; \|JN_f(x)\| \approx 0$.

Sugestão: *Escreva* $N_f(x) := x - B(x)\,f(x)$, *onde* $B(x) := [Jf(x)]^{-1}$, *função de classe* C^1 *com valores matriciais. Se* $x_* \in D$ *for uma raíz simples de* $f(x) = 0$ *então*

$$Jf(x_*) = I - JB(x_*)\,\underbrace{f(x_*)}_{=0} - B(x_*)\,Jf(x_*) = I - I = 0.$$

Exercício 13. *Sejam* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *uma aplicação de classe* C^2, $r > 0$ *e* $0 < k < 1$ *tais que:*

(a) A equação $f(x) = 0$ *tem uma raíz simples* $x = x_* \in D$;

(b) $B := \overline{B}(x_*, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_*\| \leq r\} \subset D$*;*

(c) $\det[Jf(x)] \neq 0$*, para todo* $x \in B$*;*

(d) $\|JN_f(x)\| \leq k$ *para todo* $x \in B$*.*

Então $\forall\, x_0 \in B$*,* $x_n = N_f^n(x_0)$ *converge para* x_* *com*

$$\|x_n - x_*\| \leq \frac{k^n}{1-k}\,\|x_0 - N_f(x_0)\| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$