Código do Exame: 302

Tópicos de Matemática Finita

2ª Época

20 de Julho de 2001

Nome:
Número:
Curso:

- O exame que vai realizar tem a duração de 3 horas.
- consiste em: 12 questões de ecolha múltipla, valendo 1 valor cada, e 2 grupos de desenvolvimento, com várias alíneas cada.
- Há dois tipos de questões de ecolha múltipla:
  i. No primeiro tipo há quatro alternativas de resposta das quais apenas uma está correcta. Cada alternativa tem associado o seguinte campo ◯ . Deve assinalar a sua resposta colorindo a preto ou azul o disco interior deste campo. A tabela seguinte mostra como estas questões serão classificadas.

resposta	**valores**
resposta certa	1
resposta errada	$-0,3$
não responde	0

  ii. No segundo tipo de questão são feitas quatro afirmações cuja validade se pede para avaliar. Marque as afirmações correctas no campo correspondente da primeira coluna, assinalada com um "Sim". Marque as afirmações falsas no campo correspondente da segunda coluna, assinalada com um "Não". A tabela seguinte mostra como, neste tipo de pergunta, a avaliação de cada uma das quatro afirmações será classificada.

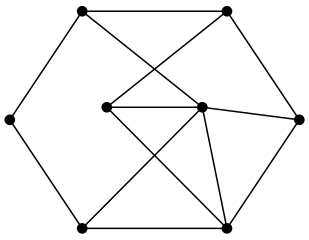
avaliação	**valores**
avaliação correcta	$0,25$
avaliação errada	$-0,25$
não avalia	0

Escolha Múltipla	
Grupo 13	
Grupo 14	
Nota Final	

I. Perguntas de escolha múltipla

(1v.)

1.
Seja H o subgrafo gerado pelos vértices de grau 3 do seguinte grafo embaixo.



Assinale as afirmações correctas.

Sim	Não	
◯	◯	A) o grafo H é uma árvore.
◯	◯	B) o grafo H é regular, i.e. todos os seus vértices têm o mesmo grau.
◯	◯	C) o grafo H não tem ciclos.
◯	◯	D) o grafo H é conexo.

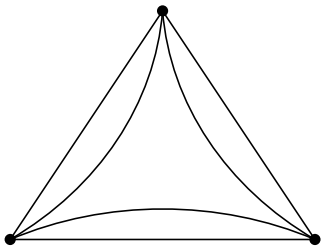
(1v.)

2.
Assinale as afirmações correctas.

Sim	Não	
◯	◯	A) Todo o subgrafo de um grafo de indiferença é um grafo de indiferença.
◯	◯	B) Existe um poliedro com 14 vértices, 30 arestas e 16 faces.
◯	◯	C) Toda a cadeia aberta é um grafo de indiferença.
◯	◯	D) O dual de um grafo planar topológico com 5 vértices, 10 arestas e 7 faces tem 7 vértices, 10 arestas e 5 faces.

(1v.)

3.
Qual é o índice cromático do seguinte grafo?



◯ A) 5 ◯ B) 4 ◯ C) 6 ◯ D) 3

(1v.)

4.

Um grafo planar topológico G tem todas as faces do mesmo grau 4, e tem 18 vértices de dois graus distintos, sendo 8 de grau 3 e 10 de grau d. Seja f o número de faces de G. Então

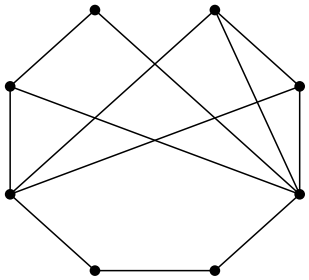
◯ A) $f = 16$ e $d = 4$ ◯ B) $f = 18$ e $d = 3$

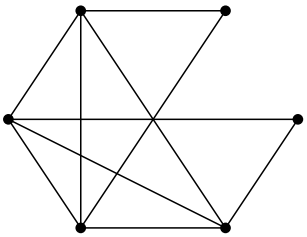
◯ C) $f = 12$ e $d = 3$ ◯ D) $f = 14$ e $d = 4$

---

5. (1v.)

Considere os grafos G_1 e G_2 embaixo, respectivamente à esquerda e à direita.





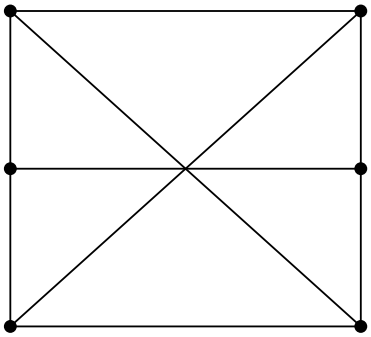
Assinale as afirmações correctas.

Sim	Não	
◯	◯	A) G_1 tem cadeias abertas eulerianas.
◯	◯	B) G_2 tem ciclos eulerianos.
◯	◯	C) G_2 tem ciclos hamiltonianos.
◯	◯	D) G_1 tem ciclos hamiltonianos.

---

6. (1v.)

Qual é o número cromático do seguinte grafo?



◯ A) 4 ◯ B) 5 ◯ C) 3 ◯ D) 2

---

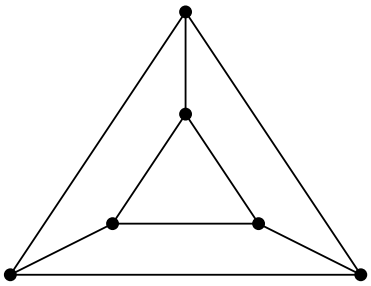
7. (1v.)

Escolha a melhor estimativa. O número de vértices num grafo simples com índice cromático 4 e com 9 arestas é pelo menos :

◯ A) 6 ◯ B) 8 ◯ C) 7 ◯ D) 5

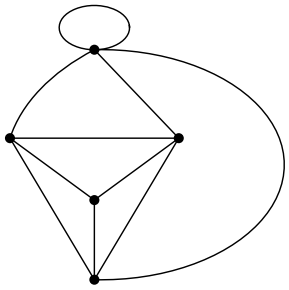
(1v.)

8.
Considere o seguinte grafo planar topológico G.

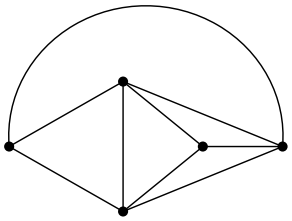


Qual dos seguintes grafos é isomorfo, enquanto grafo, ao dual de G?

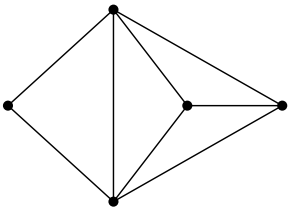
◯ A)



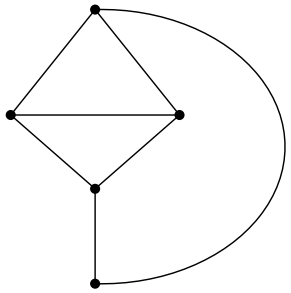
◯ B)



◯ C)



◯ D)



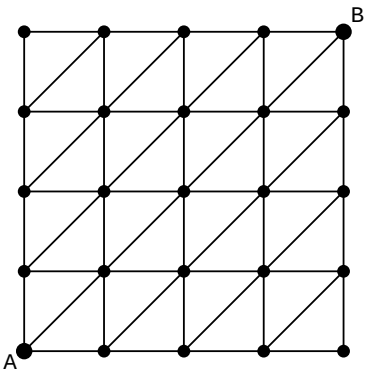
(1v.)

9.
No desenvolvimento da potência $(x + y + z)^k$, com $k \geq 4$, depois de todas as simplificações e agrupamento de termos idênticos, o monómio $x^2\, y\, z^{k-3}$ aparece com coeficiente 12. Qual o valor de k ?

◯ A) 3 ◯ B) 5 ◯ C) 4 ◯ D) 6

(1v.)

10.
Considere o grafo seguinte.



Este grafo tem três tipos de arestas: *verticais*, *horizontais* e *diagonais*. Quantas cadeias elementares de comprimento 6, contendo exactamente duas arestas *diagonais*, existem neste grafo com extremidade inicial A e extremidade final B?

Sugestão: Represente estas cadeias por arranjos em três letras V, H e D.

◯ A) 60 ◯ B) 30 ◯ C) 120 ◯ D) 90

---

11. (1v.)

Pretende-se distibuir 10 prendas, todas diferentes, por 3 crianças de modo que a primeira fique com 2 presentes, a segunda com 3 e a terceira com 5. De quantas maneiras se pode fazer a distribuição?

◯ A) $10!$ ◯ B) $\frac{10!}{2!\,3!\,5!}$ ◯ C) $2!\,3!\,5!$ ◯ D) $\frac{2!\,3!\,5!}{10!}$

---

12. (1v.)

Das contagens seguintes três delas são iguais. Qual é distinta das restantes?

◯ A) O número de distribuições de 11 bolas idênticas por 3 crianças de modo que cada criança fique com pelo menos duas bolas .

◯ B) O número de listas (x_1, x_2, x_3) de 3 inteiros com $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ e cada $x_i \geq 1$.

◯ C) O número de combinações com repetições a 6 elementos num conjunto de três letras "A", "B", "C".

◯ D) O número de monómios $x^a\, y^b\, z^c$ de grau $a + b + c = 5$ com $a, b, c \geq 0$.

Nos grupos seguintes justifique convenientemente as suas respostas

II

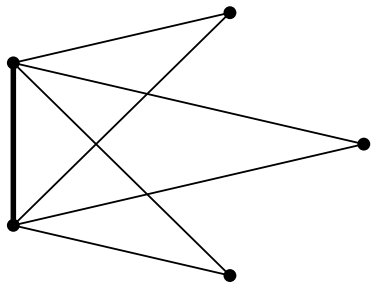
Oito bolas são distribuidas por 6 caixas numeradas de 1 a 6. Veja quantas distribuições existem se:

(1) as bolas forem idênticas e a primeira caixa contiver pelo menos uma bola.
(2) as bolas forem todas distintas.

(3) as bolas forem idênticas e cada caixa contiver no máximo cinco bolas.

III

Seja $G_{p,q}$ o grafo que se obtem do grafo completo K_p juntando-lhe q novos vértices e todas as arestas que os ligam aos vértices de K_p. Na figura seguinte vem representado o grafo $G_{2,3}$.



(1) Mostre que $G_{2,3}$ é planar. E $G_{3,3}$, é planar também?
(2) Qual o número cromático de $G_{2,3}$?
(3) Qual o índice cromático de $G_{2,3}$?
(4) Qual o maior número de componentes conexas que um subgrafo de $G_{p,q}$ pode ter? Porquê?
(5) Identifique, através de uma condição em p e q, o conjunto dos valores de p e q para os quais $G_{p,q}$ não admite ciclos hamiltonianos. Deve justificar completamente a sua resposta. Se não conseguir resolver esta alínea mostre que $G_{3,4}$ não admite ciclos hamiltonianos.

I 1.
A) afirmação errada
B) afirmação errada
C) afirmação correcta
D) afirmação errada

I 2.
A) afirmação correcta
B) afirmação errada
C) afirmação correcta
D) afirmação correcta

I 3. A resposta correcta é a C).

I 4. A resposta correcta é a A).

I 5.
A) afirmação errada
B) afirmação correcta
C) afirmação correcta
D) afirmação errada

I 6. A resposta correcta é a D).

I 7. A resposta correcta é a A).

I 8. A resposta correcta é a B).

I 9. A resposta correcta é a C).

I 10. A resposta correcta é a D).

I 11. A resposta correcta é a B).

I 12. A resposta correcta é a C).

II

III (a) $G_{2,3}$ é planar. (Justificação incompleta). $G_{3,3}$ não é planar porque contem um subgrafo isomorfo ao grafo bipartido completo $K_{3,3}$.
(b) O número cromático de $G_{2,3}$ é 3. (Justificação incompleta).
(c) O índice cromático de $G_{2,3}$ é 4. (Justificação incompleta).
(d) O maior número de componentes conexas que um subgrafo de $G_{p,q}$ pode ter é q. Um subgrafo de $G_{p,q}$ é conexo sse contiver algum vértice do subgrafo completo K_p. Os subgrafos desconexos são aqueles gerados por subconjuntos dos q vértices que se juntam a K_p para formar o grafo $G_{p,q}$. Nestes subgrafos o número de componentes conexas é igual à ordem do subgrafo, porque cada vértice determina uma componente conexa distinta.

(e) O conjunto dos valores de p e q para os quais $G_{p,q}$ não admite ciclos hamiltonianos é definido pela condição $q > p$. Se $q > p$ removendo os vértices de K_p, o subgrafo gerado pelos restantes vértices tem mais de p componentes conexas. Logo não admite ciclos hamiltonianos. Falhando a condição $q > p$ para algum inteiro não negativo r tem-se $p = q + r$. Sejam x_1, x_2 até x_{q+r} os vértices de $G_{p,q}$ que geram um subgrafo completo de ordem p e sejam y_1, y_2 até y_q os restantes vértices do grafo $G_{p,q}$. Então
$x_1 \mapsto y_1 \mapsto x_2 \mapsto y_2 \mapsto \cdots \mapsto x_q \mapsto y_q \mapsto x_{q+1} \mapsto \cdots \mapsto x_{q+r} \mapsto x_1$
é um ciclo hamiltoniano de $G_{p,q}$.