MATEMÁTICA PARA BIÓLOGOS

1. Determine as matrizes ampliadas dos seguintes sistemas de equações lineares:

(a) $\begin{aligned} 3x - 2y &= -1 \\ 4x + 5y &= 3 \\ 7x + 3y &= 2 \end{aligned}$ **(b)** $\begin{aligned} 2x + 2z &= 1 \\ 3x - y + 4z &= 7 \\ 7x + 3y &= 2 \end{aligned}$ **(c)** $\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$

2. Determine os sistemas correspondentes às seguintes matrizes ampliadas:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. **(a)** Usando operações elementares, transforme a matriz ampliada do sistema

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$. Determine a, b e c e deduza então os valores das incógnitas do sistema.

(b) Transforme as matrizes dos seguintes sistemas e obtenha, num dos casos, uma matriz em que são nulos todos os elementos de uma linha (sistema indeterminado) e noutro caso uma matriz em que são nulos todos os elementos de uma linha excepto o último.

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ 4x - 4y + 3z &= 2 \\ 2x - 3y + 2z &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x - 3y + z &= 4 \\ x - 2y + 3z &= 6 \\ 2x - 6y + 2z &= 8 \end{aligned}$$

4. Resolva os seguintes sistemas de equações

(a) $\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -1 \\ x + y - 2z &= -3 \\ 3x - 2y + z &= 2 \end{aligned}$ **(b)** $\begin{aligned} x + 4y - 3z &= -13 \\ 2x - 3y + 5z &= 18 \\ 3x + y - 2z &= 1 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 4 \\ 4x + y - 2z &= -12 \\ 2x - 3y + z &= 7 \end{aligned}$ **(d)** $\begin{aligned} y + x &= 3 \\ z - y &= -1 \\ x + z &= 2 \end{aligned}$

5. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 4x - 6y &= c \end{aligned}$$

(a) Determine c tal que o sistema tenha um número infinito de soluções.
(b) Determine c tal que o sistema não tenha soluções.
(c) É possível encontrar um número c tal que o sistema tenha uma única solução?

6. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= b \\ 2x + y + 2z &= 2 \\ 3x + 3y + az &= 3 \end{aligned}$$

(a) Determine, se existirem todos os valores de a e b para os quais o sistema é possível e determinado.
(b) Determine, se existirem todos os valores de a e b para os quais o sistema é impossível.
(b) Determine, se existirem todos os valores de a e b para os quais o sistema é possível e indeterminado.

7. Resolva os seguintes sistemas de equações

(a) $\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$ **(b)** $2x - 3y + z = 1$

8. Resolva o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 6 \\ 2x + y &= 1 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

9. Numa quinta são criadas, em conjunto, duas espécies diferentes de vacas, que são alimentadas, diariamente, com dois tipos diferentes de rações. Cada vaca da espécie 1 consome, em média, por dia, 5 unidades de ração A e 3 unidades de ração B, enquanto cada vaca da espécie 2 consome 2 unidades de ração A e 4 unidades de ração B. Todos os dias são fornecidos ao dono da quinta 90 unidades da ração A e 96 unidades da ração B. Qual é o número de vacas de cada espécie, criadas, em conjunto, na quinta?

10. Resolva os seguintes sistemas de equações:

(a)
$$\begin{aligned} 2x + 2y + 2z &= 0 \\ -2x + 5y + 2z &= 1 \\ 8x + y + 4z &= -1 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -2 \\ 2x + y &= 1 \\ 3x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= -15 \\ 5x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x + y + 3z &= 11 \\ -6x - 4y + 2z &= 30 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 5x - 2y + 6z &= 0 \\ -2x + y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} x - 2y + z - 4w &= 1 \\ x + 3y + 7z + 2w &= 2 \\ x - 12y - 11z - 16w &= 5 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} 7x + y - 8z &= -5 \\ -4x + 3y + z &= 10 \end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned} x + y + 2z + 3w + 4u &= 0 \\ 2x + 2y + 7z + 11w + 14u &= 0 \\ 3x + 3y + 6z + 10w + 15u &= 0 \end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned} 5x + 3y + 3z &= 2 \\ x + y - z &= 0 \\ 7x + 4y + 5z &= 3 \end{aligned}$$

(i)
$$\begin{aligned} 3x + y + z + w &= 0 \\ 5x - y + z - w &= 0 \end{aligned}$$

11.

(a) Sendo $A = B$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a^2 + 2a & 3 \\ 3 & 4 & |b| \\ 35 & 3/2 & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 35 & 3/2 & -c \end{bmatrix}$$

determine todos os valores reais possíveis de a, b, c e d.

(b) Sendo $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, determine $3A - B$.

12. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 9 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Diga quais as somas que estão definidas: $A+B$, $C+D$, $D+B$, $A+C$ e determine-as.

(b) Diga quais os produtos que estão definidos: BD, CA, AC, DC e determine-os.

(c) Calcule $A(BC)$ e $(AB)C$.

13. Determine (AB) e (BA) onde

(a) $A = [1 \quad 1 \quad 2 \quad -1 \quad -2]$ e $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -3 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$.

14. Considere a seguinte lista de 4 matrizes e 4 vectores. Existem 16 pares distintos de matrizes e vectores. Indique os pares para os quais o produto matriz–vector está definido, os pares para os quais não está e calcule o produto quando possível.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

15. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calcule o terceiro elemento de $A\mathbf{x}$ sem calcular todo o vector $A\mathbf{x}$.

16 Considere as quatro matrizes A, B, C e D do exercício **14**. Existem 16 pares de matrizes, nomeadamente

$$AA, \quad AB, \quad AC, \quad AD, \quad BA, \quad BB, \ldots$$

Indique quais destes produtos fazem sentido como produtos de matrizes? Calcule o produto em cada um destes casos.

17. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e seja $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Determine a terceira coluna da matriz AB, calculando o produto matriz–vector apropriado.

18. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule A^2 e A^3.

19. Para quaisquer três números reais a, b e c, seja $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Determine A^2 e A^3.

20. Para quaisquer três números reais a, b e c, seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$.

(a) Calcule A^2.

(b) Determine todos os possíveis valores de a, b e c tais que $A^2 = B$ onde $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Quantos valores diferentes de a, b e c existem para os quais $A^2 = B$? (As matrizes A aqui calculadas são as *raízes quadradas* da matriz B.)

21. Sejam A e B duas matrizes de ordem n. O *comutador de A e B*, que se denota por $[A, B]$, é definido como sendo a matriz de ordem n, $AB - BA$. Subjacente está o facto de que $AB = BA$ se e só se $[A, B] = 0$. Tem–se também que $AB = BA + [A, B]$.

(a) Calcule $[A, B]$ onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Considere as matrizes A e B da alínea anterior e determine $[A, [A, B]]$.

(c) Usando apenas a propriedade associativa da multiplicação de matrizes, mostre que para quaisquer matrizes A, B e C, de ordem n se tem

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \ .$$

Esta identidade é conhecida como a *Identidade de Jacobi*.

22. Considere o vector $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ de $\mathbf{R}^2$. Determine todos os vectores $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ de $\mathbf{R}^2$ ortogonais a $\mathbf{a}$. Isto significa determinar condições em c e d em termos de a e b que sejam necessárias e suficientes para esta ortogonalidade.

23. O conjunto de todos os vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ em $\mathbf{R}^3$ ortogonais ao vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ é um plano em $\mathbf{R}^3$. Determine uma equação que descreva este plano.

24. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calcule o segundo elemento de $A\mathbf{v}$, usando um produto interno apropriado.

25. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) Para quaisquer $A, B \in M_n$, $AB = BA$.

(b) se $A, B \in M_n$ e $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.

26. Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ a & 1 \end{bmatrix}$. Pretende-se determinar $Q = \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \end{bmatrix}$ tal que $AQ = B$.

(a) Escreva os dois sistemas (de 2 equações a 2 incógnitas) que resultam da equação matricial $AQ = B$.

(b) Determine, caso existam, os valores de a para os quais os sistemas considerados são

i- possíveis e determinados.

ii- indeterminados.

iii- impossíveis.

27. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, calcule

(a) $(A^T)^T$. **(b)** AB. **(c)** $(AB)^T$. **(d)** $B^T A^T$.

28. Seja $A \in M_n$. Mostre que a matriz $B = A + A^T$ é uma matriz simétrica.

29. Verifique que $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é inversa de $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

30. Para quaisquer $a, b \in \mathbf{R}$, seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e seja $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule o produto AB.

(b) Mostre que A é sempre invertível, e determine a matriz inversa.

31. Calcule as inversas das seguintes matrizes onde a, b, c e $k \neq 0$

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. **(b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix}$. **(d)** $A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix}$.

32. Para cada $k \in N$ seja $A_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ k & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Determine para cada valores de k, a matriz A_k é invertível.

(a) Determine a matriz inversa de A_2.

33. Sejam A e B dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

resolva o sistema de equações $AX = B$, invertendo a matriz dos coeficientes.

34. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(a) Mostre que a equação $AX = X$ é equivalente a $(A - I)X = 0$

(b) Use o resultado anterior para determinar X.

(c) Resolva a equação $AX = 4X$.

35. Considere uma população com 4 classes etárias e tal que 70% das fêmeas de classe 0, 50% das de classe 1 e 10% das de classe 2 sobrevivem até ao final da estação reprodutiva seguinte. As fêmeas de classe 1, 2 e 3 têm, em média, respectivamente 1.5, 3.5 e 1,0 crias fêmeas em cada estação reprodutiva. Se, no instante 1 a população for constituída por 1000 fêmeas de idade 0, 500 de idade 1, 200 de idade 2 e 10 de idade 3, determine a matriz de Leslie que descreve a evolução da população de fêmeas e a distribuição de fêmeas nas estações anterior e posterior.

36. Seja $A \in M_2$, a matriz de Leslie de evolução de uma dada população.

(a) Justifique que a_{22} é, necessáriamente, nulo.

(b) Explique o significado da igualdade matricial $AX = Y$ onde $X, Y \in M_{2\times 1}$.

(c) Sendo a população inicial definida por X, como calcularia a população ao fim de 50 estações reprodutivas?

37. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} x - 2y + az &= 2 \\ x + y + z &= 0 \\ 3y + z &= 2 \end{aligned}$$

(a) Determine, se existirem, todos os valores de a para os quais o sistema tenha uma solução única. Indique a solução para todos esses valores.

(b) Determine, se existirem, todos os valores de a para os quais o sistema não tenha soluções.

(c) Determine, se existirem, todos os valores de a para os quais o sistema tenha um número infinito de soluções.

(d) Seja A a matriz dos coeficientes do sistema acima indicado.

i - Determine, se existirem, todos os valores de a para os quais a matriz dos coeficientes A seja invertível. Determine A^{-1} para esses valores.

ii- Determine, se existirem, todos os valores de a para os quais $Ax = 0$ tenha uma única solução.

iii - Determine, se existirem, todos os valores de a e para os quais $Ax = 0$ tenha um número infinito de soluções.

38. Sejam A e B as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine as matrizes inversas de A e B, quando possível.

(b) Determine, caso exista, um vector $b \in R^3$ para o qual $Ax = b$ tenha um número infinito de soluções.

(c) Determine, caso exista, um vector $b \in R^3$ para o qual $Bx = b$ tenha um número infinito de soluções.

(d) Existe um vector $b \in R^3$ para o qual $Bx = b$ seja impossível? Determine um vector $b \in R^3$ nestas condições ou explique por que não existe.

39. Resolvendo um sistema de equações, determine a terceira coluna de A^{-1}, onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

40. Calcule os determinantes das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

41. Determine o valor dos determinantes das seguintes matrizes, com um mínimo de cálculos, usando as propriedades dos determinantes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & -8 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -17 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

42. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$$

(a) Calcule k tal que $|A| = -2$.

(b) Deduza o valor de $|B|$.

(c) Construa uma matriz C da mesma ordem que A e tal que $|C| = -|A|$, usando as propriedades dos determinantes.

(d) Seja $k = 1$. A matriz A é invertível? Determine o conjunto solução do sistema $Ax = 0$.

(e) Seja $k = 1$. Existe um vector $b \in R^3$ para o qual o sistema $Ax = b$ tenha um número infinito de soluções?

43. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 12 & 1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Resolva $Ax = 0$ e descreva geometricamente o conjunto das soluções. Calcule $|A|$.

44. Indique uma interpretação geométrica da aplicação $x \to Ax$ onde A é cada uma das matrizes indicadas

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ **(c)** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

45. Seja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ uma aplicação linear tal que

$$f(\mathbf{e}_1) = (1, 3) \qquad \text{e} \qquad f(\mathbf{e}_2) = (-3, 1).$$

Determine a matriz A_f correspondente à aplicação linear f.

46. Seja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ a aplicação linear induzida pela rotação, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, de um ângulo $\dfrac{\pi}{6}$.

(a) Determine a matriz que representa f.

(b) Determine a imagem do vector $(1, 4)$ através de f.

47. Seja f de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ a aplicação linear dada pela reflexão relativamente à recta $y = x$, seguida da reflexão relativamente à recta $x = 0$. Determine a matriz correspondente a esta aplicação linear.

48. Seja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ a aplicação linear dada pela rotação, em torno da origem, de um ângulo de $\frac{\pi}{3}$, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Seja $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dada pela reflexão relativamente à recta $y = x$.

(a) Determine a matriz $A_{g \circ f}$ correspondente à composição de g com f.

(b) Determine a matriz $A_{f \circ g}$ correspondente à composição de f com g.

49. Determine os valores próprios das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

50. Determine os valores próprios e os vectores próprios das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

51. Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de A linearmente independentes.

(b) Represente $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ como combinação linear de u e v.

(c) Use os resultados que obteve nas alíneas anteriores para calcular $A^8 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

52. Seja $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de A e que u e v são linearmente independentes.

(b) Represente $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ como uma combinação linear de u e v.

(c) Use os resultados que obteve nas alíneas anteriores para calcular $A^{10} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

53. Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule $A^{15} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

54. Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine os valores próprios e respectivos vectores próprios da matriz A.

(b) Determine, se existir, uma matriz P, invertível, tal que $P^{-1}AP = D$ onde D é uma matriz diagonal. Calcule A^{12}.

55. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule os valores próprios de A.

(b) Indique um vector próprio de A.

(c) Determine, se existir, uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = D$ onde D é uma matriz diagonal.

56. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule os valores próprios de A.

(b) Indique um vector próprio de A.

(c) Determine, se existir, uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = D$ onde D é uma matriz diagonal.

57. Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine os valores próprios e respectivos vectores próprios da matriz A.

(b) Determine, se existir, uma matriz P, invertível, tal que $P^{-1}AP = D$ onde D é uma matriz diagonal.

59. Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine todos os valores próprios da matriz A.

(b) A matriz A é diagonalizável?

(c) Determine vectores $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ de R^3 tais que $A\mathbf{v_1} = \mathbf{v_1}$, $A\mathbf{v_2} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ e $A\mathbf{v_3} = -2\mathbf{v_3}$.

59. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine α de modo que a matriz A admita o valor próprio 0 com multiplicidade algébrica 2.

60. Sabe-se que a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

tem os vectores próprios $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Determine os respectivos valores próprios e calcule a, b, c, d, e e f.

61. Sendo A e B matrizes de Leslie determine:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \frac{3}{16} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Os seus valores próprios e vectores próprios.

(b) Um vector populacional (para cada caso) cuja distribuição seja estável.

62. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Determine os valores próprios e vectores próprios de A.

(b) Determine uma matriz invertível P tal que $D = P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal.

(c) Calcule os valores próprios e os vectores próprios de A^{15}.

(d) Calcule A^{15}.

63. Considere a matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determine os valores próprios e vectores próprios de A.

(b) Determine uma matriz P formada com 3 vectores próprios de A linearmente independentes.

(c) Calcule $P^{-1}AP$ e A^5.

(d) Determine a expressão geral de A^n, $n \in N$.

64. Sendo A uma matriz de Leslie e X e Y vectores populacionais

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 70 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 220 \\ 20 \end{bmatrix}$$

(a) Determine os valores próprios e os vectores próprios de A.

(b) Determine uma população cuja distribuição seja estável.

(c) Diagonalize A.

(d) Sendo duas populações (iniciais) definidas pelos vectores X e Y, calcule as distribuições de população, ao fim de 50 estações reprodutivas.

65. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que $\dfrac{4}{3}$ é valor próprio da matriz A e determine os vectores próprios associados a esse valor próprio.

(b) Escolha, justificando, quais dos seguintes vectores populacionais, B, C e D, definem distribuições populacionais estáveis:

$$B = \begin{bmatrix} 160 \\ 80 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(c) Calcule a população ao fim de 100 estações reprodutivas, supondo que a população inicial era definida por um dos vectores B, C ou D, à sua escolha.

66. Seja Ω a região de R^2 limitada superiormente pela parábola $y = x^2$, pelas rectas $x = 0$ e $x = 1$ e pelo eixo das abcissas. Calcule o valor aproximado da área de Ω, usando cinco intervalos de comprimento igual e o ponto médio de cada um dos intervalos.

67. Calcule os seguintes integrais exprimindo-os como a área de uma região

(a) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^3 1+2x\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-3}^0 1+\sqrt{9-x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^1 1-|x|\,dx$

68. Dado que $\displaystyle\int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}a^3$ calcule

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int_{-3}^0 2x^2\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int_1^1 3x^2\,dx$ **(d)** $\displaystyle\int_2^4 (x-2)^2\,dx$

Nos problemas 69 a 71 verifique cada uma das igualdades sem calcular os integrais

69. $\displaystyle\int_0^1 x\,dx \geq \int_0^1 x^2\,dx$

70. $\displaystyle\int_1^2 x\,dx \leq \int_1^2 x^2\,dx$

71. $\displaystyle 0 \leq \int_0^4 \sqrt{x}\,dx \leq 8$

72. Usando as propriedades do integral definido verifique que

$$0 \leq \int_1^3 \log x\,dx \leq 2\log 3$$

73. Para $x > -4$, defina $F(x) = \displaystyle\int_0^x t\sqrt{t+4}\,dt.$

(a) Calcule $F(0)$.

(b) Determine $F'(x)$.

(c) Determine $F'(3)$.

74. Considere as seguintes funções F definidas em R e calcule $F'(x)$ para todo o x pertencente a R

(a) $F(x) = \displaystyle\int_x^0 \cos^2 t\,dt.$

(b) $F(x) = \int_0^{x^3} \log(1+t^2)\,dt$.

(c) $F(x) = \int_1^{\cos x} \sqrt{1+t^2}\,dt$.

(d) $F(x) = \int_{x^2}^{1} t - \sin^2 t\,dt$.

(e) $F(x) = \int_{x^2}^{1} xt - \sin^2 t\,dt$.

(f) $F(x) = \int_0^{x} \frac{e^{x+t}}{t^2+1}\,dt$.

75. Seja f uma função contínua que verifica a igualdade

$$\int_0^x f(t)\,dt = 2x + x\sin x - x^2$$

Calcule $f(\frac{\pi}{3})$. Calcule $f'(\frac{\pi}{3})$.

Nos exercícios 76 a 93 calcule

76. $\int (x^3 - 4x)\,dx$ **77.** $\int (\frac{1}{2}x^5 + 2x^3 - 1)\,dx$ **78.** $\int (\frac{2x^2 - x}{\sqrt{x}})\,dx$

79. $\int (x^{3/5} + x^{5/3})\,dx$ **80.** $\int (x-1)(x+1)\,dx$ **81.** $\int (x-1)^2\,dx$

82. $\int (2e^{3x})\,dx$ **83.** $\int (3e^{-x})\,dx$ **84.** $\int xe^{-x^2}\,dx$

85. $\int e^x(1-e^{-x})\,dx$ **86.** $\int (\sin 2x)\,dx$ **87.** $\int \sin(1-4x)\,dx$

88. $\int \frac{\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx$ **89.** $\int (\tan 2x)\,dx$ **90.** $\int (\sec^2 x + \tan x)\,dx$

91. $\int \frac{4}{1+x^2}\,dx$ **92.** $\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **93.** $\int \frac{5x}{x^2-16}\,dx$

Calcule as seguintes primitivas, utilizando as substituições indicadas:

94. $\int \frac{1}{e^x+1}\,dx \qquad t = e^x$

95. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx \qquad x \in]1, +\infty[\qquad t = \sqrt{x+1}$

96. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx \qquad x \in]\,0, +\infty[\qquad t = 1 + \sqrt{x}$

97. $\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx \qquad t = \tan x$

Calcule

98. $\int x(2x+5)^{10}\,dx$ **99.** $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$ **100.** $\int \frac{1}{\sqrt{2-3x}})\,dx$

101. $\int \frac{4\sqrt{x}}{1+4x}\,dx$ **102.** $\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$ **103.** $\int \frac{e^{3x}+e^{x/2}}{e^x-1}\,dx$

Calcule

104. $\int xe^{2x}\,dx$ **105.** $\int x^2e^{-x}\,dx$ **106.** $\int (\log x)^2\,dx$

107. $\int x^2\log(5x)\,dx$ **108.** $\int \sqrt{x}(\log x)^2\,dx$ **109.** $\int e^x\cos x\,dx$

110. $\int \sin^2 x\,dx$ **111.** $\int x^2\cos x\,dx$ **112.** $\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$

113. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ **114.** $\int \cos^3 x\,dx$ **115.** $\int \sin 3x\,dx$

Calcule

116. $\int x^3\sin x^4\,dx$ **117.** $\int x\arctan x\,dx$

118. $\int (x+1)(x^2+2x+3)^{-1}\,dx$ **119.** $\int x\sqrt{x-1}\,dx$

120. $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$ **121.** $\int \frac{4x^3}{1+x^4}\log(1+x^4)\,dx$

Calcule

122. $\int \frac{1}{(x-3)(x+2)}\,dx$ **123.** $\int \frac{2x-1}{(x+4)(x+1)}\,dx$

124. $\int \frac{1}{x^2-9}\,dx$ **125.** $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$

126. $\int \frac{1}{x^2-4x+4}\,dx$ **127.** $\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx$

128. $\frac{x^2+1}{x^2+3x+2}\,dx$ **129.** $\int \frac{x^3+1}{x^2+3}\,dx$

Calcule

130. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2+4x}}\,dx$ **131.** $\int_1^4 \frac{x^2}{(7+x^3)^{3/4}}\,dx$

132. $\int_0^1 \sin^3(x/2)\,dx$

133. $\int_0^1 e^{\arcsin x}\,dx$

134. $\int_0^{\pi/3} (\sin 2x + \cos 3x)\,dx$

135. $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$

136. $\int_1^2 x^2 \log x\,dx$

137. $\int_0^{\pi/4} e^x \cos x\,dx$

Nos exercícios **138** a **143** calcule a área da região do plano XOY limitada pelas seguintes curvas

138. $y = e^x \qquad y = -x \qquad x = 0 \qquad x = 2$

139. $y = x^2 + 1 \qquad y = 5$

140. $y = \sin x \qquad y = \cos x \qquad x = 0 \qquad x = \frac{\pi}{2}$

141. $y = \sqrt{x} \qquad y = x^2$

142. $y = x^2 \qquad y = (x-2)^2 \qquad y = 0 \qquad x = 0 \qquad x = 2$

143. $x = (y-1)^2 - 1 \qquad x = (y-1)^2 + 1 \qquad y = 0 \qquad y = 2$

144. Considere uma população cujo tamanho no instante t é dado por $N(t)$ e cuja dinâmica é dada pelo problema de valores iniciais

$$\frac{dN}{dt} = e^{-t}$$

(a) Determine $N(t)$ resolvendo o problema de valores iniciais.

(b) Calcule a variação cumulativa no tamanho da população entre $t = 0$ e $t = 5$.

(c) Exprima a variação cumulativa do tamanho da população entre os instantes $t = 0$ e o instante t como um integral.

145. Se $\frac{dl}{dt}$ representar a taxa de crescimento de um organismo no instante t (medido em meses), explique o que representa

$$\int_2^7 \frac{dl}{dt}\,dt$$

146. Determine o valor médio das seguintes funções nos intervalos indicados

(a) $f(x) = x^3, \quad x \in [-1, 1]$.

(b) $f(x) = x^2 - 2x, \quad x \in [0, 2]$.

(c) $f(x) = \sin x, \quad x \in [0, 2\pi]$.

147. Resolva cada uma das seguintes equações

(a) $\frac{dy}{dx} = x + \sin x$, onde $y_0 = 0$ quando $x_0 = 0$.

(b) $\frac{dy}{dx} = e^{-x}$, onde $y_0 = 10$ quando $x_0 = 0$.

(c) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$, onde $y_0 = 1$ quando $x_0 = 0$.

(d) $\frac{dx}{dt} = \cos(t - 3)$, onde $x(3) = 1$.

(e) $\frac{ds}{dt} = \sqrt{3t + 1}$, onde $s(0) = 1$.

148. Suponhamos que o volume $V(t)$ de uma célula no instante t evolui de acordo com a equação $\frac{dV}{dt} = \cos t$ com $V(0) = 5$. Determine $V(t)$.

149. Resolva as seguintes equações diferenciais

(a) $\frac{dy}{dx} = 2(1 - y)$, onde $y_0 = 2$ quando $x_0 = 0$.

(b) $\frac{dx}{dt} = 1 - 3x$, onde $x(-1) = -2$.

(c) $\frac{dN}{dt} = 5 - \frac{1}{2}N$, onde $N(2) = 3$.

(d) $\frac{dh}{ds} = 2h + 1$, onde $h(0) = 4$.

150. Suponhamos que uma população, cujo tamanho no instante t é representado por $N(t)$, evolui de acordo com

$$\frac{dN}{dt} = 0.3N(t) \qquad \text{onde} \qquad N(0) = 20$$

Resolva a equação diferencial indicada e indique o tamanho da população no instante $t = 5$.

151. Suponhamos que uma população, cujo tamanho no instante t é representado por $N(t)$, cresce de acordo com

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{100}N^2 \qquad \text{com} \qquad N(0) = 10$$

onde r é uma constante.

(a) Resolva a equação indicada.

(b) Faça o gráfico de $N(t)$ como função de t para $0 \leq t \leq 10$. Diga o que acontece quando $t \to \infty$ e explique por palavras o significado.

152. Represente por $L(t)$ o comprimento de um determinado peixe no instante t e assuma que o peixe cresce de acordo com a equação

$$\frac{dL}{dt} = k(L_\infty - L(t)) \qquad \text{com} \qquad L(0) = 1$$

onde k e L_∞ são constantes positivas. Um estudo mostrou que o comprimento assimptótico é igual a 123 centímetros e que este peixe precisa de 27 meses para atingir metade do seu comprimento assimptótico.

(a) Use esta informação para determinar as constantes k e L_∞. Sugestão: resolva a equação indicada.

(b) Determine o comprimento do peixe ao fim de 10 meses.

(c) Quanto tempo é necessário para que o peixe atinja 90% do seu comprimento?

153. Resolva as seguintes equações diferenciais

(a) $\frac{dy}{dx} = y(1-y)$ onde $y_0 = 2$ para $x_0 = 0$.

(b) $\frac{dy}{dx} = (1-y)(y-2)$ onde $y(0) = 0$.

(c) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}y^2 - 2y$ onde $y_0 = -3$ para $x_0 = 1$.

(d) $\frac{dy}{dx} = (1+y)^2$.

(e) $\frac{dy}{dx} = (1+y)^3$.

154. Suponhamos que o tamanho de uma população no instante t é representada por $N(t)$ e que $N(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = 0.34N(1 - \frac{N}{200})$$

Resolva esta equação diferencial e determine $\lim_{t\to\infty} N(t)$.

155. Suponhamos que $N(t)$ representa o tamanho de uma população no instante t, que evolui de acordo com

$$\frac{dN}{dt} = 1.5N(1 - \frac{N}{50})$$

(a) Resolva esta equação diferencial com $N(0) = 10$.

(b) Resolva esta equação diferencial com $N(0) = 90$.

(c) Represente gràficamente, no mesmo sistema de coordenadas, as soluções que encontrou nas alíneas anteriores.

(d) Determine $\lim_{t\to\infty} N(t)$ para as soluções que encontrou em (a) e (b).

156. Seja $N(t)$ o tamanho de uma população no instante t. Suponhamos que a população evolui de acordo com a equação logística, que a taxa intrínseca de crescimento é 5 e que a capacidade carregadora é 30.

(a) Determine a equação diferencial que descreve o crescimento desta população.

(b) Sem resolver a equação que encontrou na alínea anterior represente, grãficamente, as curvas solução de $N(t)$ como função de t quando (i) $N(0) = 10$, (ii) $N(0) = 20$ e (iii) $N(0) = 40$.

157. Resolva as seguintes equações diferenciais com as condições indicadas

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y}$ com $y_0 = 1$ se $x_0 = 0$.

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1}$ com $y_0 = 2$ se $x_0 = 0$.

(c) $\frac{dy}{dx} = (y+1)e^{-x}$ com $y_0 = 2$ se $x_0 = 0$.

(d) $\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x-1}$ com $y_0 = 5$ se $x_0 = 2$.

(e) $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y}$ com $x_0 = 2$ se $y_0 = 3$.

158. Considere a equação $\frac{dy}{dx} = y(2-y)$

(a) Determine os pontos de equilíbrio desta equação diferencial.

(b) Discuta a estabilidade dos pontos de equilíbrio.

159. Considere a equação $\frac{dy}{dx} = y(y-1)(y-2)$

(a) Determine os pontos de equilíbrio desta equação diferencial.

(b) Discuta a estabilidade dos pontos de equilíbrio.

160. Determine a aproximação linear de $f(x)$ em $x = 0$.

(a) $f(x) = e^{2x}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

(c) $f(x) = \log(2 + x^2)$

161. Calcule o Polinómio de Taylor de grau n em $a = 0$ das seguintes funções

(a) $f(x) = \cos x$ $\quad n = 5$

(b) $f(x) = x^5$ $\quad n = 6$

(c) $f(x) = \sqrt{(1+x)}$ $\quad n = 3$

162. **(a)** Calcule o Polinómio de Taylor de grau 3 em $a = 0$ para a função $f(x) = \sin x$

(b) Use o resultado obtido na alínea (a) para calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

163. **(a)** Calcule o Polinómio de Taylor de grau 2 em $a = 0$ para a função $f(x) = \cos x$

(b) Use o resultado obtido na alínea (a) para calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$.

164. Mostre que

$$rN(1 - \frac{N}{K}) \quad rN$$

para N próximo de 0. e onde K e r são constantes positivas.