

## Tópicos de Matemática Finita

1ª Chamada

30 de Junho de 2001

---

Nome:

Número:

Curso:

---

- O exame que vai realizar tem a duração de 3 horas.
- consiste em: 12 questões de escolha múltipla, valendo 1 valor cada, e 2 grupos de desenvolvimento, com várias alíneas, valendo 4 valores cada grupo.
- Há dois tipos de questões de escolha múltipla:
  - i. No primeiro tipo há quatro alternativas de resposta das quais apenas uma está correcta. Cada alternativa tem associado o seguinte campo ☐ . Deve assinalar a sua resposta colorindo a preto ou azul o disco interior deste campo. A tabela seguinte mostra como estas questões serão classificadas.

| resposta        | valores |
|-----------------|---------|
| resposta certa  | 1       |
| resposta errada | -0,3    |
| não responde    | 0       |

- ii. No segundo tipo de questão são feitas quatro afirmações cuja validade se pede para avaliar. Marque as afirmações correctas no campo correspondente da primeira coluna, assinalada com um "Sim". Marque as afirmações falsas no campo correspondente da segunda coluna, assinalada com um "Não". A tabela seguinte mostra como, neste tipo de pergunta, a avaliação de cada uma das quatro afirmações será classificada.

| avaliação          | valores |
|--------------------|---------|
| avaliação correcta | 0,25    |
| avaliação errada   | -0,25   |
| não avalia         | 0       |

---

|                  |  |
|------------------|--|
| Escolha Múltipla |  |
| Grupo 13         |  |
| Grupo 14         |  |
| Nota Final       |  |

# I. Perguntas de escolha múltipla

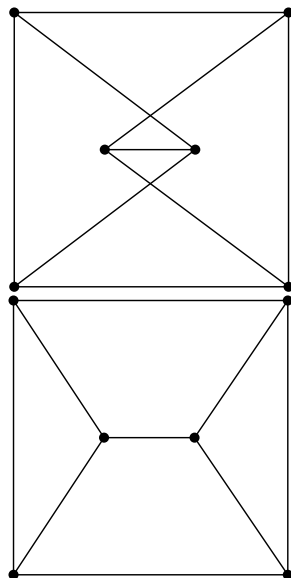
(1v.)

1.

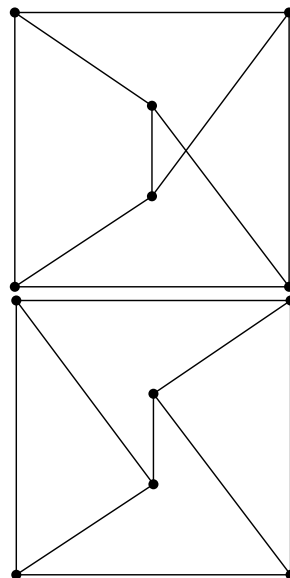
Qual dos seguintes grafos não é isomorfo aos restantes três?



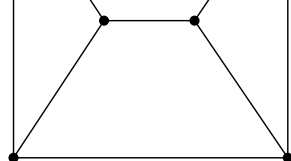
A)



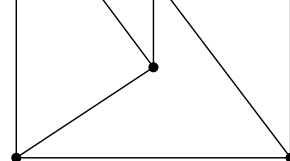
B)



C)



D)



(1v.)

2.

Escolha a melhor estimativa. O número de arestas num grafo simples planar de ordem 5 é no máximo :



A) 8



B) 7



C) 9

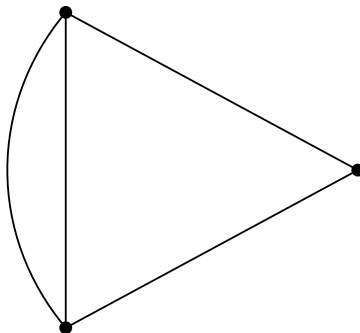


D) 10

(1v.)

3.

Qual é o índice cromático do seguinte grafo?



A) 3



B) 5

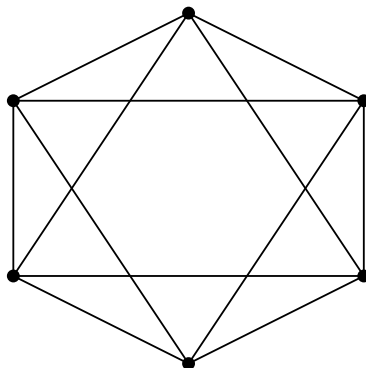


C) 4



D) 2

4. (1v.) Qual é o número cromático do seguinte grafo?



- ☐ A) 2    ☐ B) 3    ☐ C) 5    ☐ D) 4

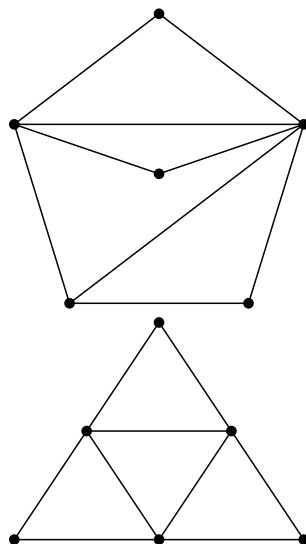
5. (1v.)

Um grafo planar topológico  $G$  tem 12 faces, todas de grau 4 e, os seus vértices de dois graus distintos, 3 e 4 respectivamente. Se  $x$  é o número de vértices de grau 3 e  $y$  o número de vértices de grau 4 então

- ☐ A)  $x = 6$  e  $y = 8$     ☐ B)  $x = 6$  e  $y = 2$   
☐ C)  $x = 8$  e  $y = 6$     ☐ D)  $x = 8$  e  $y = 10$

6. (1v.)

Considere os grafos  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente da 1ª e 2ª figuras abaixo.



Assinale as afirmações correctas.

- | Sim                      | Não                      |                                    |
|--------------------------|--------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | A) $G_2$ tem ciclos eulerianos.    |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | B) $G_2$ tem ciclos hamiltonianos. |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | C) $G_1$ tem ciclos eulerianos.    |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | D) $G_1$ tem ciclos hamiltonianos. |

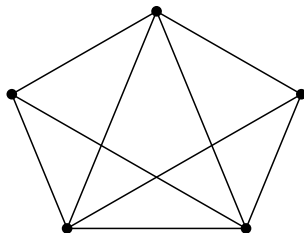
(1v.)

**7.**

Assinale as afirmações correctas.

- | Sim                      | Não                      |                                                                                                           |
|--------------------------|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | A) Todo o grafo simples regular de ordem 12, com grau de vértice 3, tem 36 arestas.                       |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | B) Uma árvore de ordem 6 tem 7 arestas.                                                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | C) Se a uma árvore removermos uma aresta conectando dois dos seus vértices o grafo obtido fica desconexo. |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | D) Todo o grafo com número cromático menor ou igual a 4 é planar.                                         |

(1v.)

**8.**Seja  $H$  o subgrafo gerado pelos vértices de grau 4 do seguinte grafo embaixo.

Assinale as afirmações correctas.

- | Sim                      | Não                      |                                                                         |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | A) o grafo $H$ é regular, i.e. todos os seus vértices têm o mesmo grau. |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | B) o grafo $H$ é conexo.                                                |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | C) o grafo $H$ é uma árvore.                                            |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | D) o maior grau de vértice de $H$ é 4.                                  |

(1v.)

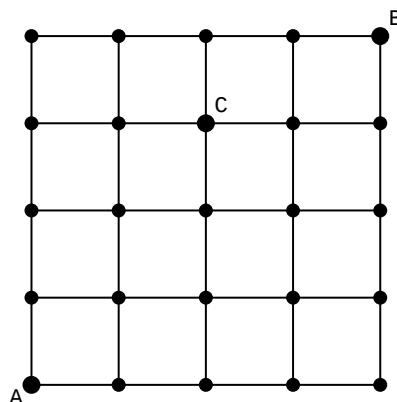
**9.**Seja  $N(k)$  o número de maneiras de distribuir  $k$  bolas idênticas por 3 caixas numeradas de 1 a 3. Qual o valor de  $k$  que satisfaz  $N(k) = 15$  ?

- |                          |      |                          |      |                          |      |                          |      |
|--------------------------|------|--------------------------|------|--------------------------|------|--------------------------|------|
| <input type="checkbox"/> | A) 3 | <input type="checkbox"/> | B) 4 | <input type="checkbox"/> | C) 5 | <input type="checkbox"/> | D) 6 |
|--------------------------|------|--------------------------|------|--------------------------|------|--------------------------|------|

10.

(1v.)

Considere os três vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  no grafo da figura seguinte.



Quantas cadeias elementares de comprimento 8 existem neste grafo com extremidade inicial  $A$ , extremidade final  $B$  e que passam pelo vértice  $C$ ?

- ☐ A) 20    ☐ B) 50    ☐ C) 40    ☐ D) 30

11.

(1v.)

Considere todas as palavras de 5 letras que se podem escrever usando apenas as três letras "A", "B" e "C". Quantas destas palavras contêm exactamente 3 vezes a letra "C"?

- ☐ A) 60    ☐ B) 20    ☐ C) 40    ☐ D) 80

12.

(1v.)

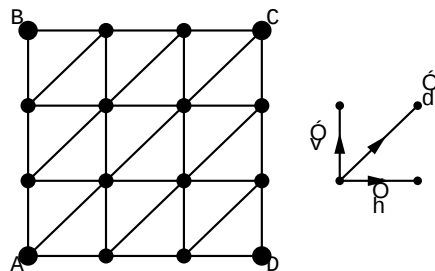
Num grupo de 12 pessoas um boato é espalhado aleatoriamente através de sucessivos contactos telefónicos. Cada pessoa passa o boato, com igual probabilidade, a qualquer um dos restantes membros do grupo, excluindo é claro aquele que lhe transmitiu o rumor. Qual a probabilidade de a pessoa que inicia o boato ser contactada na terceira chamada ?

- ☐ A)  $\frac{1}{6}$     ☐ B)  $\frac{1}{10}$     ☐ C)  $\frac{1}{8}$     ☐ D)  $\frac{1}{12}$

Nos grupos seguintes justifique convenientemente as suas respostas

II

Considere o seguinte grafo planar topológico  $G$  de ordem 16.



Este grafo tem três tipos de arestas, paralelas aos vectores  $\vec{v}$ ,  $\vec{h}$  e  $\vec{d}$ , a que chamaremos respectivamente: arestas **verticais**, arestas **horizontais** e arestas **diagonais**. Chamaremos **caminho** a uma cadeia de  $G$  onde as arestas sejam percorridas na mesma direcção e sentido dos vectores acima. Conhecida a extremidade inicial, cada caminho fica univocamente descrito por uma palavra no alfabeto  $\{V, H, D\}$ , isto é por uma sequência de letras neste conjunto.

- (1) Dados três números inteiros  $p$ ,  $q$  e  $r$ , quantas palavras, neste alfabeto de três letras, se podem escrever usando  $p$  vezes a letra  $V$ ,  $q$  vezes a letra  $H$  e  $r$  vezes a letra  $D$ ?
- (2) Para que valores de  $p$ ,  $q$  e  $r$  as palavras da alínea anterior descrevem caminhos ligando os vértices  $A$  e  $C$ ?
- (3) Quantos caminhos existem com extremidade inicial no vértice  $A$  e extremidade final em  $C$ ?
- (4) Quantos caminhos de comprimento 3 existem?

### III

Considere o grafo planar topológico  $G$  do problema anterior. Sejam  $G^*$  o dual de  $G$  e  $G'$  o grafo que se obtém de  $G^*$  removendo o vértice associado à face ilimitada juntamente com todas as arestas nele incidentes.

- (1) Veja se, no grafo  $G$ , existem cadeias eulerianas ligando os vértices  $A$  e  $C$ . E conectando o par de vértices  $B, D$ ?
- (2) Diga se existem ciclos hamiltonianos em  $G$ .
- (3) Represente o grafo planar topológico  $G'$ .
- (4) Qual o número cromático de  $G$ ?

I 1. A resposta correcta é a B).

I 2. A resposta correcta é a C).

I 3. A resposta correcta é a C).

I 4. A resposta correcta é a B).

I 5. A resposta correcta é a C).

I 6. A) afirmação correcta  
B) afirmação correcta  
C) afirmação errada  
D) afirmação errada

I 7. A) afirmação errada  
B) afirmação errada  
C) afirmação correcta  
D) afirmação errada

I 8. A) afirmação correcta  
B) afirmação correcta  
C) afirmação errada  
D) afirmação errada

I 9. A resposta correcta é a B).

I 10. A resposta correcta é a D).

I 11. A resposta correcta é a C).

I 12. A resposta correcta é a B).

II (a)  $\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$   
(b)  $(p, q, r) = (3, 3, 0), (p, q, r) = (2, 2, 1), (p, q, r) = (1, 1, 2)$  ou  $(p, q, r) = (0, 0, 3)$ .  
(c)  $\frac{6!}{3!3!} + \frac{5!}{2!2!} + \frac{4!}{2!} + 1$   
(d) 111

III A resposta correcta é a ).