

Tópicos de Matemática Finita

2ª Chamada
5 de Julho de 2001

Nome:
Número:
Curso:

- O exame que vai realizar tem a duração de 3 horas.
- consiste em: 12 questões de escolha múltipla, valendo 1 valor cada, e 2 grupos de desenvolvimento, com várias alíneas, valendo 4 valores cada grupo.
- Há dois tipos de questões de escolha múltipla:
 - i. No primeiro tipo há quatro alternativas de resposta das quais apenas uma está correcta. Cada alternativa tem associado o seguinte campo ☐ . Deve assinalar a sua resposta colorindo a preto ou azul o disco interior deste campo. A tabela seguinte mostra como estas questões serão classificadas.

resposta	valores
resposta certa	1
resposta errada	-0,3
não responde	0

- ii. No segundo tipo de questão são feitas quatro afirmações cuja validade se pede para avaliar. Marque as afirmações correctas no campo correspondente da primeira coluna, assinalada com um "Sim". Marque as afirmações falsas no campo correspondente da segunda coluna, assinalada com um "Não". A tabela seguinte mostra como, neste tipo de pergunta, a avaliação de cada uma das quatro afirmações será classificada.

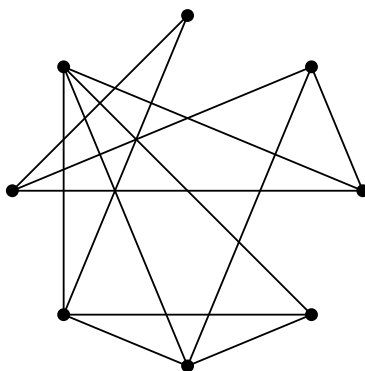
avaliação	valores
avaliação correcta	0,25
avaliação errada	-0,25
não avalia	0

Escolha Múltipla	
Grupo 13	
Grupo 14	
Nota Final	

I. Perguntas de escolha múltipla

(1v.)

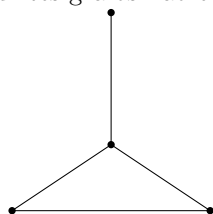
1.
Considere o grafo G .



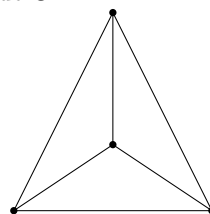
Qual dos seguintes grafos não é isomorfo a um subgrafo de G ?



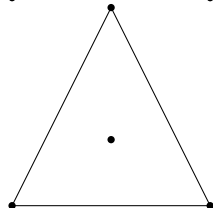
A)



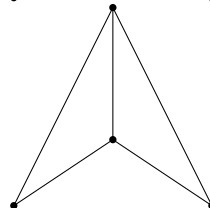
B)



C)



D)



(1v.)

2.
Assinale as afirmações correctas.

Sim

Não



A) Existe um poliedro com 10 vértices, 20 arestas e 12 faces.



B) O dual de um grafo planar topológico com 6 vértices, 14 arestas e 10 faces tem 10 vértices, 4 arestas e 8 faces.



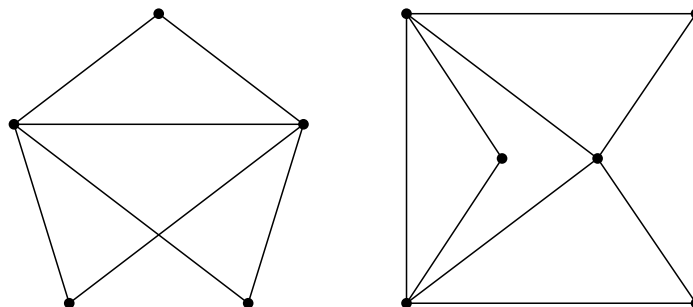
C) Nenhum ciclo é um grafo de intervalos.



D) Todo o subgrafo parcial de um grafo de intervalos é um grafo de intervalos.

(1v.)

3.
Considere os grafos G_1 e G_2 embaixo, respectivamente à esquerda e à direita.



Assinale as afirmações correctas.

Sim Não

☐
☐

A) G_2 tem ciclos eulerianos.

☐
☐

B) G_2 tem ciclos hamiltonianos.

☐
☐

C) G_1 tem ciclos eulerianos.

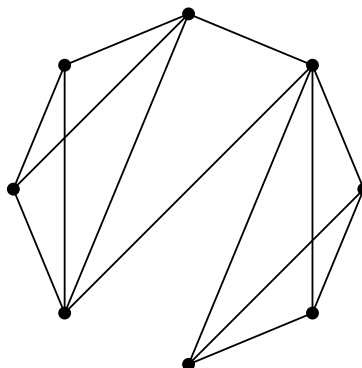
☐
☐

D) G_1 tem ciclos hamiltonianos.

4.

(1v.)

Considere o grafo G da figura embaixo.



Seja M o maior número de arestas que é possível remover sem desconectar o grafo, i.e. de modo a obter um grafo parcial conexo. Por outro lado seja m o menor número de arestas que é possível remover de forma a desconectar o grafo, i.e. de modo a obter um grafo parcial desconexo. Qual das seguintes alternativas está correcta?

☐

A) $M = 7$ e $m = 3$

☐

B) $M = 6$ e $m = 3$

☐

C) $M = 6$ e $m = 2$

☐

D) $M = 7$ e $m = 2$

5.

(1v.)

Escolha a melhor estimativa. O número de arestas num grafo simples com número cromático 4 e ordem 5 é no máximo :

☐

A) 7

☐

B) 9

☐

C) 8

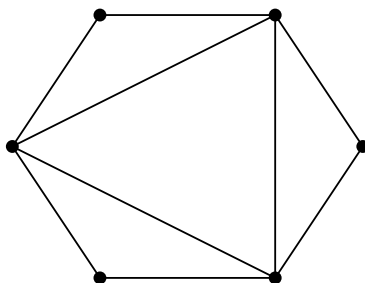
☐

D) 10

(1v.)

6.

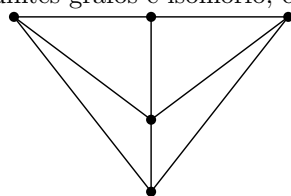
Considere o seguinte grafo planar topológico G .



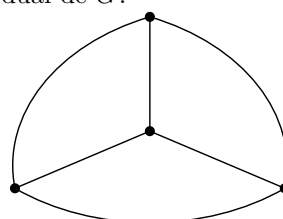
Qual dos seguintes grafos é isomorfo, enquanto grafo, ao dual de G ?



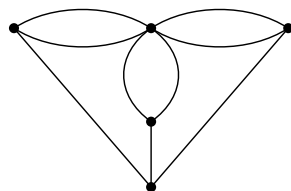
A)



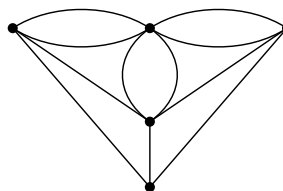
B)



C)



D)



(1v.)

7.

Um grafo planar topológico G tem 14 faces, todas do mesmo grau, e 9 vértices de dois graus distintos, sendo 6 de grau 5 e 3 de grau d . Seja c o grau comum às faces de G . Então



A)

 $c = 4$ e $d = 4$ 

B)

 $c = 3$ e $d = 4$ 

C)

 $c = 4$ e $d = 3$ 

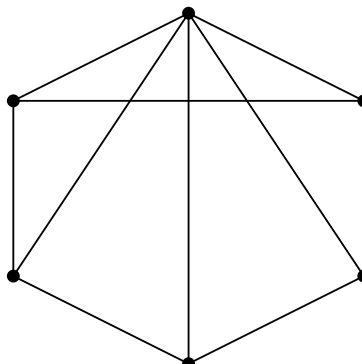
D)

 $c = 3$ e $d = 3$

(1v.)

8.

Qual é o número cromático do seguinte grafo?



- ☐ A) 5 ☐ B) 3 ☐ C) 4 ☐ D) 2

9.

(1v.)

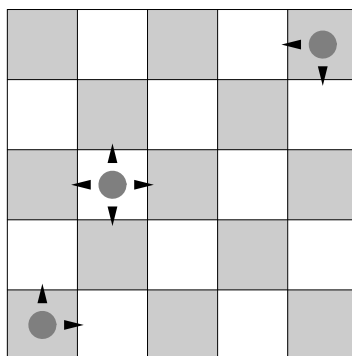
Dois objectos iguais são sucessivamente sorteados entre k pessoas. Seja $P(k)$ a probabilidade de haver uma pessoa premiada com os 2 objectos. Qual o valor de k que satisfaz $P(k) = \frac{1}{3}$?

- ☐ A) 4 ☐ B) 6 ☐ C) 3 ☐ D) 5

10.

(1v.)

Num tabuleiro de xadrez 5×5 um peão pode apenas mover-se para uma das casas adjacentes (quatro no máximo) de acordo com a figura embaixo.



De quantas maneiras é possível levar o peão do canto inferior esquerdo até ao canto superior direito em 8 movimentos (jogadas) passando pela casa do meio assinalada na figura?

- ☐ A) 20 ☐ B) 30 ☐ C) 40 ☐ D) 50

11.

(1v.)

Qual das seguintes contagens é igual a $\frac{9!}{3!6!}$?

- ☐ A) O número de distribuições de 6 bolas idênticas por 4 caixas distintas.
☐ B) O número de listas ordenadas por ordem crescente, com repetições, de 6 inteiros compreendidos entre 1 e 3.
☐ C) O número de distribuições de 4 bolas idênticas por 6 caixas distintas.
☐ D) O número de combinações com repetições a 6 elementos num conjunto de 3 objectos.

(1v.)

12.

De quantas maneiras é possível emparelhar para dançar 4 mulheres com 4 homens de um total de 10 homens disponíveis?

- ☐ A) $\frac{10!}{8!}$ ☐ B) $\frac{10!}{4!6!}$ ☐ C) $\frac{10!}{4!}$ ☐ D) $\frac{10!}{6!}$

Nos grupos seguintes justifique convenientemente as suas respostas

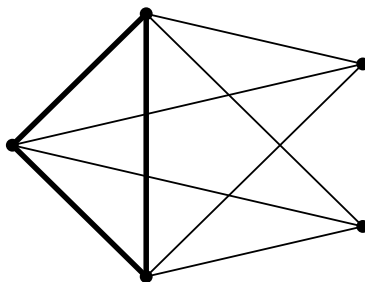
II

Numa roda 8 crianças jogam à bola. Cada criança, quando recebe a bola, passa-a a qualquer uma das restantes crianças, excepto aquela que lhe fez o passe. O João começa o jogo.

- (1) De quantas maneiras pode a bola ser jogada em 4 passes?
- (2) Qual a probabilidade da bola regressar pela primeira vez às mãos do João ao fim do quarto passe?
- (3) Qual a probabilidade da bola chegar pela primeira vez às mãos do António ao fim do quarto passe?

III

Seja $G_{p,q}$ o grafo que se obtém do grafo completo K_p juntando-lhe q novos vértices e todas as arestas que os ligam aos vértices de K_p . Na figura seguinte vem representado o grafo $G_{3,2}$.



Se não conseguir resolver as alíneas 4. e 5. para o grafo $G_{6,3}$ tente pelo menos resolvê-las para o grafo $G_{3,2}$.

- (1) Mostre que $G_{3,2}$ é planar.
 - (2) Quantas arestas tem $G_{p,q}$?
 - (3) Qual o maior grau de vértice em $G_{p,q}$?
 - (4) Numa coloração de arestas de $G_{6,3}$ qual o maior número de arestas que pode haver da mesma cor?
 - (5) Qual o índice cromático de $G_{6,3}$?
-

I 1. A resposta correcta é a D).

- I 2. A) afirmação correcta
 B) afirmação errada
 C) afirmação errada
 D) afirmação errada

- I 3. A) afirmação errada
 B) afirmação correcta
 C) afirmação correcta
 D) afirmação errada

I 4. A resposta correcta é a D).

I 5. A resposta correcta é a B).

I 6. A resposta correcta é a C).

I 7. A resposta correcta é a B).

I 8. A resposta correcta é a C).

I 9. A resposta correcta é a D).

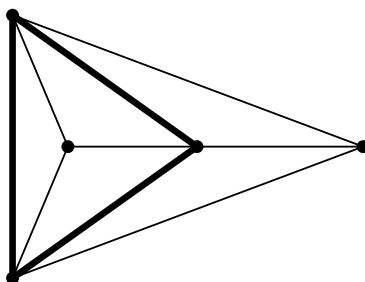
I 10. A resposta correcta é a B).

I 11. A resposta correcta é a A).

I 12. A resposta correcta é a D).

II

III (a) O grafo planar seguinte é isomorfo a $G_{3,2}$.



- (b) $G_{p,q}$ tem $qp + p(p-1)/2$ arestas.
 (c) O maior grau de vértice em $G_{p,q}$ é $q + p - 1$.
 (d) Numa coloração de arestas de $G_{6,3}$ o maior número de arestas que pode haver da mesma cor é $\lfloor 4i/5 \rfloor$. Havendo $\lfloor 5j/4 \rfloor$ arestas da mesma cor implicaria que o grafo teria pelo menos 10. Como o grafo $G_{6,3}$ tem ordem 9 isto não é possível.

- (e) O índice cromático de $G_{6,3}$ é 9. Pelo Teorema de Vizing o índice cromático é igual a 8 ou 9. Não existe nenhuma coloração de arestas de $G_{6,3}$ em 8 cores porque senão o número de arestas seria no máximo $32 = 8 \times 4$. Mas $G_{6,3}$ tem 33 arestas.