1. Noções Gerais de Grupos e Álgebras de Lie

Designamos por $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ o grupo dos difeomorfismos de classe C^∞ de M em M, e por $\mathfrak{X}^\infty(M)$ a correspondente álgebra de Lie dos campos vectoriais de classe C^∞ tangentes a M. O *parêntesis de Lie* de dois campos $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ define-se por $[X,Y](p) := D_X Y(p) - D_Y X(p)$. O *push-forward* dum campo $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ por um difeomorfismo $f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ define-se por $(f_* X)(p) := D f_{f^{-1}(p)} X(f^{-1}(p))$.

Ex 1-1 Dados $f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, mostre que
(1) $[X,Y] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{tX} \circ e^{sY} = e^{sY} \circ e^{tX}, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$,
(2) $f_* X = X \quad \Leftrightarrow \quad e^{tX} \circ f = f \circ e^{tX}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

A exponencial $\exp(tX) = e^{tX}$ denota o *fluxo* dum campo $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$.

Ex 1-2 Dados $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ e $p_\infty \in M$, mostre que:
(1) $e^{t\,X} p = p,\ \forall\, t \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ X(p) = 0$,
(2) $\lim_{t \to +\infty} e^{t\,X} p = p_\infty \quad \Rightarrow \ X(p_\infty) = 0$.

Seja G um grupo de Lie G. Define-se a *translação esquerda* $L_g : G \to G$, $L_g(h) = g\,h$, e a *translação direita* $R_g : G \to G$, $R_g(h) = h\,g$. Definimos também $\mathcal{G}_L(G) = \{\, L_g \,:\, g \in G \,\}$ e $\mathcal{G}_R(G) = \{\, R_g \,:\, g \in G \,\}$.

Ex 1-3 Dado $f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(G)$, mostre que
(1) $f \in \mathcal{G}_L(G) \quad \Leftrightarrow \quad R_g \circ f = f \circ R_g, \quad \forall g \in G$.
(2) $f \in \mathcal{G}_R(G) \quad \Leftrightarrow \quad L_g \circ f = f \circ L_g, \quad \forall g \in G$.

A *exponencial de* G é a aplicação $\exp_G : T_e G \to G$ definida por $\exp_G(v) := e^{X_v}\, e$, sendo X_v o único campo invariante à direita tal que $X_v(e) = v$. A *representação adjunta* de G é a aplicação $\mathrm{Ad}_G : G \to \mathrm{GL}(T_e G)$ definida por

$$\mathrm{Ad}_G(g)\, v := \frac{d}{dt} \left(g\, \exp_G(t\, v)\, g^{-1} \right)_{t=0} = (D R_{g^{-1}})_g (D L_g)_e\, v\ .$$

A *representação adjunta* da álgebra de Lie $T_e G$ é $\mathrm{ad}_G : T_e G \to \mathrm{gl}(T_e G)$, definida por $\mathrm{ad}_G(v) u := [X_u, X_v](e)$, sendo X_u e X_v os únicos campos invariantes à direita tais que $X_u(e) = u$ e $X_v(e) = v$.

Ex 1-4 Dado um grupo de Lie de dimensão finita G, mostre que quaisquer que sejam $g \in G$, $v, w \in T_e G$,
(1) $\exp_G(\mathrm{Ad}_G(g)\, v) = g\, \exp_G(v)\, g^{-1}$,
(2) $\mathrm{Ad}_G(\exp_G(v)) = e^{\mathrm{ad}_G v}$,
(3) $(D \exp_G)_v\, w = (D L_{\exp_G v})_e\, \eta(\mathrm{ad}_G v)\, w$.

Ex 1-5 Dada uma matriz $A \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ mostre que:
(1) e^{tA} é ortogonal, $\forall\, t \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; A$ é antissimétrica,
(2) e^{tA} é unitária, $\forall\, t \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; A$ é anti-hermítica.

Ex 1-6 Mostre que

$$\exp\begin{bmatrix} 0 & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & t & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! & \cdots & t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & \cdots & t^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & t^{n-3}/(n-3)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} .$$

Ex 1-7 Seja V o espaço dos polinómios $f(x) = a_0 + a_1\, x + \cdots + a_{n-1}\, x^{n-1}$ de grau $\leq n-1$. A derivada define uma transformação linear $D : V \to V$, $D f(x) = f'(x)$. Mostre que $e^{h\,D} f(x) = f(x+h)$. Relacione com o exercício anterior.

Ex 1-8 Diz-se que duas matrizes $P, Q \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{K})$ satisfazem as relações de comutação de Heisenberg $\Leftrightarrow$ $P\,Q - Q\,P = k\,I$, para algum escalar $k \in \mathbb{K}$. Mostre que este é o caso se e somente se $e^{t\,P}\, e^{s\,Q} = e^{t\,s\,k} e^{s\,Q}\, e^{t\,P}$, $\forall\, t, s \in \mathbb{R}$.

Ex 1-9 Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, mostre que a matriz

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

é exponencial duma matriz complexa. Conclua que $\exp : \mathrm{gl}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ é sobrejectiva.

Ex 1-10 Prove a seguinte desigualdade: $\forall\, A, B \in \mathrm{gl}(V)$,

$$\|A^n - B^n\| \leq n\, \max\{\|A\|^{n-1}, \|B\|^{n-1}\}\, \|A - B\| \ .$$

Ex 1-11 Dado um endomorfismo $X \in \mathrm{gl}(V)$, mostre que

$$e^X = \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{1}{n}\, X \right)^n \ .$$

Sugestão: Use a desigualdade do exercício 10 com $A = e^{\frac{1}{n}\, X}$ e $B = I + \frac{1}{n}\, X$. Note que $\|A - B\| = o(1/n)$.

Ex 1-12 (Fórmula do Produto de Trotter) Dados endomorfismos $X, Y \in \mathrm{gl}(V)$, mostre que

$$e^{X+Y} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{1}{n}\,X}\, e^{\frac{1}{n}\,Y} \right)^n \ .$$

Sugestão: Use a desigualdade do exercício 10 com $A = e^{\frac{1}{n}\,(X+Y)}$ e $B = e^{\frac{1}{n}\,X}\, e^{\frac{1}{n}\,Y}$. Note que da fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff segue que $\|A - B\| = o(1/n)$.

Ex 1-13 Seja $\mathfrak{n}$ uma álgebra de Lie formada por matrizes nilpotentes e defina-se $N = \{\, e^X \ : \ X \in \mathfrak{n}\,\}$. Mostre que N é um grupo.

Ex 1-14 Seja N um grupo formado por matrizes unipotentes e $\mathfrak{n}$ a sua álgebra de Lie. Mostre que $\exp : \mathfrak{n} \to N$ é bijectiva.

Ex 1-15 Descreva todas as subálgebras de

$$\mathfrak{n} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} ,$$

e os correspondentes grupos de Lie.

Ex 1-16 Seja G um grupo de Lie. Sendo $A \subseteq G$ um subconjunto conexo denso mostre que G é conexo.

Ex 1-17 Seja G um grupo de Lie. Sendo $A \subseteq G$ um subconjunto abeliano denso mostre que G é abeliano.

Ex 1-18 Seja G um grupo de Lie conexo e $H \trianglelefteq G$ um subgrupo normal discreto Mostre que $H \subseteq \mathrm{Z}(G)$.
Sugestão: Para cada curva $c(t) \in G$ e cada elemento $h \in H$ considere a curva $\gamma(t) = c(t)\, h\, c(t)^{-1} \in H$.

Seja $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$. O produto externo em $\mathbb{R}^3$ define-se por

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2\, v_3 - u_3\, v_2)\, \vec{e_1} - (u_1\, v_3 - u_3\, v_1)\, \vec{e_2} + (u_1\, v_2 - u_2\, v_1)\, \vec{e_3}$$

Considere o disco $\mathbb{D}^3 = \{\, v \in \mathbb{R}^3 \ : \ \|v\| \leq \pi \,\}$. O espaço projectivo real $\mathbb{P}^3$ obtem-se de $\mathbb{D}^3$ identificando os pontos antípodas em $\partial\mathbb{D}^3$.

Ex 2-19 (Grupo SO(3)) Mostre que:

(1) $\mathbb{R}^3$ é uma álgebra de Lie com o produto externo $\times$,
(2) a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{gl}(\mathbb{R}^3) = \mathrm{gl}(3, \mathbb{R})$, $\varphi(x)\, p = x \times p$, é um monomorfismo de álgebras de Lie,
(3) a imagem de φ é álgebra de Lie $\mathrm{so}(3, \mathbb{R}) = \{\, A \in \mathrm{gl}(3, \mathbb{R}) \, : \, A^T = -A \,\}$,
(4) para cada $v \in \mathbb{R}^3$, $e^{\varphi(v)}$ é uma rotação de ângulo $\|v\|$ em torno do eixo gerado por v,
(5) a restrição da aplicação $v \mapsto e^{\varphi(v)}$ a $\mathbb{D}^3$ induz um homeomorfismo entre $\mathbb{P}^3$ e SO(3).

Sugestão: Para (4), fixe uma base ortonormada positiva $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f_3} = v / \|v\|$ e mostre que valem as relações

(1) $e^{\varphi(v)}\, \vec{f_1} = \cos\|v\| \ \vec{f_1} + \sin\|v\| \ \vec{f_2}$
(2) $e^{\varphi(v)}\, \vec{f_2} = -\sin\|v\| \ \vec{f_1} + \cos\|v\| \ \vec{f_2}$
(3) $e^{\varphi(v)}\, \vec{f_3} = \vec{f_3}$

Ex 2-20 (Grupo de Heisenberg) Mostre que

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

é um grupo. Determine a sua álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ e mostre que $\exp : \mathfrak{h} \to H$ é um difeomorfismo. Descreva as classes de conjugação em $\mathfrak{h}$ e em H.

Considere o conjunto de oito matrizes $Q_8 = \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$, onde

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Ex 2-21 Mostre que Q_8 é um subgrupo finito de SU(2) com a seguinte tabela de multiplicação

$\bullet$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$-\mathbf{1}$

Q_8 é conhecido como o *grupo quaterniónico.*

Chama-se *quaternião* a uma combinação linear formal com coeficientes reais destes quatro elementos, i.e., um elemento do espaço vectorial isomorfo a $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{H} = \left\{ a\,\mathbf{1} + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k} = \begin{bmatrix} a+b\,i & c+d\,i \\ -c+d\,i & a-b\,i \end{bmatrix} \;:\; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$. Dado um quaternião $q = a\,\mathbf{1}+b\,\mathbf{i}+c\,\mathbf{j}+d\,\mathbf{k}$, define-se a sua *norma* por $\|q\| := \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$, e o seu *conjugado* por $q^* = a\,\mathbf{1} - b\,\mathbf{i} - c\,\mathbf{j} - d\,\mathbf{k}$.

Ex 2-22 Mostre que

(1) $\mathbb{H}$ é uma subálgebra real de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$,
(2) $\mathbb{H}$ é uma álgebra complexa com a multiplicação $(a+b\,i)\,q := (a\,\mathbf{1}+b\,\mathbf{i})\,q$,
(3) $\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^2$ sendo $a\,\mathbf{1}+b\,\mathbf{i}+c\,\mathbf{j}+d\,\mathbf{k} \mapsto (a+b\,i, c+d\,i)$ um isomorfismo,
(4) Em termos matriciais, q^* é a matriz trans-conjugada de q, $\forall\, q \in \mathbb{H}$,
(5) $q\,q^* = q^*\,q = \|q\|^2\;\mathbf{1}$, $\forall\, q \in \mathbb{H}$,
(6) $\|p\,q\| = \|p\|\;\|q\|$, $\forall\, p,q \in \mathbb{H}$,
(7) $\mathbb{H}$ é uma álgebra de divisão.

A letra usada para denotar a álgebra dos quaterniões homenageia o matemático irlandês R. Hamilton.

Ex 2-23 (Relação entre SO(3) e SU(2)) Mostre que

(1) $\|q\| = 1 \;\Leftrightarrow\; q$ é uma matriz unitária, $\forall\, q \in \mathbb{H}$,
(2) a esfera $\mathbb{S}^3 = \{\, q \in \mathbb{H} \;:\; \|q\| = 1 \,\} = \mathrm{SU}(2)$ é um subgrupo normal do grupo dos quaterniões invertíveis $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} - \{0\}$,
(3) a subálgebra de Lie deste grupo é $E = \{\, b\,\mathbf{i}+c\,\mathbf{j}+d\,\mathbf{k} \in \mathbb{H} \;:\; b,c,d \in \mathbb{R}^3 \,\}$, e é isomorfa a $\mathbb{R}^3$ com o produto externo,
(4) $\mathrm{Ad}(e^q) = e^{\mathrm{ad}_E(q)}$ é uma rotação de ângulo $\|q\|$ no sentido positivo em torno do eixo orientado gerado por $q \in E$,
(5) a imagem da representação adjunta $\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(E)$ é um grupo isomorfo a $\mathrm{SO}(3)$,
(6) o núcleo de $\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(E)$ é o subgrupo $\{-I, I\}$,
(7) $\mathrm{SO}(3) \simeq \mathrm{SU}(2)/\{-I, I\}$,
(8) $\mathrm{so}(3) \simeq \mathrm{su}(2)$.

Ex 2-24 Mostre que toda a subálgebra própria de so(3) tem dimensão um.

Ex 2-25 Mostre que quaisquer duas álgebras de Lie (reais ou complexas) não comutativas de dimensão dois são isomorfas entre si. Conclua que existem duas

classes de isomorfia de álgebras de Lie com dimensão dois, ambas solúveis.
Sugestão: Se $\mathfrak{g}$ é não comutativa, tome (X, Y) base de $\mathfrak{g}$ tal que $Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, normalizando depois X de modo que $(\mathrm{ad}X)\,Y = 2\,Y$.

Ex 2-26 (Subálgebras de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$) Mostre que toda a subálgebra própria de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ tem dimensão um, ou tem dimensão dois e é conjugada à subálgebra $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ por uma matriz em $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Para isso veja que dadas matrizes não nulas $X, Y \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ tais que $(\mathrm{ad}X)\,Y = 2\,Y$, existe $a \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ tal que $X = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} a^{-1}$ e $Y = a \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} a^{-1}$.

Sugestão: Note que toda a matriz de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ é conjugada a uma das matrizes $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, com $a \neq 0$.

Veja que a relação $(\mathrm{ad}X)\,Y = 2\,Y$ implica que $\mathrm{ad}X : \mathrm{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ tenha valores próprios -2, 0 e 2, e portanto que a matriz X seja conjugada a $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Ex 2-27 Determine todas as subálgebras complexas de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

Ex 2-28 O objectivo deste exercício é mostrar que, a menos dum isomorfismo, as únicas álgebras simples tridimensionais são $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ e $\mathrm{su}(2)$. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples de dimensão 3. Mostre que:

(1) Existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathrm{ad}X$ não é nilpotente,
(2) Tomando $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathrm{ad}X$ não é nilpotente, existem $\lambda \in \mathbb{C}$ e $Y, Z \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ tais que $(\mathrm{ad}X)\,Y = \lambda\,Y$, $(\mathrm{ad}X)\,Z = -\lambda\,Z$ e (X, Y, Z) é uma base de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$,
(3) λ é real e $Y, Z \in \mathfrak{g}$, ou então $\overline{\lambda} = -\lambda$, λ imaginário puro e $Z = \overline{Y}$,
(4) $[Y, Z] = \kappa\,X$ com $\kappa \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $\lambda/\kappa \in \mathbb{R}$,
(5) Se λ for real, renormalizando os vectores X, Y, Z conseguimos que $[X, Y] = 2\,Y$, $[X, Z] = -2\,Z$ e $[Y, Z] = X$. Neste caso $\mathfrak{g} \simeq \mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$.
(6) Se $\lambda = i\,\theta$ for imaginário, renormalizando os vectores X, Y, Z conseguimos que $[X, Y] = i\,Y$, $[X, Z] = -i\,Z$ e $[Y, Z] = 2\,i\,X$. Segue que $[X, \mathrm{Re}(Y)] = -\mathrm{Im}(Y)$, $[X, \mathrm{Im}(Y)] = \mathrm{Re}(Y)$ e $[\mathrm{Re}(Y), \mathrm{Im}(Y)] = -X$. Neste caso temos $\mathfrak{g} \simeq \mathrm{so}(3)$.

Sugestões:

(1) pelo teorema de Engel.
(2) Comece por ver que $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}X) = 0$, porque $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Conclua que se $\mathrm{ad}X$ não é nilpotente então é semisimples,
(3) porque $\mathrm{ad}X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é um endomorfismo real,

(4) porque $(\mathrm{ad}X)[Y,Z] = (\lambda - \lambda)\,[Y,Z] = 0$. Se fosse $\kappa = 0$ definindo $\mathfrak{h}$ como o subespaço gerado por Y e Z, se λ for real, ou como o subespaço gerado por $\mathrm{Re}(Y)$ e $\mathrm{Im}(Y)$, se λ for imaginário puro, $\mathfrak{h}$ seria um ideal de $\mathfrak{g}$ contrariando o facto de $\mathfrak{g}$ ser simples.

(5) Considere o isomorfismo

$$X \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad Y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Z \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(6) Considere o isomorfismo

$$X \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{Re}(Y) \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{Im}(Y) \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ex 2-29 Determine os centros dos grupos $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$, $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{K})$ e $\mathrm{SO}(n,\mathbb{K})$ e das respectivas álgebras de Lie $\mathrm{gl}(n,\mathbb{K})$, $\mathrm{sl}(n,\mathbb{K})$, $\mathrm{sp}(n,\mathbb{K})$ e $\mathrm{so}(n,\mathbb{K})$.

Ex 2-30 Mostre que $\mathrm{ad} : \mathrm{gl}(n,\mathbb{K}) \to \mathfrak{Der}(\mathrm{gl}(n,\mathbb{K}))$ preserva a decomposição de Jordan.

3. Álgebras de Lie Semisimples, Solúveis e Nilpotentes

Ex 3-31 Mostre que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é solúvel, resp. nilpotente, sse $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ é solúvel, resp. nilpotente.

Ex 3-32 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com dimensão finita. Mostre que se $\mathfrak{g}$ é solúvel então $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ é nilpotente.

Ex 3-33 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ um seu ideal. Mostre que se $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é nilpotente e para cada $X \in \mathfrak{g}$, $(\mathrm{ad}X)|_{\mathfrak{h}}$ é nilpotente então $\mathfrak{g}$ é nilpotente.

Ex 3-34 Mostre que a menos dum isomorfismo existe uma única álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão três tal que $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = 1$ e $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$.

Ex 3-35 Considere a álgebra de Lie bidimensional $\mathfrak{g}_2$ com base $\{X,Y\}$ definida pela relação $[X,Y] = X$, e a álgebra de Lie tridimensional $\mathfrak{g}_3$ com base $\{X,Y,Z\}$ definida pelas relações $[X,Y] = Z$, $[X,Z] = Y$ e $[Y,Z] = 0$. Mostre que estas álgebras são solúveis mas não são nilpotentes.

Ex 3-36 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra nilpotente. Mostre que $\mathfrak{g}$ tem um ideal de codimensão um.

Ex 3-37 Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra nilpotente e $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ uma subálgebra própria. Mostre que $\mathrm{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{\, X \in \mathfrak{g} \,:\, [X, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h} \,\}$ satisfaz $\mathfrak{h} \subsetneq \mathrm{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.

Ex 3-38 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra semisimples. Mostre que $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{ad}\mathfrak{g}$ é um isomorfismo de álgebras de Lie.

Ex 3-39 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa. Para cada $D \in \mathcal{D}\mathrm{er}(\mathfrak{g})$ define-se

$$\mathfrak{g}_\lambda := \{\, X \in \mathfrak{g} \,:\, \exists\, n \in \mathbb{N} \ \text{tal que} \ (D - \lambda\, I)^n\, X = 0 \,\}, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Mostre que $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subseteq \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$.

Sugestão: Comece por ver que $(D - (\lambda+\mu)\, I)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\, (D - \lambda\, I)^{n-i}\, (D - \mu\, I)^i$.

Ex 3-40 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semisimples (real ou complexa). Mostre que para cada derivação $D \in \mathcal{D}\mathrm{er}(\mathfrak{g})$ a parte semisimples e a parte nilpotente da decomposição de Jordan de D estão ambas em $\mathcal{D}\mathrm{er}(\mathfrak{g})$.
Sugestão: Seja $D = S + N$ a decomposição de Jordan de D e considere a decomposição espectral de D, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(D)} \mathfrak{g}_\lambda$, caracterizada no exercício 39. Se $\mathfrak{g}$ for real esta decomposição deve ser tomada sobre a álgebra complexificada $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Tendo em conta que $S|_{\mathfrak{g}_\lambda} = \lambda\, I$, $\forall\, \lambda \in \mathrm{spec}(D)$, mostre que S é uma derivação em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, e portanto uma derivação em $\mathfrak{g}$.

4. Forma de Killing e Ideais

Ex 4-41 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com dimensão finita. Mostre que se $\mathfrak{g}$ é nilpotente então a sua forma de Killing é identicamente nula.

Ex 4-42 Mostre que:
(1) $\mathrm{B}(X, Y) = 2\, n\, \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(X\, Y)$, $\forall\, X, Y \in \mathrm{sl}(n, \mathbb{K})$,
(2) $\mathrm{B}(X, Y) = (n-2)\, \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(X\, Y)$, $\forall\, X, Y \in \mathrm{so}(n, \mathbb{K})$,
(3) $\mathrm{B}(X, Y) = (2\, n + 2)\, \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(X\, Y)$, $\forall\, X, Y \in \mathrm{sp}(n, \mathbb{K})$.

Sugestão: Em cada caso fixe uma base $(E_{i,j})_{i,j}$ de $\mathfrak{g}$ e verifique as relações $\mathrm{B}(E_{i,j}, E_{i,j}) = c \cdot \mathrm{tr}\{(E_{i,j})^2\}$ na diagonal da forma B, relacionando os valores próprios de $E_{i,j}$ e $\mathrm{ad}(E_{i,j})$.

Ex 4-43 Calcule a forma de Killing, determinando o seu núcleo nos exemplos do exercício 3-35.

Ex 4-44 Para cada uma das álgebras de Lie reais $\mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$ e $\mathrm{so}(n, \mathbb{R})$ fixe uma base, e relativamente a ela calcule o núcleo e os valores próprios da forma de

Killing. Podem as álgebras de Lie tridimensionais $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ e $\mathrm{so}(3,\mathbb{R})$ ser isomorfas? Justifique.

Ex 4-45 Mostre que se $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semisimples então $\mathrm{ad}\mathfrak{g} = \mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$.
Sugestão: Dada $D \in \mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$, como B é não degenerada, existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathrm{B}(X,Y) = \mathrm{tr}(D\,(\mathrm{ad}Y))$, $\forall\, Y \in \mathfrak{g}$. Conclua que $D = \mathrm{ad}X$, mostrando que $\mathrm{B}(D\,Y,Z) = \mathrm{B}((\mathrm{ad}X)\,Y,Z)$, $\forall\, Y,Z \in \mathfrak{g}$. Deve usar as propriedades da forma de Killing B. Comece por observar que $\mathrm{ad}(D\,Y)\,X = [D,\mathrm{ad}Y]\,X$, $\forall\, Y \in \mathfrak{g}$, porque D é uma derivação.

Ex 4-46 (Decomposição de Jordan Abstracta) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semisimples. Mostre que para cada $X \in \mathfrak{g}$ existe um único par de elementos $S, N \in \mathfrak{g}$ tais que:

(1) $X = S + N$,
(2) $[S,N] = 0$,
(3) $\mathrm{ad}S$ é semisimples,
(4) $\mathrm{ad}N$ é nilpotente.

Além disso, $\mathrm{ad}S$ e $\mathrm{ad}N$ podem ser expressos como polinómios em $\mathrm{ad}X$.
Sugestão: Use os exercícios 40 e 45.

Ex 4-47 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Dados $N, X \in \mathfrak{g}$, mostre que se $[N,X] = 0$ e $\mathrm{ad}N$ é nilpotente então $\mathrm{B}(N,X) = 0$.
Sugestão: Os endomorfismos $A = \mathrm{ad}N$ e $B = \mathrm{ad}X$ comutam. Veja que todo o valor próprio de $A\,B$ é produto dum valor próprio de B por um de A.

5. Sistemas de Raízes

Seja Δ um sistema de raízes num espaço Euclideano V.

Um subconjunto $\Delta_+ \subseteq \Delta$ diz-se um *sistema de raízes positivas* sse

(1) $\Delta = -\Delta_+ \cup \Delta_+$ e $-\Delta_+ \cap \Delta_+ = \emptyset$,
(2) $\forall\, \alpha, \beta \in \Delta_+,\ \alpha + \beta \in \Delta \Rightarrow \alpha + \beta \in \Delta_+$.

Uma raiz $\alpha \in \Delta_+$ diz-se *simples* sse não existem raízes $\beta_1, \beta_2 \in \Delta_+$ tais que $\alpha = \beta_1 + \beta_2$.

Um subconjunto $\Pi \subseteq \Delta$ diz-se um *sistema de raízes simples* sse

(1) os elementos de Π formam uma base de V,
(2) $\forall\, \alpha \in \Delta$, se $\alpha = \sum_{\beta\in\Pi} c_\beta\, \beta$ então os coeficientes c_β são inteiros com o mesmo sinal, i.e. são todos ≥ 0, ou todos ≤ 0.

Ex 5-48 Fixe uma base $\phi = (\phi, \dots, \phi_n)$ de V^* e defina $\Delta_+^\phi := \Delta \cap V_+$ onde

$$V_+ = \{ \, v \in V \; : \; \phi_1(v) = \ldots = \phi_{k-1}(v) = 0 \; \text{ e } \; \phi_k(v) > 0 \; \text{ para algum } \; 1 \le k \le n \, \} \, .$$

Mostre que

(1) $V = -V_+ \cup \{0\} \cup V_+$ e $-V_+ \cap V_+ = \emptyset$,
(2) V_+ é um cone convexo,
(3) Δ_+^ϕ é um sistema de raízes positivas.

Ex 5-49 Seja $\Pi = \{\beta_1, \dots, \beta_r\} \subseteq \Delta$ um sistema de raízes simples e $\phi = (\phi, \dots, \phi_r)$ a base dual do espaço V^*, que satisfaz $\phi_i(\beta_j) = \delta_{i,j}, \;\; \forall\, i, j = 1, \dots, r$. Mostre que o sistema de raízes positivas Δ_+^ϕ, definido no exercício 48, admite Π como conjunto de raízes simples.

Ex 5-50 Dados $\alpha, \beta \in \Delta$, seja θ o ângulo entre α e β. Mostre que $\langle \beta, \alpha \rangle \, \langle \alpha, \beta \rangle = 4 \, \cos^2 \theta$. Conclua que $\langle \beta, \alpha \rangle \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Ex 5-51 Mostre que:
(a) se $\alpha \cdot \beta > 0$ então $\alpha - \beta \in \Delta$.
(b) se $\alpha \cdot \beta < 0$ então $\alpha + \beta \in \Delta$.
Sugestão: No caso (a), pelo exercício 50 tem-se $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$ ou $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$. Obtenha $\alpha - \beta$ como uma reflexão conveniente. A alínea (b) segue de aplicar (a) ao par de raízes $(\alpha, -\beta)$.

Ex 5-52 Sejam Δ_+ um sistema de raízes positivas de Δ e Π o correspondente conjunto de raízes simples. Mostre que:

(1) $\alpha - \beta \notin \Delta$ e $\alpha \cdot \beta \le 0, \; \forall\, \alpha, \beta \in \Pi$ com $\alpha \neq \beta$,
(2) $\forall\, \beta \in \Delta_+ \;\; \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Pi$ tais que $\beta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$,
(3) as raízes de Π formam uma base de V.
Em particular, Π é um sistema de raízes simples.

Sugestões:

(1) Use o exercício 51.
(2) Se β não é simples existem raízes $\beta_1, \beta_2 \in \Delta_+$ tais que $\beta = \beta_1 + \beta_2$. Repita o argumento com β_1 e β_2, continuando o processo até obter raízes positivas.
(3) Para ver a independência linear considere uma combinação linear nula $\sum_{i=1}^m x_i \, \alpha_i = 0$ de raízes $\alpha_i \in \Pi$ com coeficientes $x_i \in \mathbb{R} - \{0\}$. Definindo $\beta = \sum_{x_i > 0} x_i \, \alpha_i = -\sum_{x_j < 0} x_j \, \alpha_j$, use a alínea (1) para concluir que $(\beta, \beta) = \sum_{x_j < 0} \sum_{x_i > 0} -x_j \, x_i \, (\alpha_j, \alpha_i) = 0$.

Seja $\Delta_+ \subseteq \Delta$ um sistema de raízes positivas e $\Pi \subset \Delta_+$ o respectivo conjunto das raízes simples. Cada raiz positiva $\alpha \in \Delta_+$ representa-se de modo único como $\alpha = \sum_{\beta\in\Pi} c_\beta\, \beta$, com c_β inteiro ≥ 0. Chama-se *altura* de α ao número inteiro $\mathrm{ht}(\alpha) = \sum_{\beta\in\Pi} c_\beta$.

Vamos designar por $\sigma_\alpha \in \mathrm{O}(V)$ a reflexão em torno do hiperplano ortogonal ao vector $\alpha \in V$, $\sigma_\alpha(\beta) := \beta - \langle \beta, \alpha\rangle\, \alpha$, onde $\langle \beta, \alpha\rangle := 2\, \frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$.

Ex 5-53 Mostre que para cada $\alpha \in \Pi$, a reflexão σ_α induz uma permutação do conjunto $\Delta_+ - \{\alpha\}$.
Sugestão: Tome $\beta \in \Delta_+ - \{\alpha\}$ e veja que $\sigma_\alpha(\beta) \in \Delta_+ - \{\alpha\}$. Escrevendo $\beta = \sum_{\gamma\in\Pi} c_\gamma\, \gamma$ encontre uma componente $c_\gamma > 0$ com $\gamma \neq \alpha$, e use o facto de todas as componentes terem o mesmo sinal para concluir que $\sigma_\alpha(\beta) \in \Delta_+$.

Ex 5-54 Dada uma raiz positiva $\alpha \in \Delta_+$ mostre que existe uma raiz simples $\beta \in \Pi$ tal que $(\alpha, \beta) > 0$.
Sugestão: Escreva $\alpha = \sum_{\beta\in\Pi} c_\beta\, \beta$ e observe que $0 < \|\alpha\|^2 = \displaystyle\sum_{\beta\in\Pi} c_\beta\, (\alpha, \beta)$.

Chama-se *grupo de Weyl* do sistema de raízes Δ ao grupo $\mathcal{W}(\Delta)$ gerado pelas reflexões σ_α com $\alpha \in \Delta$.

Ex 5-55 Mostre que $\mathcal{W}(\Delta)$ é um subgrupo finito de $\mathrm{O}(V)$.
Sugestão: Se $\phi \in \mathcal{W}(\Delta)$ então $\phi(\Delta) = \Delta$.

Ex 5-56 Mostre que para cada transformação ortogonal $\phi \in \mathrm{O}(V)$,

$$\sigma_{\phi(\alpha)} = \phi \circ \sigma_\alpha \circ \phi^{-1}\,, \quad \forall\, \alpha \in V\ .$$

Ex 5-57 Mostre que

(1) o grupo de Weyl é gerado pelas reflexões σ_β com $\beta \in \Pi$,
(2) para cada $\alpha \in \Delta$ existem $\beta \in \Pi$ e $\phi \in \mathcal{W}(\Delta)$ tais que $\alpha = \phi(\beta)$.

Sugestão: Comece por considerar o subgrupo $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}(\Delta)$ gerado pelas reflexões σ_β com $\beta \in \Pi$. Prove que para cada raiz $\alpha \in \Delta_+$ existem $\beta \in \Pi$ e $\phi \in \mathcal{W}'$ tais que $\alpha = \phi(\beta)$. A prova faz-se por indução em $\mathrm{ht}(\alpha)$. Tomando $\beta \in \Pi$ tal que $(\alpha, \beta) > 0$, como no exercício 54, veja que $\sigma_\beta(\alpha)$ é uma raiz positiva tal que $\mathrm{ht}(\sigma_\beta(\alpha)) < \mathrm{ht}(\alpha)$. Aplique então a hipótese de indução a esta raiz. Terminada a indução extenda esta propriedade às raízes negativas. Finalmente, para concluir mostre que $\mathcal{W}(\Delta) \subseteq \mathcal{W}'$. Observe que cada raiz $\alpha \in \Delta$ se pode escrever como $\alpha = \phi(\beta)$ com $\beta \in \Pi$ e $\phi \in \mathcal{W}'$. Use o exercício 56 para ver que o gerador σ_α do grupo de Weyl está em $\mathcal{W}'$.

Chama-se *matriz de Cartan abstracta* a qualquer matriz A quadrada $\ell \times \ell$ que satisfaça

(1) $A_{i,j} \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, \ell,$
(2) $A_{i,i} = 2, \quad \forall\, i = 1, \ldots, \ell,$
(3) $A_{i,j} \leq 0, \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, \ell$ com $i \neq j$,
(4) $A_{i,j} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_{j,i} < 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, \ell,$
(5) existe uma matriz diagonal $D > 0$ tal que $\; D^{-1} A\, D$ é simétrica e definida positiva.

Chama-se a *matriz de Cartan* do sistema de raízes Δ à matriz

$$A = [\, \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \,]_{1 \leq i,j \leq \ell} = \left[2\, \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{\|\alpha_j\|^2} \right]_{1 \leq i,j \leq \ell}$$

onde $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ é uma ordenação do conjunto Π das raízes simples.

Ex 5-58 Mostre que a matriz de Cartan do sistema de raízes Δ é uma matriz de Cartan abstracta.
Sugestão: Para a alínea (5) considere $D = \mathrm{diag}(\|\alpha_1\|, \ldots, \|\alpha_\ell\|)$ e veja que $D^{-1} A\, D = 2 \left[\left(\frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}, \frac{\alpha_j}{\|\alpha_j\|} \right) \right]$ é uma matriz definida positiva.

Ex 5-59 Seja A uma matriz de Cartan abstracta. Mostre que quaisquer que sejam $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, \ell$,

(1) $A_{i,j}\, A_{j,i} < 4$,
(2) $A_{i,j} \in \{0, -1, -2, -3\}$,
(3) $(A_{i,j}, A_{j,i}) \in \{(0,0), (-1,-1), (-1,-2), (-2,-1), (-1,-3), (-3,-1)\}$

Sugestão: Tomando uma matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_\ell)$ segundo a definição de matriz de Cartan abstracta, toda a submatriz 2×2 de $D^{-1} A\, D$ tem determinante positivo.

Ex 5-60 (Sistema de Raízes duma Matriz de Cartan Abstracta) Sejam

(1) A uma matriz de Cartan abstracta $\ell \times \ell$,
(2) $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_\ell)$ uma matriz diagonal positiva tal que $A\, D^2 = D\, (D^{-1} A\, D)\, D = \left[\, A_{i,j}\, d_j^2 \,\right]$ seja simétrica e definida positiva,
(3) $(\cdot, \cdot)$ o produto interno em $\mathbb{R}^\ell$ definido por $(u, v) = u^T A\, D^2\, v$,
(4) $(e_1, \ldots, e_\ell)$ a base canónica de $\mathbb{R}^\ell$,
(5) $\mathcal{W}$ o grupo gerado pelas reflexões σ_{e_i} em torno dos hiperplanos ortogonais aos vectores e_i, para $i = 1, \ldots, \ell$ (relativamente ao produto interno (3)),
(6) $\Delta = \{\, \phi(e_i) \,:\, \phi \in \mathcal{W},\ 1 \leq i \leq \ell \,\}$.

Prove que Δ é um sistema de raízes com grupo de Weyl $\mathcal{W}$ e matriz de Cartan A.
Sugestão: Para ver que $\mathcal{W}$ é um grupo finito mostre primeiro que $\phi(\mathbb{Z}^\ell) = \mathbb{Z}^\ell$, $\forall\, \phi \in \mathcal{W}$. Conclua que $\Delta \subset \mathbb{Z}^\ell$ é também finito. Usando que a matriz A tem coeficientes inteiros, mostre que $\langle \beta, e_i \rangle = 2\, \frac{(\beta, e_i)}{\|e_i\|^2} \in \mathbb{Z}$, qualquer que seja $\beta \in \mathbb{Z}^\ell$,

deduzindo daqui que $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \Delta$. Para ver que nenhum múltiplo de $\alpha \in \Delta$, além de $\pm\,\alpha$, está em Δ mostre que a função máximo divisor comum $\mathrm{mdc} : \mathbb{Z}^\ell - \{0\} \to \mathbb{Z}_+$ é $\mathcal{W}$-invariante, i.e., $\mathrm{mdc}(\phi(\alpha)) = \mathrm{mdc}(\alpha)$, $\forall \phi \in \mathcal{W}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{Z}^\ell$. Conclua que Δ está contido em $\{\, \alpha \in \mathbb{Z}^\ell \,:\, \mathrm{mdc}(\alpha) = 1 \,\}$.

Ex 5-61 Calcule as matrizes de Cartan dos sistemas de raízes A_n $(n \geq 1)$, B_n $(n \geq 2)$, C_n $(n \geq 2)$ e D_n $(n \geq 3)$.

Ex 5-62 Identifique os grupos de Weyl dos sistemas de raízes A_n $(n \geq 1)$, B_n $(n \geq 2)$, C_n $(n \geq 2)$ e D_n $(n \geq 3)$ como grupos de matrizes de permutação ortogonais (i.e., grupos de automorfismos ortogonais no ambiente Euclideano de cada um destes sistemas de raízes).

Ex 5-63 Mostre que $\mathcal{W}(\Delta)$ é um subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(\Delta)$.

Ex 5-64 Determine a ordem do grupo $\mathrm{Aut}(\Delta)$ para cada um dos sistemas de raízes $\Delta = A_1$, $\Delta = A_1 \oplus A_1$, $\Delta = A_2$ e $\Delta = B_2$. Relacione com as ordens encontradas para $\mathcal{W}(\Delta)$ no exercício 62.

6. Decomposição Espacial de Raízes

Ex 6-65 (Existência de Subálgebras de Cartan) Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa semisimples, $H_0 \in \mathfrak{g}$ um elemento regular e

$$\mathfrak{h} = \{\, X \in \mathfrak{g} \,:\, \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } (\mathrm{ad} H_0)^n\, X = 0 \,\}\ .$$

Mostre que $\mathrm{ad} H$ é um endomorfismo semisimples, $\forall\, H \in \mathfrak{h}$.
Sugestão: Admita como provado que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra abeliana maximal. Dado $X \in \mathfrak{h}$, seja $X = S + N$ a decomposição de Jordan abstracta obtida no exercício 46. Justifique que $N, S \in \mathfrak{h}$. Mostre em seguida que $N = 0$ combinando o exercício 47 com o facto de $\mathfrak{h}$ ser B-ortogonal à soma directa de todos os espaços próprios generalizados associados a valores próprios não nulos de $\mathrm{ad} H_0$.

Chama-se *rank* duma álgebra semisimples $\mathfrak{g}$ ao número

$$\mathrm{rank}(\mathfrak{g}) := \min_{X \in \mathfrak{g}} \dim \mathfrak{g}(X, 0)\ .$$

Recorde que um elemento $X \in \mathfrak{g}$ se diz *regular* sse $\dim \mathfrak{g}(X, 0) = \mathrm{rank}(\mathfrak{g})$. Vamos denotar por $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ o conjunto de todos os elementos regulares de $\mathfrak{g}$.

Ex 6-66 (Elementos Regulares) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa semisimples com $\dim(\mathfrak{g}) = n$ e $\mathrm{rank}(\mathfrak{g}) = r$. Mostre que:

(1) existem funções polinomiais $d_j : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$, $r \leq j \leq n-1$ tais que $\forall\, X \in \mathfrak{g}$,

$$\det(\mathrm{ad}X - \lambda\, I) = \lambda^n + d_{n-1}(X)\,\lambda^{n-1} + \ldots + d_r(X)\,\lambda^r \ ,$$

(2) X é regular $\Leftrightarrow$ $d_r(X) \neq 0$,
(3) se X é regular então $d_r(X) = \det(\mathrm{ad}X)|_{\mathfrak{g}'}$, onde $\mathfrak{g}' = \oplus_{\lambda \neq 0}\mathfrak{g}(X, \lambda)$,
(4) o conjunto $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ é aberto denso e conexo.

Sugestão:

(1) Fixe um produto interno e uma base ortonormada $\{E_1, \ldots, E_n\}$ em $\mathfrak{g}$ de modo que o endomorfismo $\mathrm{ad}X$ seja representado pela matriz de coeficientes $a_{i,j}(X) := \langle [X, E_i], E_j \rangle$.
(3) Se X é regular então $\dim \mathfrak{g}' = n - r$. Justifique que $\det\left((\mathrm{ad}X)|_{\mathfrak{g}'} - \lambda\, I_{\mathfrak{g}'}\right) = \lambda^{n-r} + d_{n-1}(X)\,\lambda^{n-r-1} + \ldots + d_r(X)$.
(4) Observe que $d_r : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa. Para ver que $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ é denso veja que $\mathfrak{g} - \mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \{d_j = 0\}$ é um conjunto fechado com interior vazio. A razão de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ ser conexo está no seu complementar ser uma união finita de subvariedades algébricas de codimensão real dois (complexa um), que claramente não podem desconectar o espaço. Para um argumento rigoroso, tome $X, Y \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})$ e considere a função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(\lambda) = d_r(\lambda\, X + (1-\lambda)\, Y)$. Procure então um caminho ligando 0 a 1 no plano complexo ao longo do qual $f(\lambda) \neq 0$.

Dada uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, dizemos que $H \in \mathfrak{h}$ é *regular* em $\mathfrak{h}$ sse $\dim \mathfrak{g}(H, 0) = \min_{X \in \mathfrak{h}} \dim \mathfrak{g}(X, 0)$. Seja $\mathcal{R}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}) = \{\, X \in \mathfrak{h} \,:\, X \text{ é regular em } \mathfrak{h} \,\}$.

Ex 6-67 (Elementos Regulares numa Subálgebra de Cartan) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa semisimples e $\mathfrak{h}$ uma sua subálgebra de Cartan. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}'$ com $\mathfrak{g}' = \oplus_{\alpha \in \Delta}\mathfrak{g}_\alpha$ a decomposição espacial das raízes de $\mathfrak{g}$ associada à subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$. Mostre que

(1) $\mathcal{R}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ é um aberto denso em $\mathfrak{h}$,
(2) $\mathfrak{g}(H, 0) = \mathfrak{h}$, $\forall\, H \in \mathcal{R}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$,
(3) $(\mathrm{ad}H)|_{\mathfrak{g}'} : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}'$ é invertível, $\forall\, H \in \mathcal{R}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$.

Sugestão: Comece por ver que $S = \{\, H \in \mathfrak{h} \,:\, \alpha(H) \neq 0, \forall\, \alpha \in \Delta \,\}$ é aberto e denso. Mostre em seguida que

(a) $\mathfrak{g}(H, 0) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta, \alpha(H) = 0} \mathfrak{g}_\alpha$, $\forall\, H \in \mathfrak{h}$,
(b) $\mathfrak{g}(H, 0) = \mathfrak{h} \ \Leftrightarrow\ H \in S$, $\forall\, H \in \mathfrak{h}$,
(c) $(\mathrm{ad}H)|_{\mathfrak{g}'} : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}'$ é invertível, $\forall\, H \in S$,
(d) $\mathcal{R}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}) = S$.

Define-se $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \Gamma(\mathrm{ad}\mathfrak{g})$, o subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ gerado por $e^{\mathrm{ad}X}$ com $X \in \mathfrak{g}$. Os automorfismos em $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ dizem-se *interiores*. Duas subálgebras $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ dizem-se *conjugadas* sse existir $\phi \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ tal que $\mathfrak{h}_2 = \phi(\mathfrak{h}_1)$.

Para cada subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ seja

$$\mathcal{S}(\mathfrak{h}) := \{\, \phi(H) \,:\, \phi \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g}),\ H \in \mathcal{R}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}) \,\} \,.$$

Designamos por $\varphi_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{g} \times \mathcal{R}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}$ a aplicação $\varphi_{\mathfrak{h}}(Y, H) = e^{\mathrm{ad}Y}\, H$.

Ex 6-68 Mostre que para cada $X \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(X, 0)$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ tal que $X \in \mathcal{S}(\mathfrak{h})$.

Ex 6-69 Sejam $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$. Mostre que
(1) se $\mathfrak{h}_1$ é conjugada a $\mathfrak{h}_2$ então $\mathcal{S}(\mathfrak{h}_1) = \mathcal{S}(\mathfrak{h}_2)$,
(2) se $\mathfrak{h}_1$ não é conjugada a $\mathfrak{h}_2$ então $\mathcal{S}(\mathfrak{h}_1) \cap \mathcal{S}(\mathfrak{h}_2) = \emptyset$.

Ex 6-70 Mostre que se $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é uma subálgebra de Cartan então $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$ é aberto.
Sugestão: Observe que $\varphi_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g} \times \mathcal{R}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})) \subseteq \mathcal{S}(\mathfrak{h})$. Fixado $X \in \mathcal{R}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$, mostre que $D\varphi_{(0,X)}(Y, H) = [Y, X] + H$, $\forall\, Y \in \mathfrak{g}$, $H \in \mathfrak{h}$, para concluir, usando o exercício 67, que esta derivada é sobrejectiva. Deduza que $X = \varphi_{\mathfrak{h}}(0, X)$ é interior a $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$.

Ex 6-71 (Unicidade das Subálgebras de Cartan) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa semisimples. Mostre que quaisquer duas subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$ são conjugadas.
Sugestão: Use os exercícios 68, 69 e 70 para obter uma partição aberta do conjunto conexo $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$.

Ex 6-72 Mostre que se $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semisimples então $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$, onde $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ representa a componente conexa da identidade em $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.
Sugestão: Use o exercício 45. Observe que $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ é gerado pelos automorfismos da forma e^D com $D \in \mathcal{D}\mathrm{er}(\mathfrak{g})$, porque $\mathcal{D}\mathrm{er}(\mathfrak{g})$ é a álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$.

Ex 6-73 Justifique os seguintes isomorfismos:
(1) $\mathrm{so}(4, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$,
(2) $\mathrm{sp}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{so}(5, \mathbb{C})$,
(3) $\mathrm{sl}(4, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{so}(6, \mathbb{C})$.
Explicite bases em correspondência pelo isomorfismo da alínea (1).

Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ diz-se *compacta* sse $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ for um subgrupo compacto de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Veja atrás a definição do grupo $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$.

Ex 6-74 Mostre que se G é um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ é compacta sse $G/\mathrm{Z}(G)$ é compacto. Em particular, se G é compacto então $\mathfrak{g}$ é compacta. Dê exemplos de grupos não compactos cuja álgebra de Lie seja compacta.

Ex 6-75 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semisimples. Mostre que são equivalentes:

(1) $\mathfrak{g}$ é compacta,
(2) $\mathrm{ad}X$ tem valores próprios imaginários puros, $\forall\, X \in \mathfrak{g}$,
(3) $\mathrm{B} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ é definida negativa.

Ex 6-76 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie compacta. Mostre que todos os elementos de $\mathfrak{g}$ são ad-semisimples.
Sugestão: A representação natural do grupo compacto $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ no espaço $\mathfrak{g}$ deixa invariante algum produto interno em $\mathfrak{g}$, de forma que $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ pode ser visto como um subgrupo de $\mathrm{O}(\mathfrak{g})$ e $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ uma subálgebra de $\mathrm{so}(\mathfrak{g})$.

Chama-se subálgebra *toroidal* a qualquer subálgebra compacta e abeliana. Uma subálgebra diz-se *toroidal maximal* sse for maximal para a relação de inclusão entre todas as subálgebras toroidais.

Ex 6-77 Seja $\mathfrak{g}_0$ uma álgebra de Lie real, compacta e semisimples. Mostre que para cada subálgebra toroidal maximal $\mathfrak{t}_0 \subseteq \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0 \oplus i\, \mathfrak{t}_0$ é uma subálgebra de Cartan da álgebra semismiples complexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\, \mathfrak{g}_0$.
Sugestão: A maximalidade de $\mathfrak{t}$, resp. $\mathfrak{t}_0$, pode traduzir-se na implicação $\forall\, Z \in \mathfrak{g}$, $[Z, \mathfrak{t}] = 0 \;\Rightarrow\; Z \in \mathfrak{t}$, resp. $\forall\, X \in \mathfrak{g}_0,\ [X, \mathfrak{t}_0] = 0 \;\Rightarrow\; X \in \mathfrak{t}_0$.

Seja G um grupo de Lie. Chama-se *toro de G* a qualquer subgrupo $T \subseteq G$ que seja abeliano compacto e conexo, i.e., $T \simeq \mathbb{T}^k$ com $k = \dim T$. Chama-se *toro maximal* a qualquer toro de G que seja maximal pela relação de inclusão.

Ex 6-78 Sejam G um grupo de Lie compacto, conexo e semisimples com álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$, e seja $\mathfrak{t}_0 \subseteq \mathfrak{g}_0$ uma subálgebra de Lie. Mostre que são equivalentes:
(1) $\mathfrak{t}_0$ é uma subálgebra toroidal maximal de $\mathfrak{g}_0$,
(2) $T_0 = \exp(i\, \mathfrak{t}_0)$ é um toro maximal de G.

Ex 6-79 Seja $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ um grupo abeliano compacto e complexo. Mostre que G é um grupo finito.
Sugestão: A função $\exp : \mathfrak{g} \to G \subset \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ é holomorfa.

Ex 6-80 Mostre que não existe nenhuma representação não trivial do grupo abeliano compacto e complexo $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus i\,\mathbb{Z})$ em $\mathbb{C}^n$.
Sugestão: Use o exercício 79.

Ex 7-81 Seja G um grupo compacto. Mostre que para quaisquer funções integráveis $f, g \in \mathrm{L}^1(G, dg)$,

$$(a) \qquad \int_G f(y^{-1})\, dy = \int_G f(y)\, dy \;,$$
$$(b) \qquad \int_G f(x\, y^{-1})\, g(y) dy = \int_G f(y)\, g(y^{-1}\, x)\, dy \;,$$

onde dy representa a integração relativa a uma medida de Haar em G.

Ex 7-82 Seja G um grupo compacto. Mostre que $\mathrm{L}^1(G, dg)$, é uma álgebra de involução com as operações:

$$(f * g)(x) := \int_G f(y)\, g(y^{-1}\, x)\, dy \;,$$
$$f^*(x) := \overline{f(x^{-1})} \;.$$

Ex 7-83 Seja G um grupo abeliano compacto. Mostre que toda a representação irredutível Φ de G é unidimensional, e que o seu caracter é um homomorfismo de grupos $\chi_\Phi : G \to \mathbb{S}^1$.

Ex 7-84 Sejam $\Phi : G \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ e $\Phi' : G \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V')$ duas representações unitárias de G. Mostre que dados $g \in G$, $v, u \in V$, $v', u' \in V'$,

(1) $(\Phi(g) \oplus \Phi'(g)\,(v \oplus v'), u \oplus u') = (\Phi(g)\, v, u) + (\Phi'(g)\, v', u')$,
(2) $(\Phi(g) \otimes \Phi'(g)\,(v \otimes v'), u \otimes u') = (\Phi(g)\, v, u)\, (\Phi'(g)\, v', u')$.

Dado um espaço vectorial complexo V , chama-se *operador de conjugação* em V a qualquer automorfismo $\tau \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$ tal que $\tau^2 = \mathrm{id}_V$ e $\tau(\lambda\, v) = \overline{\lambda}\, \tau(v)$, $\forall\, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Por exemplo, a aplicação $\tau : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $\tau(z) = \overline{z}$, é um operador de conjugação em $\mathbb{C}^n$.

Ex 7-85 Extende-se qualquer operador de conjugação $\tau : V \to V$ a um operador $\tau : \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V) \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ definido por $\tau(X) = \tau\, X\, \tau$. Mostre que

(1) esta extensão é um operador de conjugação em $\mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ e um automorfismo (real) de álgebras associativas.
(2) $\tau(A) = \overline{A}$, $\forall\, A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, se $\tau : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ for a conjugação canónica.

Ex 7-86 Sejam V um espaço munido dum produto interno complexo $(\cdot, \cdot)$ e $\Phi : G \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ uma representação unitária. Mostre que:

(1) Existe um operador de conjugação $\tau : V \to V$ tal que
$(\tau(v), \tau(v')) = (v', v)$, $\forall\, v, v' \in V$.

(2) $\Phi^\tau : G \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$, definida por $\Phi^\tau(g) := \tau(\Phi(g))$, é uma representação unitária tal que $(\Phi^\tau(g)\,\tau(v), \tau(v')) = \overline{(\Phi(g)\,v, v')}$, $\forall\, v, v' \in V$.

Ex 7-87 Seja $\mathrm{M}(G)$ o conjunto de todos os coeficientes matriciais dum grupo compacto G. Mostre que:

(1) $\mathrm{M}(G)$ é uma subálgebra da álgebra comutativa $\mathcal{C}(G)$,
(2) $\mathrm{M}(G)$ é invariante por conjugação,
(3) $\mathrm{M}(G)$ é invariante por translações esquerdas e direitas,
(4) $\mathrm{M}(G)$ é invariante pelo operador de involução $f \mapsto f^*$,
(5) $\mathrm{M}(G)$ é um ideal bilateral da álgebra de involução $\mathrm{L}^1(G, dg)$.

Sugestão: Para ver que a convolução (à esquerda ou à direita) dum coeficiente matricial da representação Φ com $h \in \mathrm{L}^1(G, dg)$ é ainda um coeficiente matricial de Φ, exprima essa convolução em função de $M_h = \int_G h(y)\,\Phi(y^{-1})\,dy \in \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$.

Ex 7-88 Seja $f \in \mathrm{L}^2(G, dg)$ tal que $\{\, R_x f \ : \ x \in G \,\}$ gera um subespaço de dimensão finita $V \subset \mathrm{L}^2(G, dg)$. Mostre que este subespaço é formado por coeficientes matriciais.
Sugestão: $f(x) = \langle R_x f, \delta_1 \rangle$ onde δ_1 denota a medida de Dirac em $1 \in G$.

Ex 7-89 Seja $f \in \mathrm{L}^2(G, dg)$ tal que $\{\, L_x f \ : \ x \in G \,\}$ gera um subespaço de dimensão finita $V \subset \mathrm{L}^2(G, dg)$. Mostre que este subespaço é formado por coeficientes matriciais.
Sugestão: Aplique o resultado do exercício anterior a $f \circ i$, onde $i(x) = x^{-1}$.

Ex 7-90 Seja $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ um grupo compacto de matrizes unitárias. Mostre que a álgebra $\mathrm{M}(G)$ dos coeficientes matriciais coincide com:

(1) a álgebra das funções polinomiais nas partes reais e imaginárias dos coeficientes $a_{i,j}$ das matrizes $a \in G$.
(2) a álgebra das funções polinomiais nos coeficientes de a e a^{-1} com $a \in G$.

Sugestão: Para a inclusão directa use o exercício 87, e para a recíproca o exercício 88.

Ex 7-91 Seja $\Phi : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ uma representação dum grupo compacto G. Mostre que $\Phi : \mathrm{L}^1(G, dg) \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$, definida por $\Phi(f) = \int_G f(x)\,\Phi(x)\,dx$, é uma representação da álgebra de involução $(\mathrm{L}^1(G, dg), +, *)$ na C^*-álgebra $(\mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V), +, \circ)$.

Ex 7-92 Seja $\Phi : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ uma representação unitária dum grupo compacto G. Mostre que:

(1) $|\chi_\Phi(g)| \le \chi_\Phi(1)$, $\forall\, g \in G$,

(2) $|\chi_\Phi(g)| = \chi_\Phi(1) \;\Leftrightarrow\;$ para algum $\lambda \in \mathbb{C},\; g = \lambda\, I$.

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa semisimples, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan e $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ a decomposição espacial de raízes de $\mathfrak{g}$ relativa a $\mathfrak{h}$. Para cada raiz $\alpha \in \Delta$ escolhemos elementos $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ e $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ de modo que

(1) $\alpha(H) = \mathrm{B}(H_\alpha, H),\; \forall\, H \in \mathfrak{h}$,
(2) $\mathrm{B}(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$.

Para cada raiz $\alpha \in \Delta$ definimos o subespaço $\mathfrak{s}_\alpha := \mathbb{C}\, H_\alpha \oplus \mathbb{C}\, E_\alpha \oplus \mathbb{C}\, E_{-\alpha}$.

Ex 7-93 Mostre que para quaisquer raízes $\alpha, \beta \in \Delta$,

(1) $\beta(H_\alpha) = \mathrm{B}(H_\alpha, H_\beta)$,
(2) $\mathrm{B}(E_\alpha, E_\beta) = 0$ sempre que $\alpha + \beta \neq 0$,
(3) $(\mathrm{ad}H_\alpha)\, E_\beta = \mathrm{B}(H_\alpha, H_\beta)\, E_\beta$,
(4) $(\mathrm{ad}E_\alpha)\, E_{-\alpha} = H_\alpha$,
(5) $(\mathrm{ad}E_\alpha)\, E_\beta = 0$ sempre que $\alpha + \beta \neq 0$ e $\alpha + \beta \notin \Delta$,
(6) $(\mathrm{ad}E_\alpha)\, E_\beta = \lambda\, E_{\alpha+\beta}$, com $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, sempre que $\alpha + \beta \neq 0$ e $\alpha + \beta \in \Delta$,
(7) $\mathfrak{s}_\alpha$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ isomorfa a $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$.

Sugestão: Em (6) suponha por absurdo que $\lambda = 0$ e considere a α-string maximal $\beta + n\,\alpha$ com $p \leq n \leq q$. Veja que os subespaços $\mathfrak{a}_\alpha = \bigoplus_{n=p}^{q} \mathfrak{g}_{\beta+n\,\alpha}$ e $\mathfrak{b}_\alpha = \bigoplus_{n=p}^{0} \mathfrak{g}_{\beta+n\,\alpha}$ são ambos $\mathrm{ad}(\mathfrak{s}_\alpha)$-invariantes. Calcule os traços de $(\mathrm{ad}H_\alpha)|_{\mathfrak{a}_\alpha}$ e de $(\mathrm{ad}H_\alpha)|_{\mathfrak{b}_\alpha}$ obtendo dois valores distintos para o quociente $\beta(H_\alpha)/\alpha(H_\alpha)$.

Dada uma representação de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$, chama-se *peso* de $\mathfrak{g}$ relativo à subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ a uma forma linear $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tal que existe $v \in V - \{0\}$ com $\varphi(H)\, v = \lambda(H)\, v$ para todo $H \in \mathfrak{h}$. Vamos designar por Λ_φ o conjunto de todos os pesos da representação $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$. Para cada $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ define-se $V_\lambda = \{\, v \in V \;:\; \varphi(H)\, v = \lambda(H)\, v, \forall\, H \in \mathfrak{h}\,\}$. A forma λ é um peso de φ sse $V_\lambda \neq \{0\}$, e quando tal acontece V_λ diz-se o *subespaço próprio do peso* λ.

Ex 7-94 Seja $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ uma representação duma álgebra de Lie complexa semisimples. Mostre que

(1) $\varphi(H)$ é semisimples, $\;\forall\, H \in \mathfrak{h}$,
(2) $\varphi(H_\alpha)$ tem valores próprios inteiros, $\;\forall\, \alpha \in \Delta$,
(3) $V = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_\varphi} V_\lambda$,
(4) $\varphi(H_\alpha)\, V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha},\; \forall\, \lambda \in \Lambda_\varphi,\; \alpha \in \Delta$.

Sugestão: Para cada $\alpha \in \Delta$ considere a representação de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ obtida por restrição de φ a $\mathfrak{s}_\alpha$. Conclua que $\varphi(H_\alpha)$ é semisimples com valores próprios inteiros. Para a última alínea veja que dado $v \in V_\lambda$, se tem $\varphi(E_\alpha)\, v \in V_{\lambda+\alpha}$, usando a relação $\varphi(H)\, \varphi(E_\alpha) = \varphi(E_\alpha)\, \varphi(H) + \varphi([H, E_\alpha])$.

Seja G um grupo de Lie compacto e conexo, e $T \subset G$ um toro maximal. Dada uma representação $\Phi : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$, chama-se *peso de* Φ *relativo a* T a um homomorfismo $\omega : T \to \mathbb{S}^1$, i.e., $\omega \in \widehat{T}$, tal que para algum $v \in V - \{0\}$ se tenha $\Phi(g)\,v = \omega(g)\,v$ para todo $g \in T$. Vamos designar por Λ_Φ o conjunto de todos os pesos da representação $\Phi : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$. Para cada $\omega \in \widehat{T}$ define-se $V_\omega = \{\, v \in V \,:\, \Phi(g)\,v = \omega(g)\,v, \forall\, g \in T \,\}$. A forma ω é um peso de Φ sse $V_\omega \neq \{0\}$, e quando tal acontece V_ω diz-se o *subespaço próprio do peso* ω.

Ex 7-95 Seja $\Phi : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ uma representação dum grupo de Lie compacto, semisimples, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Seja T um toro maximal de G com álgebra de Lie $\mathfrak{t}$. Pelo exercício 77, $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus i\,\mathfrak{t}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\,\mathfrak{g}$. Designemos por $\varphi : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ a extensão complexa de $D\Phi_e : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$. Seja Δ o sistema de raízes de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ relativo a $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ e para cada $\alpha \in \Delta$, seja $H_\alpha \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ o elemento determinado pela relação $\alpha(H) = \mathrm{B}(H_\alpha, H)$, $\forall\, H \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$. Mostre que

(1) $\mathfrak{t} = \{\, H \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \,:\, \mathrm{spec}(\mathrm{ad} H) \subset i\,\mathbb{R} \,\}$,
(2) $i\,H_\alpha \in \mathfrak{t}$, $\forall\, \alpha \in \Delta$,
(3) $\lambda(H) \in i\,\mathbb{R}$, $\forall\, H \in \mathfrak{t}$,
(4) $e^H = 1 \;\Leftrightarrow\; \lambda(H) \in 2\,\pi\,i\,\mathbb{Z}$, $\forall\, \lambda \in \Lambda_\varphi$, $\forall\, H \in \mathfrak{t}$,
(5) cada peso $\lambda \in \Lambda_\varphi$ determina um único peso $\omega_\lambda \in \Lambda_\Phi$ tal que $\omega_\lambda(e^H) = e^{\lambda(H)}$, $\forall\, H \in \mathfrak{t}$. A correspondência $\lambda \mapsto \omega_\lambda$ é uma bijecção entre Λ_φ e Λ_Φ,
(6) a decomposição $V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_\varphi} V_\lambda$ é invariante pela representação Φ,
(7) $\Phi(e^{i\,H_\alpha})\,V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$, $\forall\, \lambda \in \Lambda_\varphi$, $\alpha \in \Delta$.

Sugestão: Para (1) use a compacidade de $\mathfrak{t}$ sem esquecer que $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ é abeliana. (2) e (3) seguem de (1). Para (4) relacione Φ com φ. (5) segue de (4). Para (6) e (7) use o exercício 94.

Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço dos polinómios homogéneos de grau n,

$$p(z) = p(z_1, z_2) = a_0\, z_1^n + a_1\, z_1^{n-1}\, z_2 + \ldots + a_{n-1}\, z_1\, z_2^{n-1} + a_n\, z_2^2$$

nas variáveis z_1, z_2.

Ex 7-96 Prove que a representação $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P}_{2n})$ definida por $\Phi(U)\,p(z) = p(U^{-1}z)$ induz por passagem ao quociente uma representação irredutível de SO(3).

Ex 7-97 Prove que sendo V um espaço vectorial complexo de dimensão par, não existe nenhuma representação irredutível $\Phi : \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$.[1]
Sugestão: Seja $E \subset \mathbb{H}$ o subespaço tridimensional definido no exercício 23. Considere $\Phi : \mathrm{SO}(E) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$. Observe que $\mathrm{ad}_{\mathrm{su}(2)} : \mathrm{su}(2) \to \mathrm{so}(E) \subset \mathrm{gl}(E)$ é um isomorfismo. Seja $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ o gerador canónico da subálgebra de Cartan

[1]Note que $\mathcal{P}_{2n}$ tem dimensão ímpar.

de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$. Mostre que $i\,H \in \mathrm{su}(2)$, $\mathrm{ad}(i\,H) \in \mathrm{so}(E)$, $e^{i\,\pi\,H} = -I$ em $\mathrm{SU}(2)$ e $e^{\pi\,\mathrm{ad}(i\,H)} = I$ em $\mathrm{SO}(E)$. Considerando a representação $\varphi : \mathrm{so}(E)^{\mathbb{C}} \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ obtida por extensão complexa de $D\Phi_I : \mathrm{so}(E) \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$, veja que $\lambda(\mathrm{ad}H)$ é um número ímpar para todo o peso $\lambda \in \Lambda_{\varphi}$.

Ex 7-98 A álgebra dos quaterniões $\mathbb{H} \subset \mathrm{gl}(2,\mathbb{C})$ é uma álgebra associativa de matrizes complexas 2×2. Definindo a aplicação $\Phi : \mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(\mathbb{H})$ por $\Phi(U_1,U_2)(Q) = U_1\,Q\,U_2^{-1}$ mostre que:

(1) $\Phi(U_1,U_2)$ é um automorfismo real da álgebra $\mathbb{H}$, $\forall\,U_1,U_2 \in \mathrm{SU}(2)$,
(2) Φ é uma representação do grupo $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)$,
(3) $\mathrm{Nuc}(\Phi) = \{(I,I),(-I,-I)\}$,
(4) $\varphi = D\Phi_{(I,I)} : \mathrm{su}(2)\times\mathrm{su}(2) \to \mathrm{gl}(\mathbb{H})$ é um isomorfismo, que é dado explicitamente por $\varphi(H_1,H_2)(Q) = H_1\,Q - Q\,H_2$,
(5) a álgebra de Lie $\varphi(\mathrm{su}(2)\times\mathrm{su}(2))$ é isomorfa a $\mathrm{so}(4)$,
(6) o grupo de Lie $\Phi(\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2))$ é isomorfo a $\mathrm{SO}(4)$.

Sugestão: $\mathrm{SU}(2)$ é o grupo dos quaterniões de norma 1.

Ex 7-99 Seja G um grupo semisimples com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Mostre que a representação $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ é irredutível sse $\mathfrak{g}$ é uma álgebra simples.

Ex 7-100 Considerando a representação $\varphi : \mathrm{su}(2)\times\mathrm{su}(2) \to \mathrm{gl}(\mathbb{H})$ do exercício 98, mostre que:

(1) $\mathrm{su}(2)$ é uma forma real compacta de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.
(2) $\mathbb{H}$ é uma forma real de $\mathrm{gl}(2,\mathbb{C})$.
(3) A extensão complexa de $\varphi : \mathrm{su}(2)\times\mathrm{su}(2) \to \mathrm{gl}(\mathbb{H})$ é a representação $\widetilde{\varphi} : \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})\times\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{gl}(\mathrm{gl}(2,\mathbb{C}))$ definida pela mesma fórmula $\widetilde{\varphi}(H_1,H_2)(Q) = H_1\,Q - Q\,H_2$.
(4) Identifique e relacione os pesos de $\widetilde{\varphi}$ com as raízes de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})\times\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.
(5) As representações φ e $\widetilde{\varphi}$ são irredutíveis.