Variedades

1 Definição e Exemplos

O conceito de *variedade de dimensão k* que vamos agora introduzir é a extensão natural a dimensões superiores dos conceitos de curva (variedade de dimensão 1) e de superfície (variedade de dimensão 2).

Dada uma função de classe C^r, $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^k$, o seu gráfico

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m : x \in U \ \text{ e } \ y = \varphi(x)\}$$

é o protótipo duma variedade de dimensão k e classe C^r. O gráfico X está naturalmente parametrizado pela aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^k \to R^{k+m}$, $f(x) := (x, \varphi(x))$. A dimensão de X é o número de variáveis livres $x = (x_1, \ldots, x_k)$ no domínio U desta parametrização.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se uma *variedade de dimensão k e classe C^r*, onde $1 \leq k \leq n$ e $r \geq 1$, se para todo $p \in X$ existir um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ com $p \in V$ tal que $V \cap X$ seja o gráfico duma função de tipo I e classe C^r, onde $I \subset \{1, \ldots, n\}$ e $\#I = n - k$. Isto significa que $V \cap X$ é o gráfico duma função de classe C^r de $k = n - (n - k)$ variáveis.

Exercício 1. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço afim ou linear de $\mathbb{R}^n$ com dimensão k. Mostre que S é uma variedade de dimensão k.*
Sugestão: *Veja que existe uma matriz $A \in \mathrm{Mat}_{(n-k)\times n}(\mathbb{R})$ com característica $\mathrm{rank}(A) = n-k$ tal que $S = \mathrm{Nuc}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : A\, x = 0\}$. Tome uma matriz A cujas linhas formem uma base de $S^{\perp}$.*

Proposição 1. *Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq k \leq n$, $f : D \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^r. Se*

(a) $X := \{x \in D : f(x) = c\}$ *for não vazio,*

(b) $\forall\, x \in X$, $\mathrm{rank}(J_f(x)) = n - k$

então X é uma variedade de dimensão k e classe C^r.

Demonstração. Dado $p \in X$, como $\mathrm{rank}(J_f(p)) = n - k$ existe $I \subset \{1, \ldots, n\}$ com $\#I = n - k$ tal que $\det(\frac{\partial f}{\partial x_I}(p)) = \det[J_f(p)_I] \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ com $p \in V$ e tal que $V \cap X$ é o gráfico duma função de tipo I e classe C^r. Logo X é uma variedade de dimensão k e classe C^r. $\square$

Exemplo 1. *O conjunto*

$$X := \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \ \left\{ \begin{array}{ll} x^2 + y^2 - z\, w & = 1 \\ x - y + w & = 1 \end{array} \right. \right\}$$

é uma variedade de dimensão 2 *e classe* C^∞.

Demonstração. Consideremos a função $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y, z, w) := (x^2 + y^2 - z\,w, x - y + w)$$

que tem matriz Jacobiana

$$J_f(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -w & -z \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta função é tal que $X = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon f(x, y, z, w) = (1, 1)\}$. Observemos que $\operatorname{rank}(J_f) \geq 1$ porque a segunda linha de J_f nunca se anula. Além disso $\operatorname{rank}(J_f) < 2$ sse todas as submatrizes 2×2 de J_f tiverem determinante nulo, i.e., se

$$x = -y, \quad w = 0 \quad \text{e} \quad 2\,x = -z.$$

Logo

$$C = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon \operatorname{rank}(J_f(x, y, z, w) < 2\} = \{(x, -x, -2\,x, 0) \colon x \in \mathbb{R}\}$$

e como $f(x, -x, -2\,x, 0) = (2\,x^2, 2\,x)$ o conjunto

$$f(C) = \{(2\,x^2, 2\,x) \colon x \in \mathbb{R}\}$$

é uma parábola em $\mathbb{R}^2$. Facilmente se verifica que $(1, 1) \notin f(C)$. Isto implica que $\operatorname{rank}(J_f(x, y, z, w)) = 2$ para todo $(x, y, z, w) \in X$. Por outro lado $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0) \in X$ mostra que X é não vazio. Da Proposição anterior segue que X é uma variedade de classe C^∞ e dimensão $2 = 4 - 2$. □

2 Teorema de Sard

A Proposição 1 leva-nos a perguntar quão frequentemente o conjunto X (das soluções dum sistema de equações não lineares $f(x) = c$) é uma variedade, ou seja satisfaz a hipótese (b) desta proposição. O Teorema de Arthur Sard que iremos enunciar sem demonstração responde a esta pergunta.

Seja $f : D \to \mathbb{R}^{n-k}$ uma função de classe C^r onde D é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq k \leq n$. Um ponto $x \in D$ diz-se um *ponto crítico* de f se $\operatorname{rank}(J_f(x)) = n - k$. No Exemplo 1 todos pontos críticos de $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ são da forma $(x, -x, -2\,x, 0)$.

Um ponto $c \in \mathbb{R}^{n-k}$ diz-se um *valor crítico* de $f : D \to \mathbb{R}^{n-k}$ se existir um ponto crítico $x \in D$ tal que $f(x) = c$. Caso contrário $c \in \mathbb{R}^{n-k}$ diz-se um *valor regular* de f. Todo o ponto $c \notin f(D)$ é automaticamente um valor regular de f.

No Exemplo 1 os valores críticos de $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ são da forma $c = (2\,x^2, 2\,x)$.

Teorema 1 (A. Sard)**.** *Seja $f : D \to \mathbb{R}^{n-k}$ uma aplicação de classe C^r onde $1 \leq k \leq n$ e $r \geq k+1$. Então o conjunto dos valores críticos de f tem medida nula em $\mathbb{R}^{n-k}$, i.e., quase todo o ponto $c \in \mathbb{R}^{n-k}$ é um valor regular de f.*

Corolário 2. *Nas condições do Teorema de Sard, para quase todo $c \in \mathbb{R}^{n-k}$, o conjunto de nível $X = \{x \in D\colon f(x) = c\}$, sendo não vazio, é uma variedade de dimensão k.*

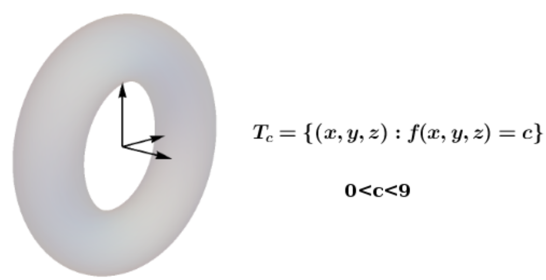
Exercício 2. *Considere $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,0)\colon x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,0)\colon x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^2$, definidas por $f(x,y,z) := (\sqrt{y^2+z^2} - 3)^2 + x^2$ e $g(x,y,z) := (g(x,y,z), z)$.*

(a) Determine os pontos críticos e os valores críticos de f.

(b) Supondo $0 < c < 9$, veja que o conjunto de nível $T_c = \{(x,y,z)\colon f(x,y,z) = c\}$ corresponde à figura em baixo.

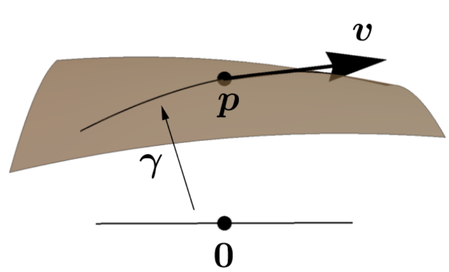
(c) Determine os pontos críticos e os valores críticos de g.

(d) Descreva os conjuntos de nível críticos e regulares de g.



3 Plano Tangente

Dados $p \in X \subset \mathbb{R}^n$, um vector $v \in \mathbb{R}^n$ diz-se *tangente a X no ponto p* se existir uma curva $\gamma :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, de classe C^1 tal que (1) $\gamma(t) \in X, \quad \forall\, t \in]-\delta,\delta[$, (2) $\gamma(0) = p$ e (3) $\gamma'(0) = v$.



O *espaço tangente* a X em $p \in X$ define-se por

$$T_pX := \{v \in \mathbb{R}^n \colon\ v \text{ é tangente a } X \text{ no ponto } p\,\}.$$

Proposição 3. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^k$ um conjunto aberto, $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^r e X o gráfico de φ,*

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \colon x \in U \ \text{ e } \ y = \varphi(x)\,\}.$$

Então $\forall\,(p, q) \in X$,

$$T_{(p,q)}X = \{(u, v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \colon v = J_\varphi(p)\,u\,\}.$$

Demonstração. Dado $(u, v) \in T_{(p,q)}X$ existe uma curva $\gamma :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, tal que $\gamma(t) \in X$, i.e., $\beta(t) = \varphi(\alpha(t))$ para todo $t \in]-\delta, \delta[$, $\gamma(0) = (\alpha(0), \beta(0)) = (p, q)$ e $\gamma'(0) = (\alpha'(0), \beta'(0)) = (u, v)$. Derivando na variável t obtemos

$$\beta'(t) = J_\varphi(\alpha(t))\,\alpha'(t).$$

Em $t = 0$, $v = \beta'(0) = J_\varphi(p)\,\alpha'(0) = J_\varphi(p)\,u$. Isto prova a inclusão directa $\subseteq$.

Reciprocamente, dado $(u, v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ tal que $v = J_\varphi(p)\,u$, definimos $\gamma :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ pondo $\gamma(t) := (p + t\,u, \varphi(p + t\,u))$. Se $\delta > 0$ for suficientemente pequeno, $p + tu \in U \ \ \forall t \in]-\delta, \delta[$, o que implica que $\gamma(t) \in X \ \ \forall t \in]-\delta, \delta[$. Por definição $\gamma(0) = (p, \varphi(p)) = (p, q)$. Derivando na variável t em $t = 0$ obtemos

$$\gamma'(0) = (u, J_\varphi(p)\,u) = (u.v).$$

Logo $(u, v) \in T_{(p,q)}X$, o que prova a inclusão reciproca $\supseteq$. $\square$

Exercício 3. *Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $f : D \to \mathbb{R}^{n-k}$ uma aplicação de classe C^r e*

$$X := \{x \in D \colon f(x) = c\,\}.$$

Sejam $I \subset \{1, \ldots, n\}$ um conjunto de índices com $\#I = n - k$ e $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ uma função definida implicitamente pela equação $f(x) = c$, i.e.,

$$x_{I^c} \in U \ \text{ e } \ x_I = \varphi(x_{I^c}) \quad \Rightarrow \quad f(x) = c.$$

Mostre que para todo $p \in X$ tal que $p_{I^c} \in U$,

$$J_\varphi(p_{I^c}) = -\left[\frac{\partial f}{\partial x_I}(p)\right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_{I^c}}(p).$$

Conclúa que

$$T_pX = \{v \in \mathbb{R}^n \colon \frac{\partial f}{\partial x_I}(p)\,v_I + \frac{\partial f}{\partial x_{I^c}}(p)\,v_{I^c} = 0\,\} = \{v \in \mathbb{R}^n \colon J_f(p)\,v = 0\,\}.$$

Proposição 4. *Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $f : D \to \mathbb{R}^{n-k}$ uma aplicação de classe C^r e*

$$X = \{x \in D \colon f(x) = c\}$$

um conjunto de nível não vazio associado a um valor regular c de f. Então para todo $p \in X$, $T_pX = \mathrm{Nuc}(J_f(p)) = \{v \in \mathbb{R}^n \colon J_f(p)\, v = 0\}$.

Demonstração. Dado $p \in X$, como c é um valor regular de f temos $\mathrm{rank}(J_f(p)) = n - k$. Logo existe $I \subset \{1, \ldots, n\}$ com $\#I = n - k$ tal que $J_f(p)_I = \frac{\partial f}{\partial x_I}(p)$ é uma matriz invertível. Pelo Teorema da Função Implicita existe $V \subset \mathbb{R}^n$ aberto com $p \in V$ tal que $V \cap X$ é o gráfico duma função de classe C^r de tipo I, i.e.,

$$V \cap X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_{I^c} \in U \ \text{ e } \ x_I = \varphi(x_{I^c})\}$$

onde $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ é uma função de classe C^r definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^k$. Pelo exercício anterior segue que $T_pX = T_p(V \cap X) = \mathrm{Nuc}(J_f(p))$. $\square$

Define-se o plano tangente a uma variedade $X \subset \mathbb{R}^n$ num ponto $p \in X$ como sendo o subespaço afim

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x - p \in T_pX\}.$$

Por definição um ponto x está em P se existir uma curva de classe C^1 em X que no ponto p é tangente à recta definida pelos pontos p e x.

Nas condições da proposição anterior,

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon J_f(p)\,(x - p) = 0\}.$$

A hipótese $\det\left(\frac{\partial f}{\partial x_I}(p)\right) = \det\left[J_f(p)_I\right] \neq 0$ no Teorema da Função Implícita equivale a dizer que o plano tangente a X em p é o gráfico duma função afim de tipo I.