Tópicos de Matemática Finita

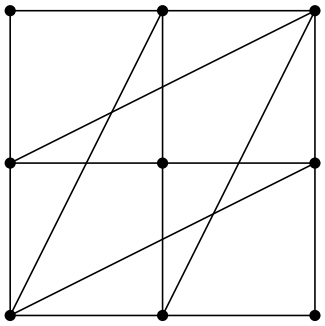
Exame Modelo

I. Perguntas de escolha múltipla

---

1. (1v.)

Considere o grafo G da seguinte figura.



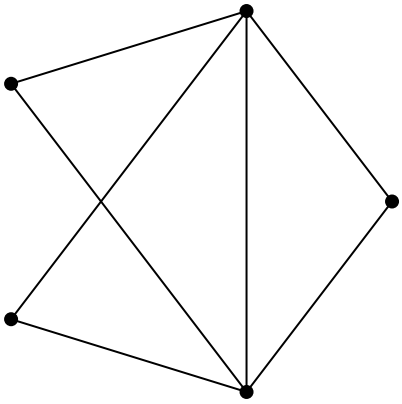
Quais das seguintes afirmações sobre o grafo G são válidas ?

Sim	Não	
○	○	A) G é um grafo bipartido.
○	○	B) G tem ciclos hamiltonianos.
○	○	C) G tem subgrafos que são árvores.
○	○	D) G tem ciclos eulerianos.

---

2. (1v.)

Considere o grafo G da figura seguinte.

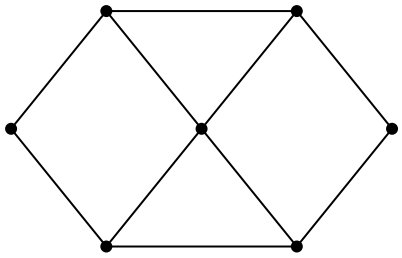


Designemos por $\chi(G)$ e $q(G)$ respectivamente o número e o índice cromáticos de G. Escolha a opção correcta.

○	A) $q(G) = 5$ e $\chi(G) = 3$	○	B) $q(G) = 5$ e $\chi(G) = 4$
○	C) $q(G) = 4$ e $\chi(G) = 4$	○	D) $q(G) = 4$ e $\chi(G) = 3$

(1v.)

3.
Considere o grafo G da seguinte figura.



Quais das seguintes afirmações valem sobre o o subgrafo H, de G, gerado pelos vértices de grau 3 ?

Sim	Não	
○	○	A) H é uma floresta.
○	○	B) H tem ordem 4
○	○	C) H é um grafo conexo.
○	○	D) H tem ciclos de comprimento 3.

(1v.)

4.
Assinale as afirmações correctas.

Sim	Não	
○	○	A) Se todos os vértices de um grafo conexo têm grau 4 então o grafo admite ciclos hamiltonianos.
○	○	B) Se um vértice num grafo simples tem grau 4 então o índice cromático dessegrafo é maior ou igual a 4.
○	○	C) Um grafo de ordem 8 pode ter grafos parciais de ordem 4.
○	○	D) Um grafo simples bipartido não tem ciclos de ordem 5.

(1v.)

5.
Um grafo planar topológico G tem duas faces de grau 3 e três faces de grau 4. Sabendo que G é um grafo simples e regular, i.e. que todos os seus vértices têm o mesmo grau, determine o número V, de vértices de G, e o grau d comum a todos os vértices.

○	A) $V = 8$ e $d = 3$	○	B) $V = 4$ e $d = 6$
○	C) $V = 6$ e $d = 3$	○	D) $V = 6$ e $d = 4$

(1v.)

6.

Seja G um grafo simples, conexo, bipartido, e com todos os vértices de grau 4. Das afirmações seguintes apenas uma é compativel com as hipóteses anteriores. Qual delas?

- ◯ A) G pode ter 9 vértices e 18 arestas.
- ◯ B) G pode ter 8 vértices e 32 arestas.
- ◯ C) G pode ter 8 vértices e 16 arestas.
- ◯ D) G pode ter 9 vértices e 36 arestas.

---

7. (1v.)

Seja G um grafo simples. Designaremos por $k(G)$ o maior inteiro n tal que o grafo completo K_n é isomorfo a um subgrafo de G. O número cromático do grafo G será aqui denotado por $\chi(G)$.

Seja G_n o grafo parcial de K_n que se obtem removendo três arestas unindo três vértices (i.e. um triângulo). Supondo que $n > 3$, qual das seguintes alternativas está correcta?

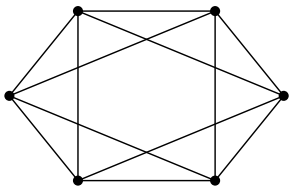
- ◯ A) $k(G_n) = n - 1$ e $\chi(G_n) \leq n - 1$
- ◯ B) $k(G_n) = n - 3$ e $\chi(G_n) \geq n - 3$
- ◯ C) $k(G_n) = n - 1$ e $\chi(G_n) \geq n - 1$
- ◯ D) $k(G_n) = n - 2$ e $\chi(G_n) \geq n - 2$

---

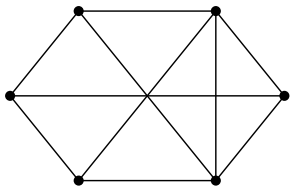
8. (1v.)

Qual dos seguintes gafos não é planar?

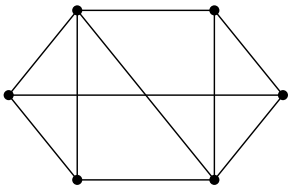
◯ A)



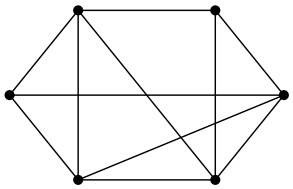
◯ B)



◯ C)



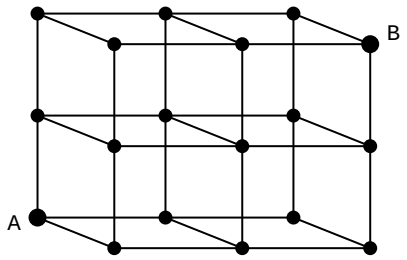
◯ D)



---

9. (1v.)

Considere os dois vértices A e B diametralmente opostos no grafo da figura seguinte.



Este grafo é formado pelos vértices e arestas de um bloco formado por 4 cubos juntos. Quantas cadeias elementares de comprimento 5 existem neste grafo com extremidade inicial A e extremidade final A?

- ◯ A) 30
- ◯ B) 20
- ◯ C) 40
- ◯ D) 10

(1v.)

10.

De quantas maneiras pode escolher uma colecção de 6 cartões postais numa loja que tenha apenas 4 variedades de postais?

- ◯ A) $\frac{9!}{4!\,5!}$
- ◯ B) $\frac{6!}{2!}$
- ◯ C) $\frac{9!}{3!\,6!}$
- ◯ D) $\frac{6!}{2!\,4!}$

(1v.)

11.

Quatro urnas contêm cada uma 45 bolas numeradas de de 1 a 45. Uma bola é extraída aleatoriamente de cada urna. Qual dos seguintes acontecimentos tem probabilidade

$P = \frac{44\times 43\times 42}{45^3}$?

- ◯ A) As 4 bolas sorteadas são todas distintas.
- ◯ B) As 4 bolas sorteadas são todas distintas e nenhuma delas contem o número 45.
- ◯ C) As 3 primeiras bolas sorteadas são distintas.
- ◯ D) Nenhuma das 4 bolas sorteadas contem o número 45.

(1v.)

12.

Sabendo que existem 20 listas ordenadas (x_1, x_2, x_3) , $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, formadas por 3 inteiros entre 2 e k , determine o valor de k.

◯	A) $k = 7$	◯	B) $k = 5$
◯	C) $k = 6$	◯	D) $k = 4$

Nos grupos seguintes justifique convenientemente as suas respostas

II

Seja G_n o grafo parcial de K_n, com ordem $n > 3$, que se obtem deste último removendo três arestas ligando três vértices (i.e. um triângulo). O número cromático dum grafo G será aqui denotado por $\chi(G)$.

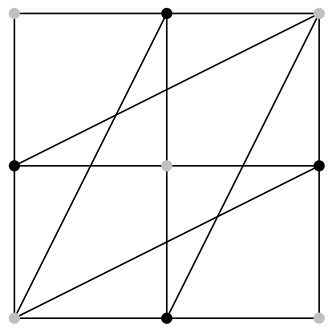
(1) Mostre que $\chi(G_n) = n - 2$.
(2) Justifique porque são planares os grafos G_4 e G_5.
(3) Mostre que G_n não é planar se $n > 5$.
(4) Represente G_5 como um grafo planar topológico e obtenha o dual desse grafo planar topológico.

III

Considere o desenvolvimento da potência $(x - y + z)^5$.

(1) Antes de simplificar (i.e. de agrupar termos idênticos), quantas parcelas tem este desenvolvimento.
(2) Depois de simplificar, agrupando monómios idênticos, a quantas parcelas se reduz o desenvolvimento anterior.
(3) Escreva todos os monómios $x^a\, y^b\, z^c$ com $a \geq 1$, $b \geq 1$ e $c \geq 1$.
(4) Calcule o coeficiente de cada um dos monómios da alínea anterior no desenvolvimento em causa.

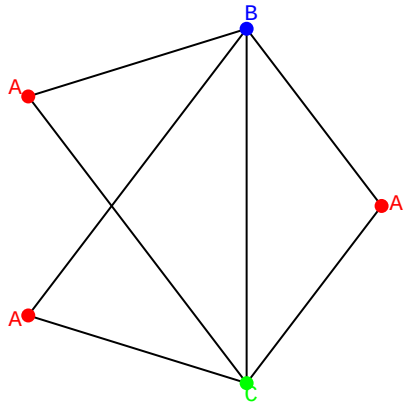
I 1. Na figura seguinte está representada uma bicoloração dos vértices do grafo G.



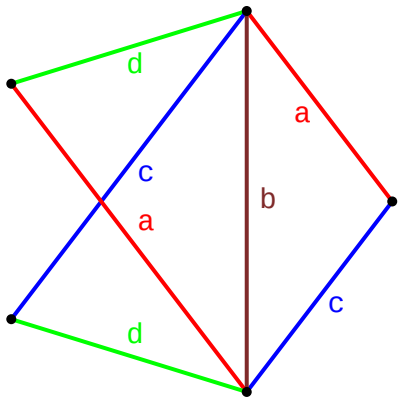
Logo

- G é um grafo bipartido.
- G não tem ciclos hamiltonianos porque num grafo bipartido todo o ciclo elementar tem comprimento par. No entanto G tem ordem 9, ímpar.
- o grafo G tem ciclos eulerianos porque todos os vértices de G têm grau par.
- G tem subgrafos que são árvores, por exemplo um subgrafo gerado por um par de vértices adjacentes.

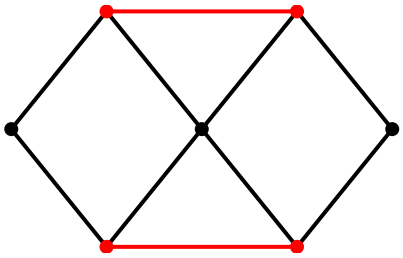
I 2. O número cromático é maior ou igual a 3 porque G tem um ciclo de comprimento 3. Na figura seguinte exibe-se uma coloração de vértices em 3 cores: A, B e C. Logo $\chi(G) = 3$.



O índice cromático é maior ou igual a 4 porque G tem um vértice de grau 4. Na figura seguinte exibe-se uma coloração de arestas em 4 cores: a, b, c e d. Logo $q(G) = 4$.



I 3. Na figura seguinte está representado o subgrafo H, de G, gerado pelos vértices de grau 3.



É obvio que:
- H é uma floresta,
- H tem ordem 4,
- o grafo H não é conexo,
- H não tem ciclos de comprimento 3.

I 4. (a) *Se todos os vértices de um grafo conexo têm grau* 4 *então o grafo admite ciclos hamiltonianos.* Falso. É correcta a afirmação analoga sobre ciclos eulerianos.

(b) *Um grafo simples bipartido não tem ciclos de comprimento* 5. Certo. Mais geralmente não tem ciclos de comprimento ímpar.

(c) *Um grafo de ordem* 8 *pode ter grafos parciais de ordem* 4. Falso. Um grafo parcial de outro grafo tem sempre os mesmos vértices, e portanto a mesma ordem.

(d) *Se um vértice num grafo simples tem grau* 4 *então o índice cromático desse grafo é maior ou igual a* 4. Exacto. O índice cromático de um grafo é sempre maior ou igual ao maior grau de vértice nesse grafo.

I 5. A resposta correcta é a C). Seja A o número de arestas do grafo G, e do seu dual também, e seja F o número de faces de G. A soma dos graus das faces de G é igual a $2\,A$. Logo $2\,A = 6 + 12 = 18$, ou seja $A = 9$. Como o número de faces é $F = 2 + 3 = 5$, pela fórmula de Euler obtemos o número de vértices: $V = 9 - 5 + 2 = 6$. Finalmente, porque todos os vértices de G têm o mesmo grau d, concluímos que $2\,A = 6\,d$, e portanto $d = 3$.

I 6. A resposta correcta é a C). Sejam A e V respectivamente o número de arestas e o número de vértices do grafo G. Como todos os vértices têm grau igual a 4, $2\,A = 4\,V$ e portanto $A = 2\,V$. Há duas respostas nestas condições: $V = 9$ com $A = 18$ e $V = 8$ com $A = 16$.

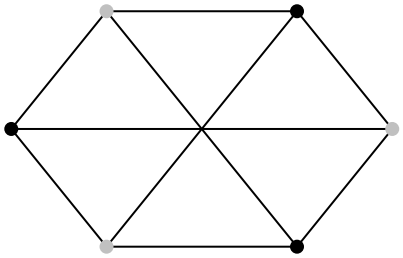
Como o grafo é bipartido existe uma bicoloração de vértices em duas cores "A" e "B". Contando as arestas inicidentes com os vértices de cor "A" vemos que o número total de arestas é um múltiplo de 4. Por esta razão só a resposta $V = 8$ com $A = 16$ é compatível com a hipótese de G ser bipartido.

I 7. A resposta correcta é a D). Sejam v_1, v_2 e v_3 os vértices de G_n que são extremidades das três arestas removidas. Considere o subgrafo H gerado por todos os vértices de K_n excepto v_1 e v_2, num total de $n-2$ vértices. H é um grafo completo de ordem $n-2$ que não contem nenhuma das três arestas: $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$ e $\{v_2, v_3\}$. Logo $k(G_n) \geq n-2$. Se fosse

$k(G_n) \geq n-1$ existiria um subgrafo H de G_n que seria um grafo completo de ordem $n-1$. Esse subgrafo teria de conter pelo menos dois dos vértices v_1, v_2 e v_3. Logo teria de conter pelo menos uma das três arestas, ligando estes vértices, e não poderia ser um subgrafo de G_n. Deste absurdo concluímos que $k(G_n) = n-2$. Por outro lado é obvio que $\chi(G_n) \geq k(G_n)$, ou seja

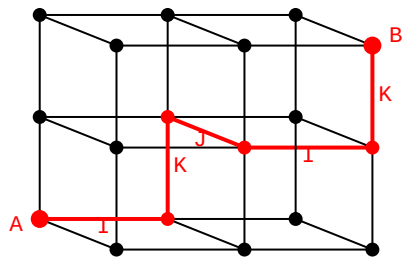
$\chi(G_n) \geq n-2$.

I 8. A resposta correcta é a B). Este grafo contem um subgrafo parcial isomorfo ao grafo bipartido completo $K_{3,3}$ representado na figura seguinte.



Logo, pelo Teorema de Kuratowski, não pode ser planar. Facilmente se verifica que todos os restantes grafos são planares.

I 9. A resposta correcta é a A). Neste grafo as cadeias elementares de comprimento 5 conectando os vértices A e B estão em correspondência bijectiva com as palavras de comprimento 5 que contêm duas vezes a letra "I", duas vezes a letra "K", e uma vez a letra"J". A cada uma destas letras corresponde um vector paralelo a uma das arestas do grafo.



Por exemplo à palavra "IKJIK" corresponde a cadeia elementar assinalada na figura, cujos vértices se obtêm a partir de A somando sucessivamente os vectores associados às letras "I","K","J","I" e "K". O número total destas palavras é
$\frac{5!}{2!\,2!\,1!} = \frac{5\times4\times3\times2}{2\times2} = 30.$

I 10. A resposta correcta é a C), que é igual ao número de combinações com repetições dos 4 cartões postais a 6 elementos:
$rC_6{}^4 = C_6{}^9 = \frac{9!}{3!\,6!}.$

I 11. A resposta correcta é a A). O número de saídas de 4 bolas distintas é igual ao número de arranjos sem repetições de 45 bolas a 4 elementos: $45 \times 44 \times 43 \times 42$.

Por outro lado o número total de saídas de 4 bolas é igual ao número de arranjos de 45 bolas a 4 elementos: 45^4.

A probabilidade P é o cociente destes dois números:

$$P = \frac{45 \times 44 \times 43 \times 42}{45^4} = \frac{44 \times 43 \times 42}{45^3}\ .$$

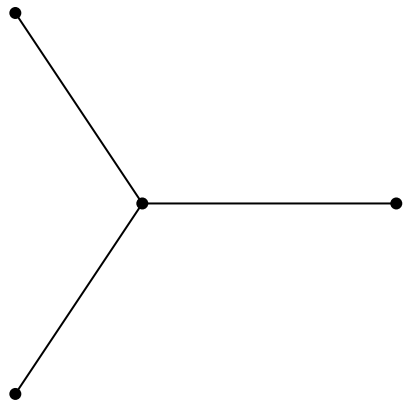
I 12. A resposta correcta é a B). O número de listas ordenadas de 3 inteiros tomadas no conjunto $\{2, 3, \cdots, k\}$, que tem $k-1$ elementos, é igual ao número de combinações com repetições a 3 elementos nesse conjunto de $k-1$ inteiros:
$rC_3{}^{k-1} = C_3{}^{k+1} = \frac{(k+1)\,k\,(k-1)}{6}.$

Logo a resposta correcta é $k = 5$, o único valor, entre as quatro alternativas dadas, tal que
$rC_3{}^{k-1} = 20.$

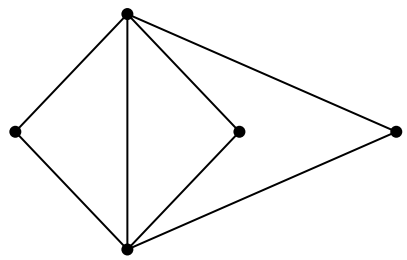
II (a) Sejam v_1, v_2 e v_3 os vértices de G_n que são extremidades das três arestas removidas. Considere o subgrafo H gerado por todos os vértices de K_n excepto v_1 e v_2, num total de $n-2$ vértices. H é um grafo completo de ordem $n-2$ que não contem nenhuma das três arestas: v_1, v_2, v_1, v_3 e v_2, v_3. Logo H é um grafo parcial de G e portanto $\chi(G_n) \geq n-2$.

Se colorirmos os vértices v_1, v_2 e v_3 da mesma cor e cada um dos restantes com uma cor diferente obtemos uma coloração de vértices com $n-2$ cores. Logo $\chi(G_n) = n-2$.

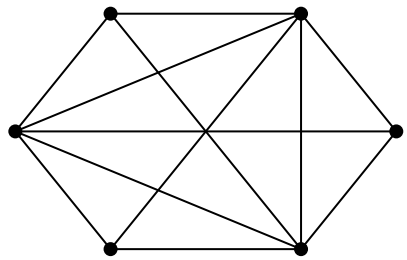
(b) Representação planar de G_4.



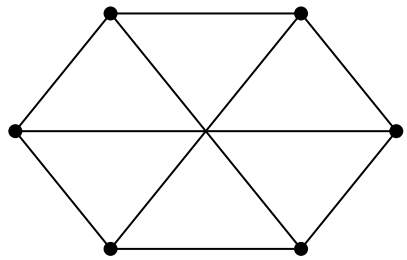
Representação planar de G_5.



(c) O grafo G_6, representado na figura seguinte,

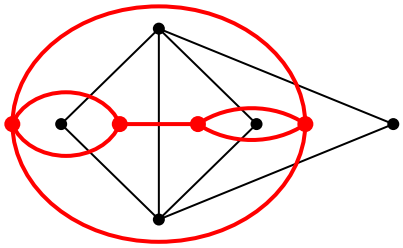


não é planar porque contem o grafo bipartido completo $K_{3,3}$, representado abaixo, como subgrafo parcial. (c.f. Teorema de Kuratowski)



Para $n > 6$ o grafo G_n contem um subgrafo completo de ordem maior ou igual a 5 e portanto também não é planar. (c.f. Teorema de Kuratowski)

(d) Dual da representação planar anterior do grafo G_5.



III (a) São 3^5 parcelas antes da simplificação, o número de arranjos com repetições a 5 elementos no conjunto das três variaveis $\{x, y, z\}$.

(b) Depois de simplificar obtemos
$rC_5{}^3 = C_5{}^7 = C_2{}^7 = 21$ parcelas. Estas parcelas correspondem às combinações com repetições a 5 elementos no conjunto das três variaveis $\{x, y, z\}$.

(c) Há 6 monómios nas condições desta alínea. Correspondem às combinações com repetições a 5 elementos no conjunto $\{x, y, z\}$, que contêm todas as três variaveis. Este número é igual a
$rC_2{}^3 = C_2{}^4 = 6$. São eles $x^3\,y\,z$, $x\,y^3\,z$, $x\,y\,z^3$, $x^2\,y^2\,z$, $x^2\,y\,z^2$ e $x\,y^2\,z^2$.

(d) O coeficiente de $x^3\,y\,z$ é $\frac{5!}{3!\,1!\,1!} = 20$.

O coeficiente de $x\,y^3\,z$ é $\frac{5!}{1!\,3!\,1!} = 20$.

O coeficiente de $x\,y\,z^3$ é $\frac{5!}{1!\,1!\,3!} = 20$.

O coeficiente de $x^2\,y^2\,z$ é $\frac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30$.

O coeficiente de $x^2\,y\,z^2$ é $\frac{5!}{2!\,1!\,2!} = 30$.

O coeficiente de $x\,y^2\,z^2$ é $\frac{5!}{1!\,2!\,2!} = 30$.