

Tópicos de Matemática Finita

2ª Época

20 de Julho de 2001

Nome:

Número:

Curso:

- O exame que vai realizar tem a duração de 3 horas.
- consiste em: 12 questões de escolha múltipla, valendo 1 valor cada, e 2 grupos de desenvolvimento, com várias alíneas, valendo 4 valores cada grupo.
- Há dois tipos de questões de escolha múltipla:
 - i. No primeiro tipo há quatro alternativas de resposta das quais apenas uma está correcta. Cada alternativa tem associado o seguinte campo ☐. Deve assinalar a sua resposta colorindo a preto ou azul o disco interior deste campo. A tabela seguinte mostra como estas questões serão classificadas.

resposta	valores
resposta certa	1
resposta errada	-0,3
não responde	0

- ii. No segundo tipo de questão são feitas quatro afirmações cuja validade se pede para avaliar. Marque as afirmações correctas no campo correspondente da primeira coluna, assinalada com um "Sim". Marque as afirmações falsas no campo correspondente da segunda coluna, assinalada com um "Não". A tabela seguinte mostra como, neste tipo de pergunta, a avaliação de cada uma das quatro afirmações será classificada.

avaliação	valores
avaliação correcta	0,25
avaliação errada	-0,25
não avalia	0

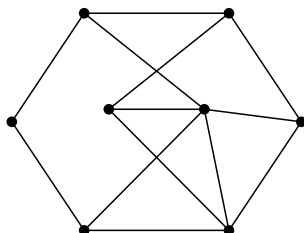
Escolha Múltipla	
Grupo 13	
Grupo 14	
Nota Final	

I. Perguntas de escolha múltipla

(1v.)

1.

Seja H o subgrafo gerado pelos vértices de grau 3 do seguinte grafo embaixo.



Assinale as afirmações correctas.

Sim

Não

☐
☒
A) o grafo H é uma árvore.
☐
☒
B) o grafo H é regular, i.e. todos os seus vértices têm o mesmo grau.
☒
☐
C) o grafo H não tem ciclos.
☐
☒
D) o grafo H é conexo.

(1v.)

2.

Assinale as afirmações correctas.

Sim

Não

☒
☐

A) Todo o subgrafo de um grafo de indiferença é um grafo de indiferença.

☐
☒

B) Existe um poliedro com 14 vértices, 30 arestas e 16 faces.

☒
☐

C) Toda a cadeia aberta é um grafo de indiferença.

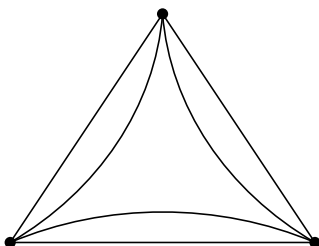
☒
☐

D) O dual de um grafo planar topológico com 5 vértices, 10 arestas e 7 faces tem 7 vértices, 10 arestas e 5 faces.

(1v.)

3.

Qual é o índice cromático do seguinte grafo?


☐

A) 5

☐

B) 4

☒

C) 6

☐

D) 3

(1v.)

4.

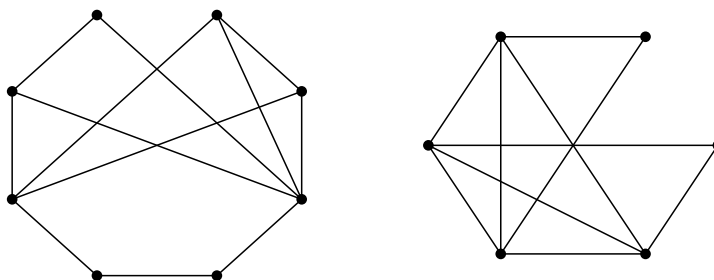
Um grafo planar topológico G tem todas as faces do mesmo grau 4, e tem 18 vértices de dois graus distintos, sendo 8 de grau 3 e 10 de grau d . Seja f o número de faces de G . Então

- | | | | | | |
|----------------------------------|----|--------------------|-----------------------|----|--------------------|
| ☒ | A) | $f = 16$ e $d = 4$ | ☐ | B) | $f = 18$ e $d = 3$ |
| ☐ | C) | $f = 12$ e $d = 3$ | ☐ | D) | $f = 14$ e $d = 4$ |

5.

(1v.)

Considere os grafos G_1 e G_2 embaixo, respectivamente à esquerda e à direita.



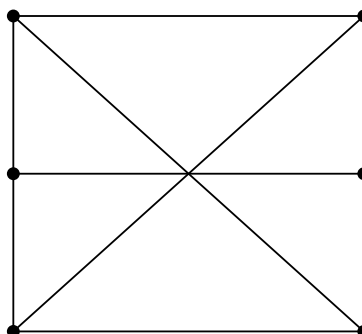
Assinale as afirmações correctas.

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|--|
| Sim | Não | |
| ☐ | ☒ | A) G_1 tem cadeias abertas eulerianas. |
| ☒ | ☐ | B) G_2 tem ciclos eulerianos. |
| ☒ | ☐ | C) G_2 tem ciclos hamiltonianos. |
| ☐ | ☒ | D) G_1 tem ciclos hamiltonianos. |

6.

(1v.)

Qual é o número cromático do seguinte grafo?



- | | | | | | | | | | | | |
|-----------------------|----|---|-----------------------|----|---|-----------------------|----|---|----------------------------------|----|---|
| ☐ | A) | 4 | ☐ | B) | 5 | ☐ | C) | 3 | ☒ | D) | 2 |
|-----------------------|----|---|-----------------------|----|---|-----------------------|----|---|----------------------------------|----|---|

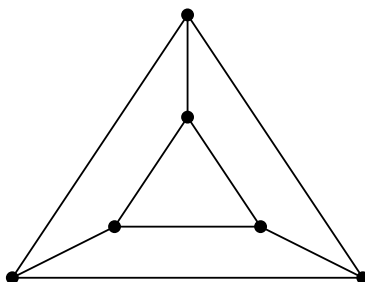
7.

(1v.)

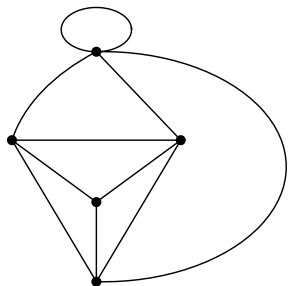
Escolha a melhor estimativa. O número de vértices num grafo simples com índice cromático 4 e com 9 arestas é pelo menos :

- | | | | | | | | | | | | |
|----------------------------------|----|---|-----------------------|----|---|-----------------------|----|---|-----------------------|----|---|
| ☒ | A) | 6 | ☐ | B) | 8 | ☐ | C) | 7 | ☐ | D) | 5 |
|----------------------------------|----|---|-----------------------|----|---|-----------------------|----|---|-----------------------|----|---|

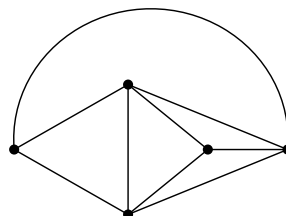
(1v.)

8.Considere o seguinte grafo planar topológico G .Qual dos seguintes grafos é isomorfo, enquanto grafo, ao dual de G ?

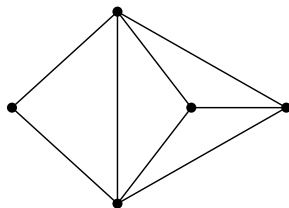
A)



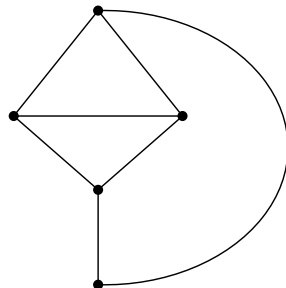
B)



C)



D)



(1v.)

9.

No desenvolvimento da potência $(x + y + z)^k$, com $k \geq 4$, depois de todas as simplificações e agrupamento de termos idênticos, o monómio $x^2 y z^{k-3}$ aparece com coeficiente 12. Qual o valor de k ?



A)

3



B)

5



C)

4



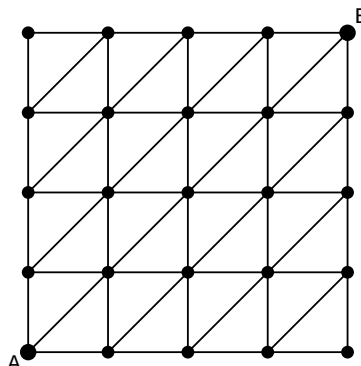
D)

6

(1v.)

10.

Considere o grafo seguinte.



Este grafo tem três tipos de arestas: *verticais*, *horizontais* e *diagonais*. Quantas cadeias elementares de comprimento 6, contendo exactamente duas arestas *diagonais*, existem neste grafo com extremidade inicial *A* e extremidade final *B*?

Sugestão: Represente estas cadeias por arranjos em três letras V, H e D.

- ☐ A) 60 ☐ B) 30 ☐ C) 120 ☒ D) 90

11.

(1v.)

Pretende-se distribuir 10 prendas, todas diferentes, por 3 crianças de modo que a primeira fique com 2 presentes, a segunda com 3 e a terceira com 5. De quantas maneiras se pode fazer a distribuição?

- ☐ A) $10!$ ☒ B) $\frac{10!}{2!3!5!}$ ☐ C) $2!3!5!$ ☐ D) $\frac{2!3!5!}{10!}$

12.

(1v.)

Das contagens seguintes três delas são iguais. Qual é distinta das restantes?

- ☐ A) O número de distribuições de 11 bolas idênticas por 3 crianças de modo que cada criança fique com pelo menos duas bolas .
- ☐ B) O número de listas (x_1, x_2, x_3) de 3 inteiros com $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ e cada $x_i \geq 1$.
- ☒ C) O número de combinações com repetições a 6 elementos num conjunto de três letras "A", "B", "C".
- ☐ D) O número de monómios $x^a y^b z^c$ de grau $a + b + c = 5$ com $a, b, c \geq 0$.

Nos grupos seguintes justifique convenientemente as suas respostas

II

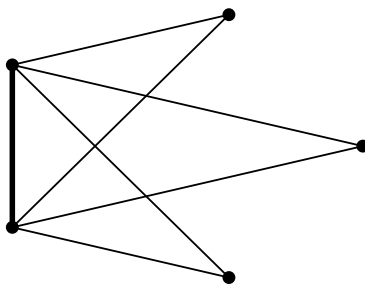
Oito bolas são distribuídas por 6 caixas numeradas de 1 a 6. Veja quantas distribuições existem se:

- (1) as bolas forem idênticas e a primeira caixa conter pelo menos uma bola.
- (2) as bolas forem todas distintas.

- (3) as bolas forem idênticas e cada caixa contiver no máximo cinco bolas.

III

Seja $G_{p,q}$ o grafo que se obtém do grafo completo K_p juntando-lhe q novos vértices e todas as arestas que os ligam aos vértices de K_p . Na figura seguinte vem representado o grafo $G_{2,3}$.



- (1) Mostre que $G_{2,3}$ é planar. E $G_{3,3}$, é planar também?
- (2) Qual o número cromático de $G_{2,3}$?
- (3) Qual o índice cromático de $G_{2,3}$?
- (4) Qual o maior número de componentes conexas que um subgrafo de $G_{p,q}$ pode ter? Porquê?
- (5) Identifique, através de uma condição em p e q , o conjunto dos valores de p e q para os quais $G_{p,q}$ não admite ciclos hamiltonianos. Deve justificar completamente a sua resposta. Se não conseguir resolver esta alínea mostre que $G_{3,4}$ não admite ciclos hamiltonianos.