Tópicos de Matemática Finita

2ª Chamada

5 de Julho de 2001

Nome:
Número:
Curso:

- O exame que vai realizar tem a duração de 3 horas.
- consiste em: 12 questões de ecolha múltipla, valendo 1 valor cada, e 2 grupos de desenvolvimento, com várias alíneas, valendo 4 valores cada grupo.
- Há dois tipos de questões de ecolha múltipla:
  i. No primeiro tipo há quatro alternativas de resposta das quais apenas uma está correcta. Cada alternativa tem associado o seguinte campo $\boxed{\bigcirc}$. Deve assinalar a sua resposta colorindo a preto ou azul o disco interior deste campo. A tabela seguinte mostra como estas questões serão classificadas.

resposta	**valores**
resposta certa	1
resposta errada	$-0,3$
não responde	0

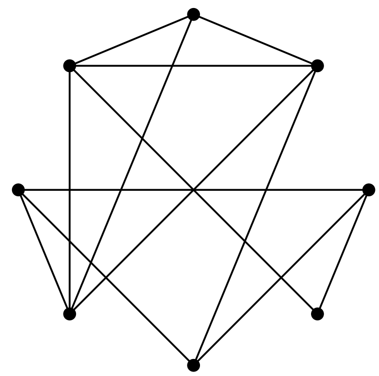
  ii. No segundo tipo de questão são feitas quatro afirmações cuja validade se pede para avaliar. Marque as afirmações correctas no campo correspondente da primeira coluna, assinalada com um "Sim". Marque as afirmações falsas no campo correspondente da segunda coluna, assinalada com um "Não". A tabela seguinte mostra como, neste tipo de pergunta, a avaliação de cada uma das quatro afirmações será classificada.

avaliação	**valores**
avaliação correcta	$0,25$
avaliação errada	$-0,25$
não avalia	0

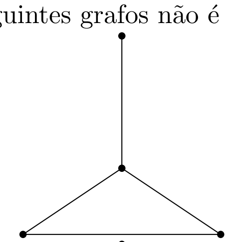
Escolha Múltipla	
Grupo 13	
Grupo 14	
Nota Final	

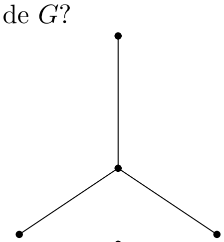
I. Perguntas de escolha múltipla

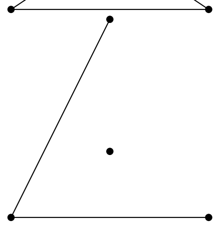
(1v.) **1.**
Considere o grafo G.

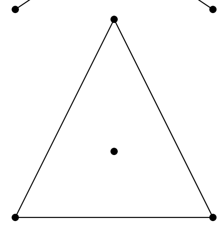


Qual dos seguintes grafos não é isomorfo a um subgrafo de G?

○ A) 

◉ B) 

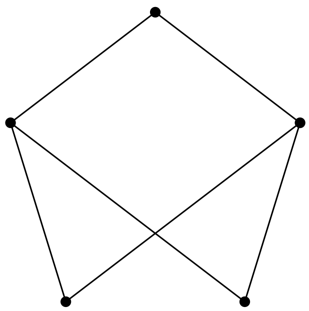
○ C) 

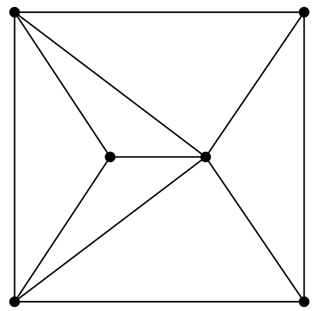
○ D) 

(1v.) **2.**
Assinale as afirmações correctas.

Sim	Não	
◉	○	A) Todo o subgrafo de um grafo de intervalos é um grafo de intervalos.
○	◉	B) Existe um poliedro com 12 vértices, 20 arestas e 8 faces.
◉	○	C) Nenhum ciclo de comprimento maior ou igual a 4 é um grafo de intervalos.
◉	○	D) O dual de um grafo planar topológico com 4 vértices, 10 arestas e 8 faces tem 8 vértices, 10 arestas e 4 faces.

(1v.) **3.**
Considere os grafos G_1 e G_2 embaixo, respectivamente à esquerda e à direita.





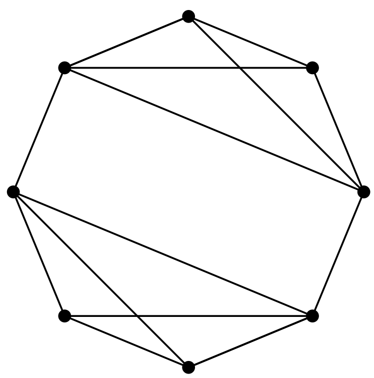
Assinale as afirmações correctas.

Sim	Não	
◉	○	A) G_1 tem cadeias abertas eulerianas.
◉	○	B) G_2 tem ciclos hamiltonianos.
○	◉	C) G_1 tem ciclos hamiltonianos.
○	◉	D) G_2 tem cadeias abertas eulerianas.

---

4. (1v.)

Considere o grafo G da figura embaixo.



Seja M o maior número de arestas que é possivel remover sem deconectar o grafo, i.e. de modo a obter um grafo parcial conexo. Por outro lado seja m o menor número de arestas que é possivel remover de forma a deconectar o grafo, i.e. de modo a obter um grafo parcial desconexo. Qual das seguintes alternativas está correcta?

◉ A) $M = 7$ e $m = 2$ ○ B) $M = 7$ e $m = 3$

○ C) $M = 6$ e $m = 2$ ○ D) $M = 6$ e $m = 3$

---

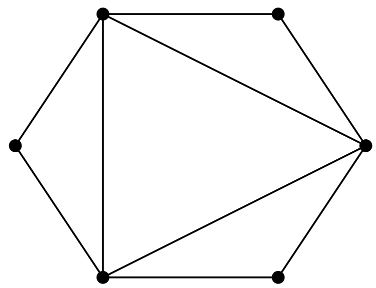
5. (1v.)

Escolha a melhor estimativa. O número de vértices num grafo simples com número cromático 4 e com 10 arestas é pelo menos :

○ A) 5 ○ B) 7 ○ C) 8 ◉ D) 6

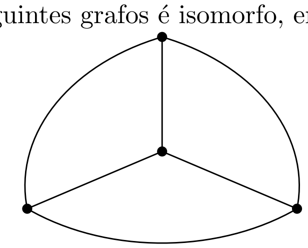
(1v.)

6.
Considere o seguinte grafo planar topológico G.

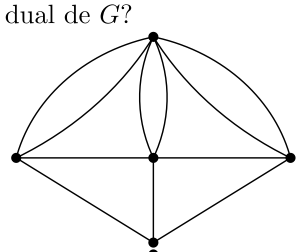


Qual dos seguintes grafos é isomorfo, enquanto grafo, ao dual de G?

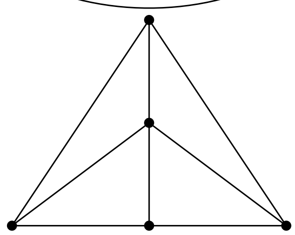
◯ A)



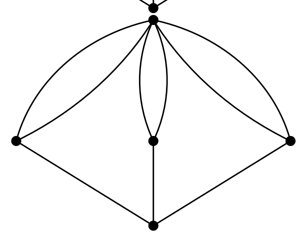
◯ B)



◯ C)



⦿ D)



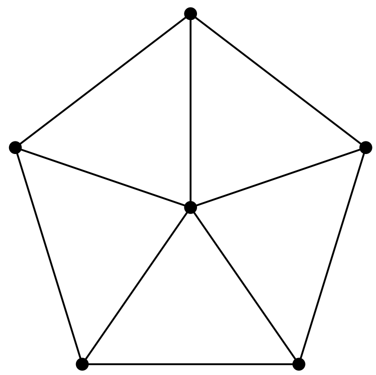
(1v.)

7.
Um grafo planar topológico G tem 16 faces, todas do mesmo grau, e 18 vértices de dois graus distintos, sendo 8 de grau 3 e 10 de grau d. Seja c o grau comum às faces de G. Então

⦿ A) $c = 4$ e $d = 4$ ◯ B) $c = 3$ e $d = 3$
◯ C) $c = 4$ e $d = 3$ ◯ D) $c = 3$ e $d = 4$

(1v.)

8.
Qual é o número cromático do seguinte grafo?



○ A) 2 ○ B) 5 ○ C) 3 ⊙ D) 4

---

9. (1v.)

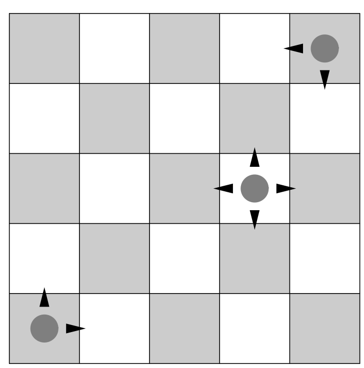
Dois objectos iguais são sucessivamente sorteados entre k pessoas. Seja $P(k)$ a probabilidade de haver uma pessoa premiada com os 2 objectos. Qual o valor de k que satisfaz $P(k) = \frac{2}{5}$?

○ A) 3 ○ B) 5 ⊙ C) 4 ○ D) 6

---

10. (1v.)

Num tabuleiro de xadrez 5×5 um peão pode apenas mover-se para uma das casas adjacentes (quatro no máximo) de acordo com a figura embaixo.



De quantas maneiras é possivel levar o peão do canto inferior esquerdo até ao canto superior direito em 8 movimentos (jogadas) passando pela casa do meio assinalada na figura?

○ A) 20 ○ B) 40 ⊙ C) 30 ○ D) 50

---

11. (1v.)

Qual das seguintes contagens é igual a $\frac{11!}{4!\,7!}$?

- [ ] A) O número de distribuições de 5 bolas idênticas por 7 caixas distintas.
- [ ] B) O número de combinações com repetições a 7 elementos num conjunto de 4 objectos.
- [x] C) O número de listas ordenadas por ordem crescente, com repetições, de 7 inteiros compreendidos entre 1 e 5.
- [ ] D) O número de distribuições de 7 bolas idênticas por 4 caixas distintas.

(1v.)

12.
De quantas maneiras é possivel emparelhar para dançar 4 mulheres com 4 homens de um total de 12 homens disponiveis?

- [x] A) $\frac{12!}{8!}$
- [ ] B) $\frac{12!}{4!}$
- [ ] C) $\frac{12!}{6!}$
- [ ] D) $\frac{12!}{4!\,8!}$

Nos grupos seguintes justifique convenientemente as suas respostas

II

Numa roda 8 crianças jogam à bola. Cada criança, quando recebe a bola, passa-a a qualquer uma das restantes crianças, excepto aquela que lhe fez o passe. O João começa o jogo.

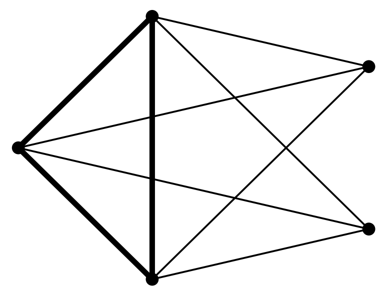
(1) De quantas maneiras pode a bola ser jogada em 4 passes?
(2) Qual a probablidade da bola regressar pela primeira vez às mãos do João ao fim do quarto passe?
(3) Qual a probablidade da bola chegar pela primeira vez às mãos do António ao fim do quarto passe?

Respostas

(1) 7×6^3
(2) $\frac{7\times6\times5\times1}{7\times6^3} = \frac{5}{6^2}$
(3) $\frac{6\times5\times5\times1}{7\times6^3} = \frac{5^2}{7\times6^2}$

III

Seja $G_{p,q}$ o grafo que se obtem do grafo completo K_p juntando-lhe q novos vértices e todas as arestas que os ligam aos vértices de K_p. Na figura seguinte vem representado o grafo $G_{3,2}$.

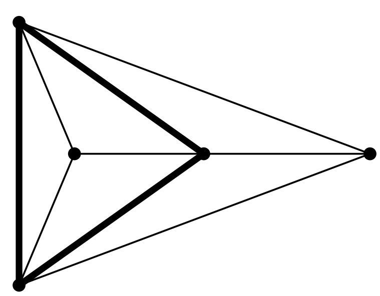


Se não conseguir resolver as alíneas 4. e 5. para o grafo $G_{6,3}$ tente pelo menos resolvê-las para o grafo $G_{3,2}$.

(1) Mostre que $G_{3,2}$ é planar.
(2) Quantas arestas tem $G_{p,q}$?
(3) Qual o maior grau de vértice em $G_{p,q}$?
(4) Numa coloração de arestas de $G_{6,3}$ qual o maior número de arestas que pode haver da mesma cor?
(5) Qual o índice cromático de $G_{6,3}$?

Respostas

(1) O grafo planar seguinte é isomorfo a $G_{3,2}$.



(2) $G_{p,q}$ tem $q\,p + p\,(p-1)/2$ arestas.
(3) O maior grau de vértice em $G_{p,q}$ é $q + p - 1$.
(4) Numa coloração de arestas de $G_{6,3}$ o maior número de arestas que pode haver da mesma cor é 4. Havendo 5 arestas da mesma cor, isto implicaria que o grafo tivesse pelo menos 10 vértices. Como o grafo $G_{6,3}$ tem ordem 9 isto não é possível.
(5) O índice cromático de $G_{6,3}$ é 9. Pelo Teorema de Vizing o índice cromático é igual a 8 ou 9. Não existe nenhuma coloração de arestas de $G_{6,3}$ em 8 cores porque senão o número de arestas seria no máximo $32 = 8 \times 4$. Mas $G_{6,3}$ tem 33 arestas.